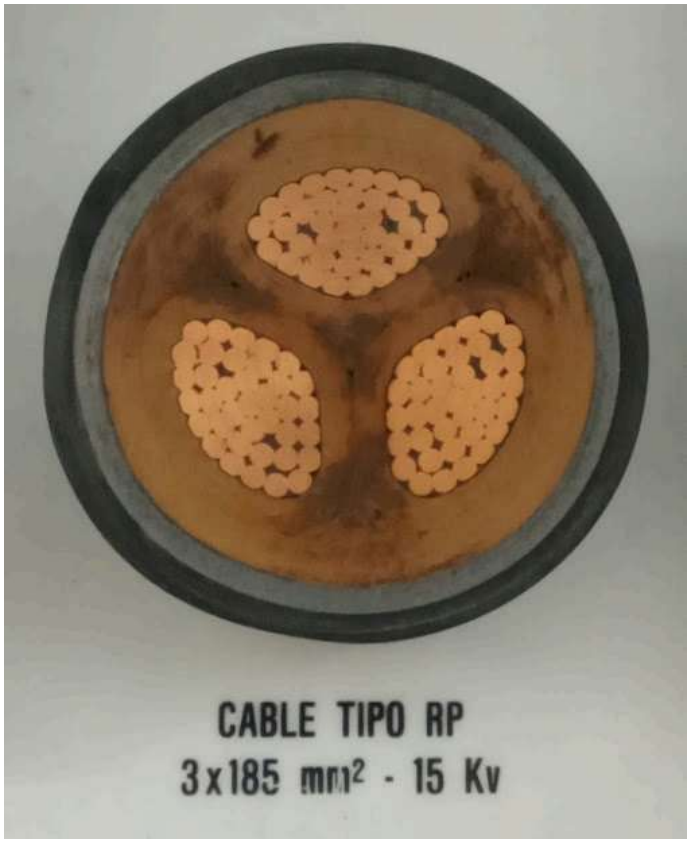
Facultad de Ingeniería UNLP	**Modelización matemática en contexto con la ingeniería**
Fecha:	**Noviembre 2025**

Fermín Delorenzini Castro - Santino Costanzi

IMAGEN



DEPARTAMENTO DE ELECTROTECNIA

Para este trabajo hemos elegido una sección transversal de un cable tipo RP. Fue elegido porque presenta áreas de geometría muy interesantes y atractivas a la vista, además de que se pueden modelar con curvas familiares a los estudiantes que cursan Matemática B, como veremos en los puntos siguientes. Nótese que, en este caso, el eje Z se puede utilizar de manera estratégica en la integración para definir el largo del cable y simplificar los calculos, que es un dato muy importante ya que este material se suele comprar por metro.

DESCRIPCIÓN

El objeto que elegimos es un modelo de cable tripolar de media tensión. En la leyenda puede leerse que es un "cable tipo RP". En una investigación preeliminar puede ser confundido por un cable coaxial, normalmente utilizado para la transferencia de datos, ya que comparten el mismo nombre. Sin embargo, estos suelen ser mucho más finos. La explicación de este nombre se debe a la

nomenclatura Argentina normalizada por IRAM, en este caso, RP hace referencia al relleno de polietileno reticulado tipo XLPE. Siendo esta nomenclatura la que se utiliza en el resto del mundo.



(Fuente: Catálogo de cables para la distribución de energía eléctrica - TopCable).

(XL) hace referencia a Cross-Linked y (PE) al relleno de polietileno (RP) que es lo que recubre a los tres conductores en la imagen inicial, y que puede confundirse fácilmente por cobre debido a su color similar.

Estos cables se emplean en instalaciones eléctricas con una tensión nominal de 1 a 36 kV. Aunque en algunos países son incluso considerados como cables de alta tensión. En Argentina se suele denominar como media tensión a algunas instalaciones que superan los 36 kV, en nuestro caso el cable tiene una tensión nominal de 15 kV.

Debido a su gran durabilidad son usualmente utilizados en proyectos que requieren ser instalados al aire libre, bajo tierra o en lugares que tienen una gran exposición a climas más fuertes como por ejemplo ambientes costeros.

En este trabajo se va a plantear una forma de calcular la cantidad de material necesario para la fabricación de una longitud L de cable tipo RP. Principalmente Cobre y Polietileno. Con las herramientas vistas en la clase de Matemática B, se pueden estimar costos de fabricación de este cable por metro (conociendo los valores de costo de material por volumen).

Al tomar la fotografía, la sección del cable se encontraba ubicada detrás de un vidrio a cierta distancia, por lo que ubicar una regla sobre el vidrio y tomar una foto nos daría una medida errónea por la perspectiva. Lo bueno es que disponemos del dato de la medida del área de la superficie de los conductores de cobre, que figura debajo del objeto. Con este dato obtendremos el resto de las medidas del objeto.

PLANTEO

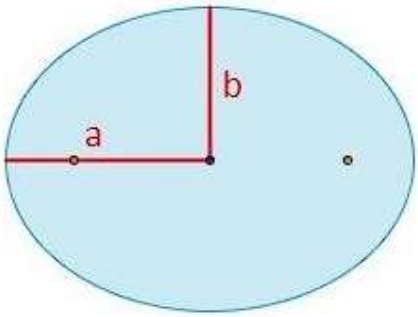
La problemática que surge es que al no poder medir el objeto con una regla, necesitamos realizar aproximaciones con un programa de computadora.

Basándonos en el dato de que el área de los conductores es:

$$3 \cdot 185\ mm^2$$

Suponemos que el conductor superior tiene forma elíptica (luego vamos a representarla como dos parábolas para realizar el cálculo de la integral). El área de una elipse se calcula con la siguiente fórmula:

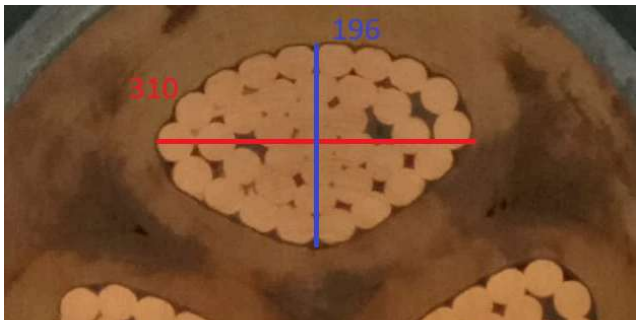
$$\pi \cdot a \cdot b$$



Siendo a y b los semiejes de la Elipse.

Ahora, si tomamos el dato de la foto, podemos afirmar que el área de la superficie de la sección transversal de uno de los conductores de cobre es 185 mm^2, por lo que el cálculo del área es 185 $mm^2 = \pi \cdot a \cdot b$

Analizando la imagen en un programa de computadora obtenemos los siguientes datos:



Si aproximamos el área del conductor al de una elipse, y utilizamos una herramienta para medir los píxeles, podemos establecer una relación entre ambas medidas:

$$\frac{196/2}{310/2} = \frac{98}{155}$$

Esto quiere decir que si consideramos a a como el semieje mayor y a b como el semieje mejor, entonces $\frac{b}{a} = \frac{98}{155}$

Planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{b}{a} = \frac{98}{155}$$

$$185 = a \cdot b \cdot \pi$$

$$b = a\frac{98}{155}$$

$$185 = a\frac{98}{155} \cdot a \cdot \pi$$

Resolviendo:

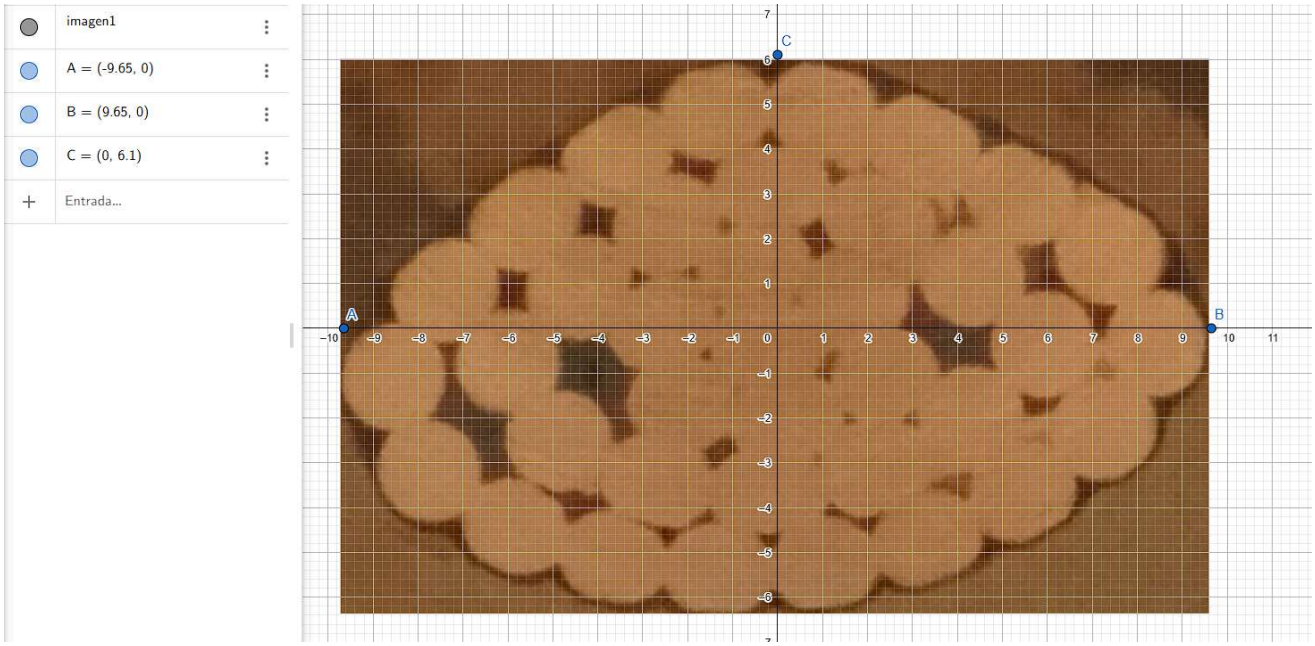
$$a = 9,65\ mm$$

Y reemplazando en la segunda ecuación nos queda:

$$b = 6,1\ mm$$

Con estas medidas ya podemos definir el primer intervalo de integración, que será una parábola.

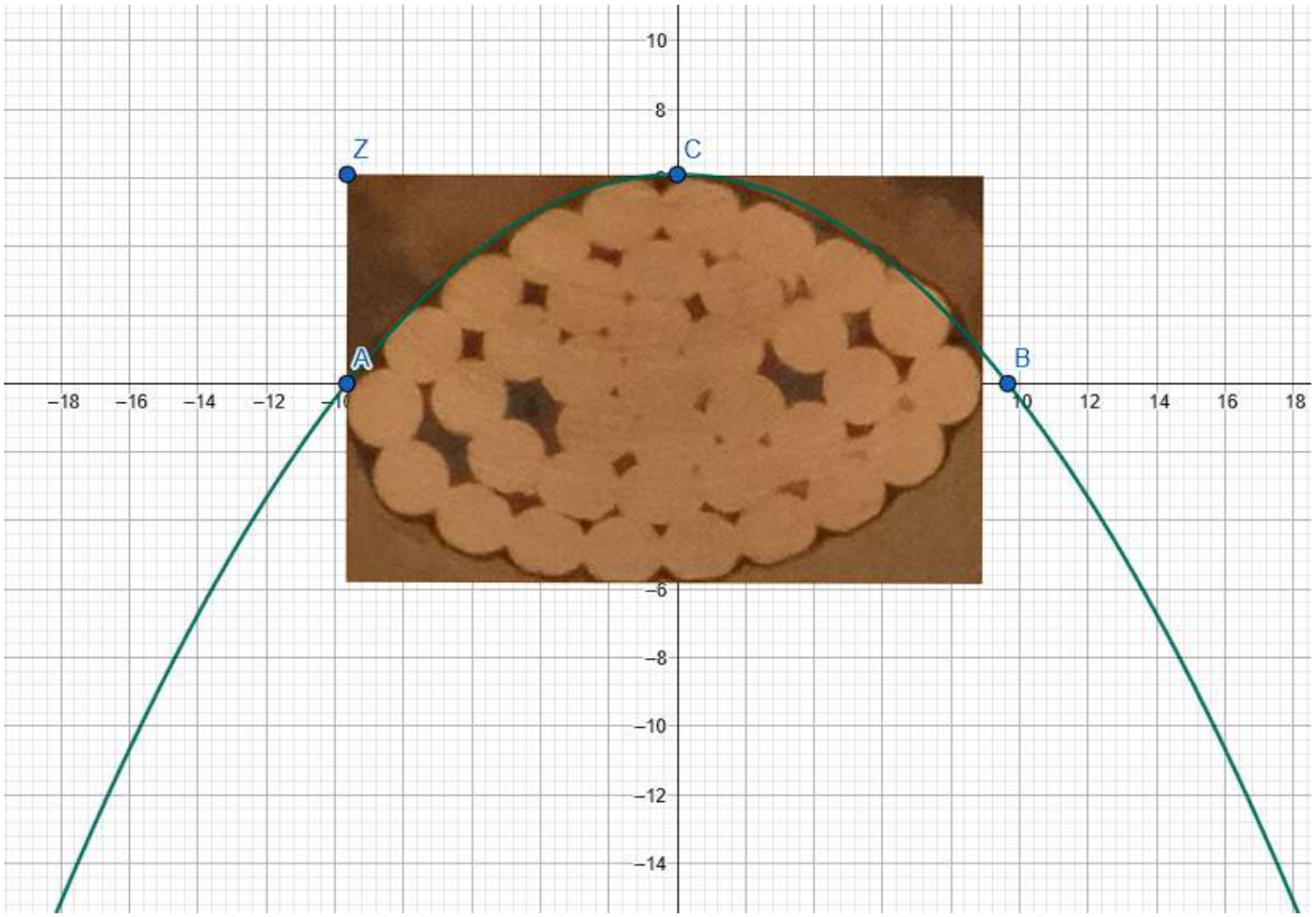
Para poder visualizarlo mejor vamos a insertar la imagen en geogebra.



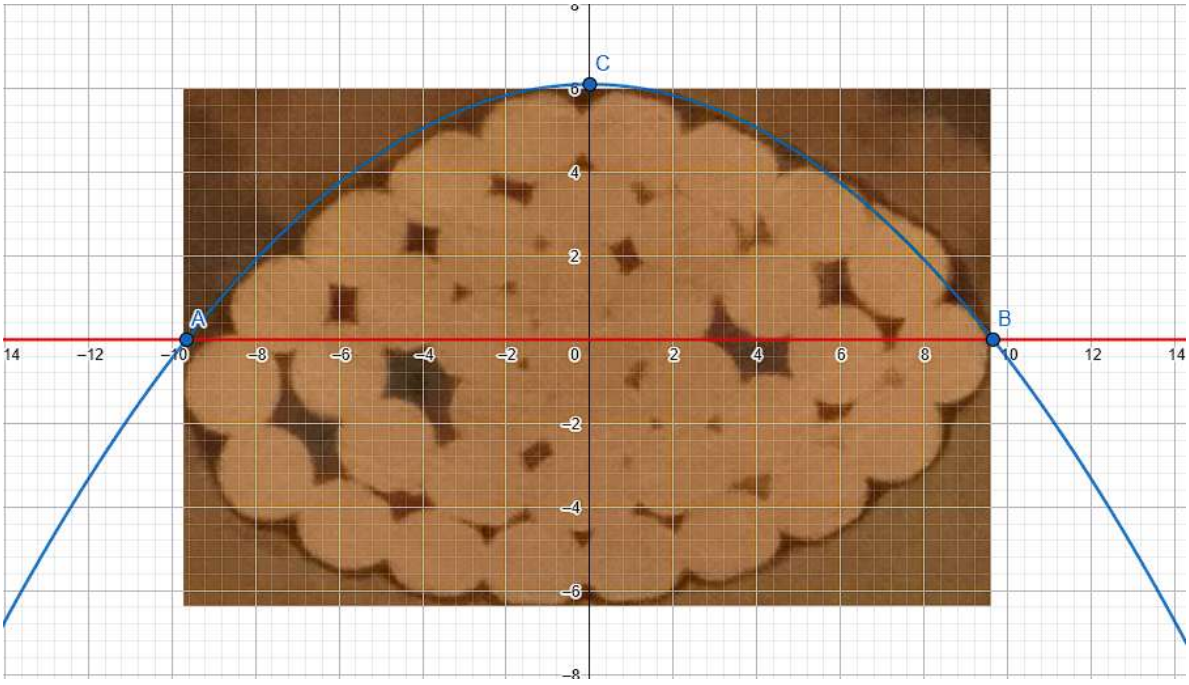
Los puntos A, B y C tienen coordenadas (-9.65 , 0) (9.65 , 0) y (0 , 6.1) respectivamente.

Para definir un intervalo de integración, las curvas que delimitan el área de integración deben ser funciones, por lo que usamos el comando f(x)=Polinomio({A, B, C}) para definir una parábola que pasa por los tres puntos A B y C.

Vamos a suponer que el filamento de cobre presenta una simetría con respecto a un eje horizontal, esto se acerca lo suficiente a la forma real del objeto sin complicar demasiado los cálculos

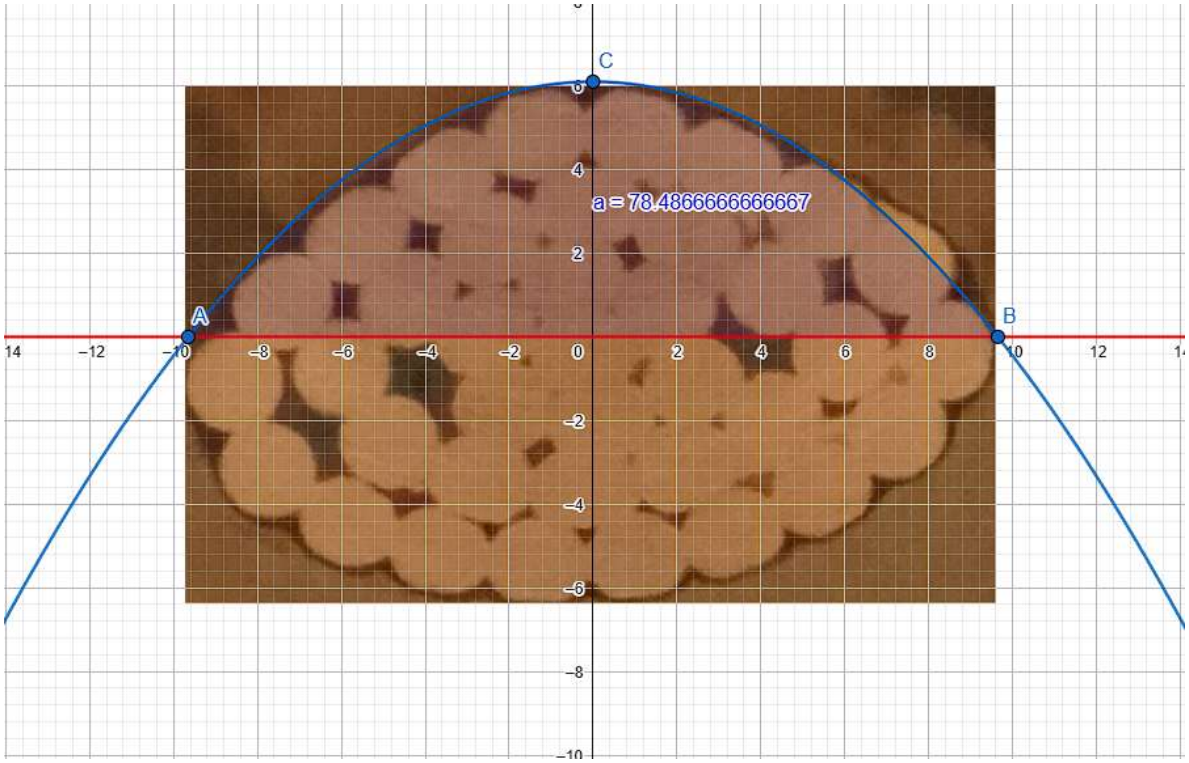


Definimos también la recta Y=0

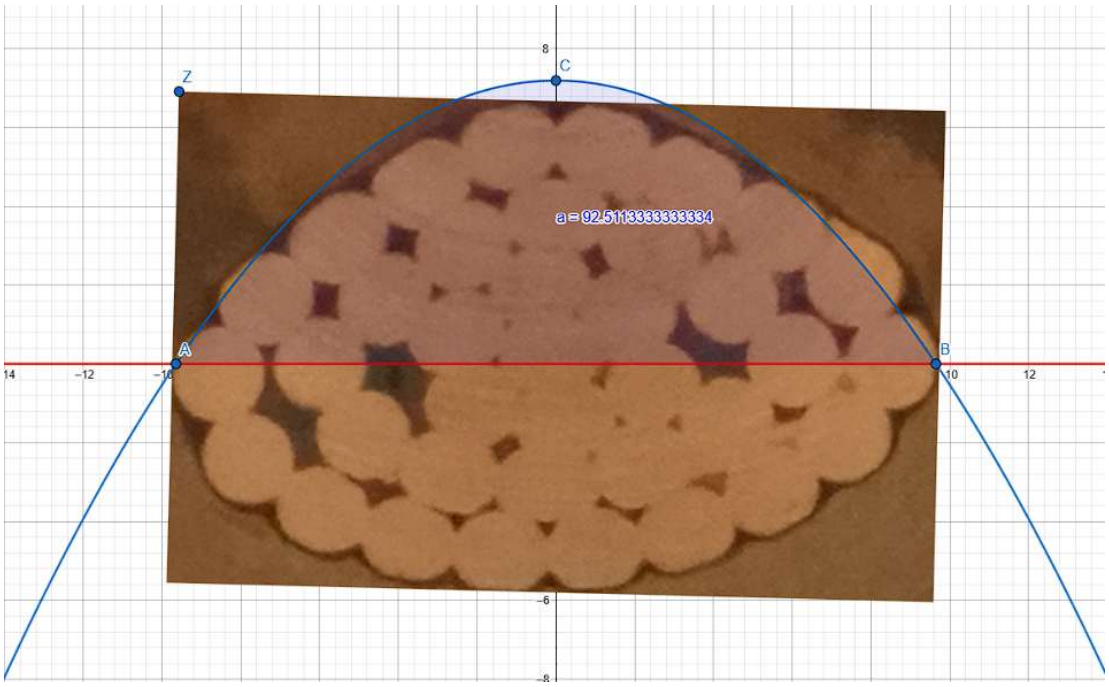


(Los puntos A y B se muestran como D y E pero no cambia los cálculos)

Ahora definimos el área entre la parábola y la recta Y=0:



Según Geogebra, la Región tiene un área de 78.48 mm^2 . Pero aquí surge otro problema, la mitad del área de 185mm2 es 92,5mm2. Esto se debe a diversos factores, como que en la realidad el filamento no es simétrico horizontalmente, la foto puede tener un leve error de perspectiva o que en la región por debajo de Y=0 hay más área de cobre. Como nosotros vamos a ignorar el área debajo de Y=0 lo que vamos a hacer es modificar la parábola para que tenga una área de 92,5mm2 aunque no se parezca a la foto insertada en geogebra. De esta manera se respeta el dato original de que el área es de 185mm2.



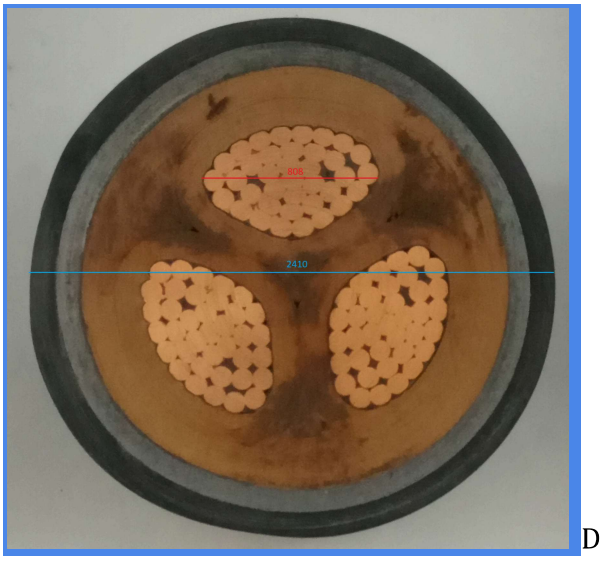
El área libre que queda entre el filamento y la parábola hace que se contrarreste la mayor cantidad de cobre presente por debajo de Y=0.

C tiene las coordenadas (0 , 7.19) (aproximación).

Expresión de la parábola: $= -0.0772101264463\ x^2 + 7.19$ (usando la expresión obtenida en geogebra).

Para representar las demás partes del cable vamos a utilizar coordenadas cilíndricas. Para esto es necesario conocer los distintos radios, desde la parte exterior al centro, del relleno compuesto separador, la capa protectora y el recubrimiento del cable.

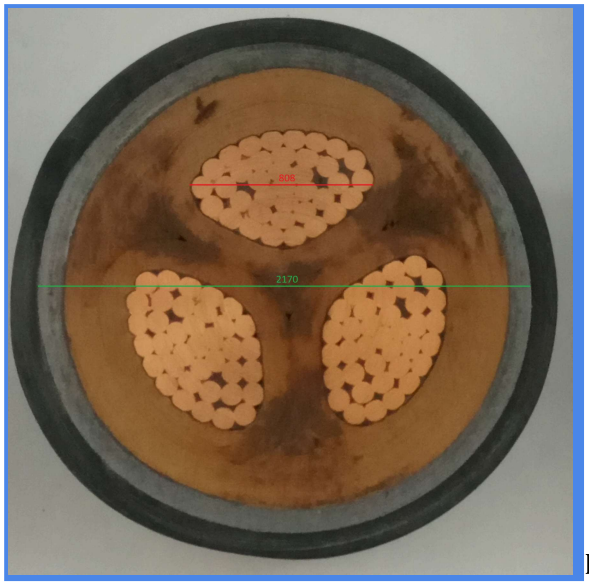
Volvemos al programa de dibujo y comparando los píxeles con la medida obtenida previamente (9.65mm), establecemos reglas de tres simples para conocer los distintos valores de los diámetros.



808 px → (9,65 mm)·2

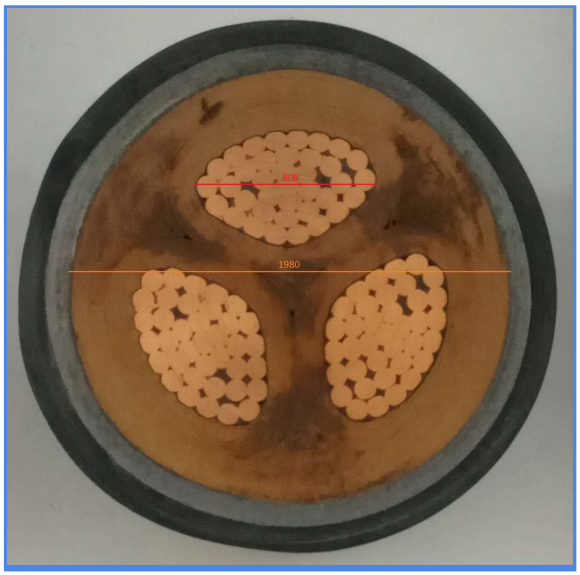
2410 px → 57,57 mm

Diámetro del recubrimiento de plástico.



808 px ⟶ (9,65 mm)·2
2170 px ⟶ 51.8 mm

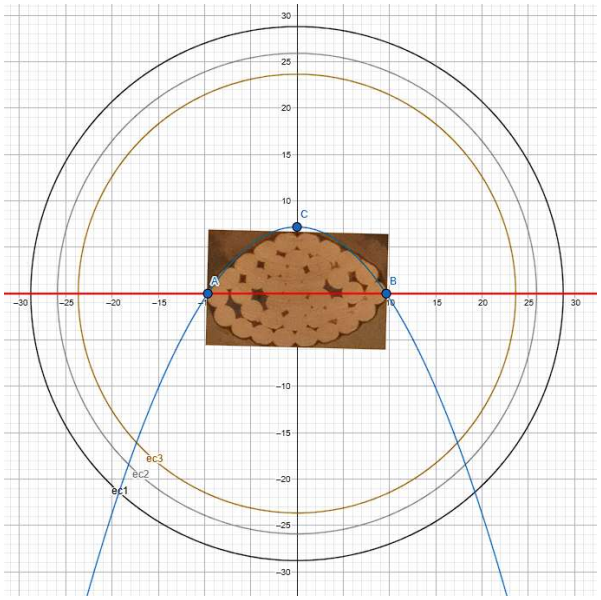
Diámetro de la capa protectora gris.

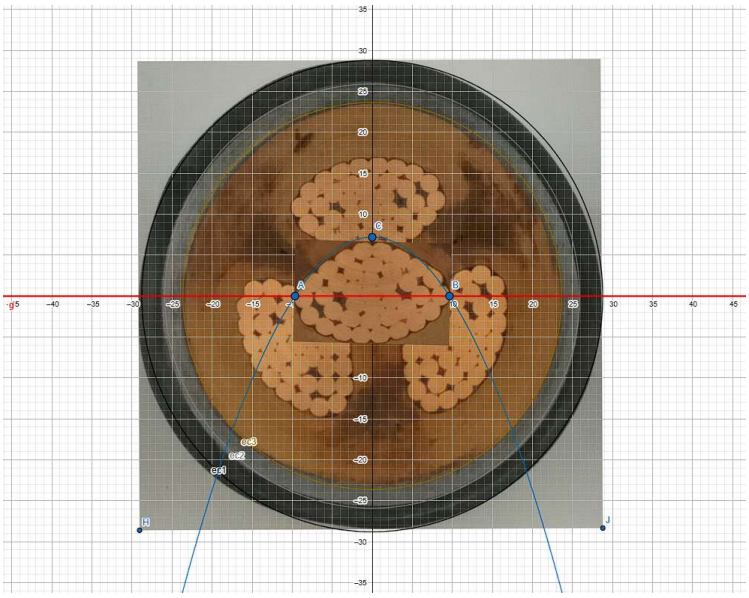


808 px ⟶ (9,65 mm)·2
1980 px ⟶ 47,3 mm

Diámetro del borde exterior del polietileno.

Ahora que determinamos las medidas de los tres diámetros, podemos visualizarlo en Geogebra:





Para el cálculo matemático del volumen del objeto, planteamos una integral doble definida, donde usaremos una de tipo 1 y para el resto usaremos coordenadas cilíndricas. luego calcularemos la integral de "z" a determinadas longitudes [m] por razones dichas anteriormente. Entonces, debemos de calcular 5 volúmenes correspondientes a:

- El conductor (cobre): Trabajamos sobre la imagen, y deducimos que la forma óptima para desarrollar el cálculo es mediante el uso de una parábola para obtener el área de la mitad superior de una de las agrupaciones y luego multiplicar por 12 al resultado y así obtener el área total. Luego se harán varias cuentas para obtener el volumen dependiendo de la longitud del mismo elegida. La integral planteada es:

$$V_c = 6 \cdot \int_0^z \int_0^x \int_0^y dV =$$

- El relleno o compuesto separador: Su cálculo es muy difícil mediante el uso de imágenes, por lo tanto, el cálculo lo realizamos mediante la siguiente ecuación. Para esto, tendremos que calcular el volumen total del objeto.

$$V_t = V_{cs} + V_{ce} + V_c + V_p$$

- Capa exterior protectora: Seguimos el trabajo sobre la imagen y vemos que su figura es muy parecida a una circunferencia. Por tanto realizaremos el cálculo en coordenadas cilíndricas. Donde:

$$x = r\cos(\theta) \;;\; y = r\,sen(\theta) \;;\; z = z \;;\; |J| = r$$

$$V_{ce} = \int_0^z \int_0^\theta \int_0^r r \, dr d\theta dz$$

- Plástico normal de cable: Utilizamos el mismo método que el punto anterior ya que se respeta la figura. Entonces:

$$x = r\cos(\theta) \;\; ; \;\; y = r\,sen(\theta) \;\; ; \;\; z = z \;\; ; \;\; |J| = r$$

$$V_p = \int_0^z \int_0^\theta \int_0^r r \, dr d\theta dz$$

$$V_c = 6 \cdot \int_0^z \int_0^x \int_0^y dV$$

$$\star \int_{-a}^{a} dA = 2\int_0^a dA$$

$$= 6 \cdot \int_0^z \star \cdot \int_{-9,65}^{9,65} \cdot \int_0^{(-0,077210126443x^2 + 7,19)} dy\,dx\,dz$$

$$= 12 \cdot \int_0^z \cdot \int_0^{9,65} \left((-0,077210126443x^2) + 7,19\right) dx\,dz$$

$$= 12 \cdot \int_0^z \cdot \left(\frac{-0,077210126443}{3} \cdot x^3 + 7,19 \cdot x\right)\Big|_0^{9,65} dz$$

$$= 12 \cdot z \cdot \left((-0,025736708811) \cdot (9,65)^3 + 7,19 \cdot 9,65\right)$$

$$= 12 \cdot z \cdot \left((-0,025736708811) \cdot 898,632125 + 69,3835\right)$$

$$= 12 \cdot z \cdot \left((-23,127883333) + 69,3835\right)$$

$$= 12 \cdot z\,(46,255666667)$$

$$= z \cdot 555,068\,mm^2$$

Teniendo en cuenta que $1m = 1000mm$:

Para 1m de cable:

$1000mm \cdot 555,068\,mm^2 = 555068\,mm^3$

Para el volumen total tenemos la circunferencia $x^2 + y^2 = 57,57$

Primero obtenemos el radio:

$57,57 / 2 = R$

$28,785 = R$

Utilizamos coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\operatorname{sen}(\theta) \quad |J| = r \\ z = z \end{cases}$$

Obtenemos los límites de integración:

Como es una circunferencia:

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$x^2 + y^2 = (28,785)^2 \rightarrow r^2\cos^2(\theta) + r^2\operatorname{sen}^2(\theta) = (28,785)^2$

$r^2 = (28,785)^2$

$r = 28,785$

$\therefore 0 \leq r \leq 28,785$

Planteamos integral:

$$V_t = \int_0^z \int_0^{2\pi} \int_0^{28,785} r \, dr \, d\theta \, dz$$

$$V_t = z \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2}(28,785)^2$$

$$= z \cdot \pi \cdot 828,576225 mm^2$$

Para el cable de 1m:

$1.000mm \cdot \pi \cdot 828,576225 mm^2 = 828.576,225 mm^3 \cdot \pi$

Para el volumen del plástico normal del cable:

Tenemos dos circunferencias:

$x^2 + y^2 = (28,785)^2$ (i)

$x^2 + y^2 = 51,8 \rightarrow R = 51,8/2 \rightarrow R = 25,9$ (ii)

Utilizando coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\,\text{sen}(\theta) \quad |J| = r \\ z = z \end{cases}$$

Obtenemos límites de integración:

Circunferencia: $0 \leq \theta \leq 2\pi$

(i) $r = 28,785$

(ii) $r^2 = (25,9)^2$

$r = 25,9$

$\therefore 25,9 \leq r \leq 28,785$

Planteamos la integral:

$$V_p = \int_0^z \int_0^{2\pi} \int_{25,9}^{28,785} r \, dr\, d\theta\, dz$$

$$= z \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \left((28,785)^2 - (25,9)^2\right)$$

$$= z \cdot \pi \cdot (828,576225 - 670,81)$$

$$= z \cdot \pi \cdot 157,766225\,mm^2$$

Para un cable de 1m:

$1.000\,mm \cdot \pi \cdot 157,766225\,mm^2 = 157.766,225\,mm^3 \cdot \pi$

Para el calculo de la capa exterior protectora, tenemos dos circunferencias:

(i) $x^2 + y^2 = 47,3 \rightarrow R = 47,3/2 \rightarrow R = 23,65$

(ii) $x^2 + y^2 = 51,8 \rightarrow R = 51,8/2 \rightarrow R = 25,9$

Utilizamos coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\,\mathrm{sen}(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad |J| = r$$

Para obtener los límites de integración:

(i) $x^2 + y^2 = (23,65)^2$ (ii) $x^2 + y^2 = (25,9)^2$

$r^2 = (23,65)^2$ $r^2 = (25,9)^2$

$r = 23,65$ $r = 25,9$

$\therefore 23,65 \leq r \leq 25,9$

Como es una circunferencia: $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Planteamos la integral:

$$V_{ce} = \int_0^z \int_0^{2\pi} \int_{23,65}^{25,9} r\,dr\,d\theta\,dz$$

$$= z \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2}\left((25,9)^2 - (23,65)^2\right)$$

$$= z \cdot \pi \cdot ((670,81) - (559,3225))$$

$$= z \cdot \pi \cdot 111,4875\,mm^2$$

Para un cable de 1m:

$1000m \cdot \pi \cdot 111,4875\,mm^2 = 111487,5\,mm^3 \cdot \pi$

Para el cálculo del compuesto separador:

Realizamos la resta de los volúmenes obtenidos anteriormente:

$$V_{cs} = V_t - V_{ce} - V_p - V_c$$

$$= 828576{,}225\,mm^3 \cdot \pi - 11487{,}5\,mm^3 \cdot \pi - 157766{,}225\,mm^3 \cdot \pi - 555068\,mm^3$$

$$= \pi\,(828576{,}225\,mm^3 - 11487{,}5\,mm^3 - 157766{,}225\,mm^3) - 555068\,mm^3$$

$$= \pi\,(559322{,}5\,mm^3) - 555068\,mm^3$$

$$= 1.757.163{,}457\,mm^3 - 555.068\,mm^3$$

$$= 1.202.095{,}457\,mm^3$$

Cálculo del área de la superficie del material conductor (cobre): Para este cálculo se utilizó el cálculo de la integral del vector normal a la parábola elegida, luego se hicieron los cálculos necesarios para la obtención de area total ya que con solo la parábola conseguimos ⅙ del área necesaria. Además se le sumó luego el área de la superficie ya antes calculada, la cual también debemos de duplicar en este caso ya que una parte se encuentra en el comienzo del cable y la otra al terminar el mismo. El cálculo de la integral planteada se realizó mediante la función integral de la calculadora.

Para el cálculo del área de la superficie:

$S: y = -0,077210126446 3x^2 + 7,19$

Limitada por $y=0$, $z=0$, $z=1m$, $x \in [[-9,65], (9,65]]$

$$\begin{cases} x = u \\ y = -0,077210126446 3u^2 + 7,19 \\ z = z \end{cases}$$

$$\therefore \bar{r} = \bar{r}(u,z) = \langle u, -0,077210126446 3u^2 + 7,19, z \rangle$$

Para obtener el vector normal $\vec{N}$:

$$\frac{d\bar{r}}{du} = \langle 1, (-0,154420252892 6u), 0 \rangle$$

$$\frac{d\bar{r}}{dz} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

$$\vec{N} = \frac{d\bar{r}}{du} \times \frac{d\bar{r}}{dz} = \langle (-0,154420252892 6u), (-1), 0 \rangle$$

$$|\vec{N}| = \sqrt{(0,154420252892 6u)^2 + 1}$$

Planteamos integral:

$$\text{Área}(S_a) = \int_0^1 \int_{-9,65}^{9,65} \sqrt{0,023845614503414538 66u^2 + 1}\, du\, dz$$

Por partes: $a = \sqrt{0,023845614503414538 66u^2 + 1}$

$$da = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,023845614503414538 66u \cdot 2}{\sqrt{0,023845614503414538 66u^2 + 1}}\, du$$

$$db = du$$

$$b = u$$

$$\therefore \text{Área}(S_a) = \int_0^1 \left(\sqrt{0,023845614503414538 66u^2 + 1} \cdot u \Big|_{-9,65}^{9,65} - \int_{-9,65}^{9,65} \frac{0,023845614503414538 66u^2}{\sqrt{0,023845614503414538 66u^2 + 1}} \right)$$

$$\text{Área}(S_T) = 151.226,7931\ mm^2$$

Tenemos en cuenta que al resultado de la integral se le debe de sumar el área de los extremos: $(185 mm^2 \cdot 3) \cdot 2$.

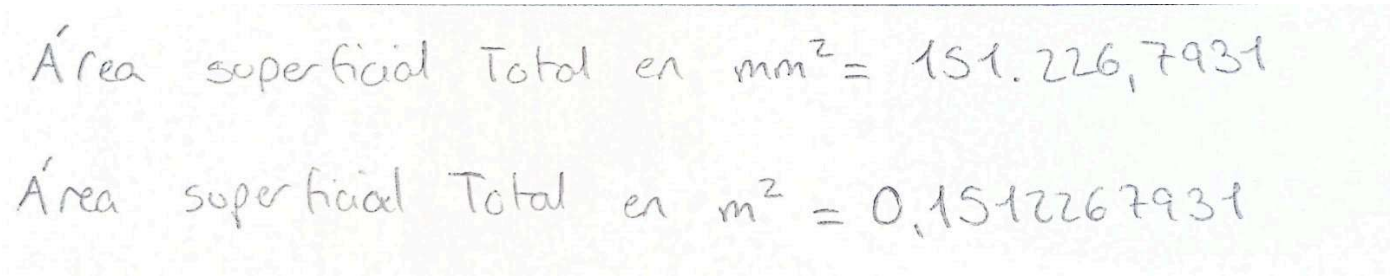


TABLA DE RESULTADOS

Volumen en 1m de cable	Conductor (cobre)	Totalidad del objeto	Plástico normal de cable	Capa exterior protectora	Compuesto separador
En mm^3	555.068	2.603.048,981	495.637,2134	350.248,311	1.202.095,457
en m^3	0,000555068	2,603048981	0,4956372134	0,350248311	1,202095457