Problemas – Tema 5

Problemas resueltos - 14 - cambio de variable en exponencial de la misma base

1. Sea la función $f(x):(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ **definida por** $f(x)=\frac{1+e^x}{1-e^x}$ **. Halla la primitiva de la función cuya gráfica pasa por el punto** $(1,1)$ **(Sugerencia: cambio de variable** $t=e^x$ **).**

Debemos resolver la siguiente integral indefinida:

$I=\int\frac{1+e^x}{1-e^x}dx$ → cambio $t=e^x$ → diferenciamos $dt=e^x dx$ → $dx=\frac{dt}{t}$ → sustituimos

$I=\int\frac{1+t}{1-t}\frac{dt}{t}=\int\frac{1+t}{(1-t)t}dt$ → Cociente de polinomios con grado numerador < grado denominador

Como el denominador ya está descompuesto en dos raíces simples, aplicamos el método de los coeficientes indeterminados.

$\frac{1+t}{(1-t)t}=\frac{A}{1-t}+\frac{B}{t}$ → m.c.m. e igualamos numeradores → $1+t=At+B(1-t)$

Damos valores:

$t=0 \rightarrow 1=B$

$t=1 \rightarrow 2=A$

La integral queda:

$$I=\int\frac{A}{1-t}dt+\int\frac{B}{t}dt=-2\ln|1-t|+\ln|t|+C$$

Deshacemos el cambio de variable $t=e^x$ → $I=-2\ln|1-e^x|+\ln|e^x|+C=-2\ln|1-e^x|+x+C$

Aplicamos condición de contorno $F(1)=1$ siendo $F(x)$ la primitiva buscada.

$$-2\ln|1-e|+1+C=1 \quad \rightarrow \quad C=2\ln|1-e|\simeq 1{,}08$$

Por lo que la primitiva solución es: $F(x)=-2\ln|1-e^x|+x+1{,}08$

2. Calcula $\int \sqrt{e^x+1}\,dx$

$I=\int \sqrt{e^x+1}\,dx$ → cambio de variable $e^x+1=t^2 \rightarrow e^x dx=2t\,dt$

$$dx=\frac{2t\,dt}{e^x} \rightarrow dx=\frac{2t\,dt}{t^2-1}$$

$$I=\int \sqrt{t^2}\frac{2t\,dt}{t^2-1} \rightarrow I=\int \frac{2t^2}{t^2-1}dt \rightarrow I=2\int \frac{t^2}{t^2-1}dt \rightarrow I=2\int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt$$

$$I=2\int dt+2\int \frac{1}{t^2-1}dt \rightarrow I=2t+2\int \frac{1}{(t+1)(t-1)}dt$$

Aplicamos método de coeficientes indeterminados.

$$\frac{1}{(t+1)(t-1)}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t-1} \rightarrow 1=A(t-1)+B(t+1)$$

$$t=1 \rightarrow 1=0+2B \rightarrow B=\frac{1}{2}$$

$$t=-1 \rightarrow 1=-2A \rightarrow A=\frac{-1}{2}$$

$$I=2t+2\cdot\frac{-1}{2}\int \frac{1}{t+1}dt+2\cdot\frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1}dt=2t-\ln|t+1|+\ln|t-1|+C=2t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

Deshacemos el cambio de variable → $e^x+1=t^2 \rightarrow \sqrt{e^x+1}=t$

$$I=2\sqrt{e^x+1}+\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x-1}+1}\right|+C$$

3. Resuelve $\int \frac{e^x}{e^x+e^{2x}-2}dx$ **(ayuda:** $e^x=t$ **)**

A partir del cambio de variable $e^x=t$ → diferenciamos $e^x dx=dt$ → $dx=\frac{dt}{e^x}$ → $dx=\frac{dt}{t}$

Sustituimos en la integral.

$$\int \frac{t}{t+t^2-2}\cdot\frac{dt}{t} \text{ → Simplificamos → } \int \frac{1}{t^2+t-2}dt$$

Cociente de polinomios, con grado del numerador inferior al grado del denominador.

Obtenemos raíces del denominador → $t^2+t-2=0$ → $t=1$, $t=-2$ → Dos raíces simples

Aplicamos el método de coeficientes indeterminados.

$$\frac{1}{t^2+t-2}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+2} \text{ → Aplicamos m.c.m. e igualamos numeradores}$$

$$1=A(t+2)+B(t-1)$$

Si $t=1$ → $1=A(3)+B\cdot 0$ → $A=\frac{1}{3}$

Si $t=-2$ → $1=A\cdot 0+B(-3)$ → $B=\frac{-1}{3}$

Sustituimos en la integral.

$$I=\int \frac{1}{t^2+t-2}dt=A\int \frac{1}{t-1}dt+B\int \frac{1}{t+2}dt=\frac{1}{3}\cdot\ln|t-1|-\frac{1}{3}\cdot\ln|t+2|+C$$

Deshacemos el cambio de variable $e^x=t$.

$$I=\frac{1}{3}\cdot\ln|e^x-1|-\frac{1}{3}\cdot\ln|e^x+2|+C$$

4. Resuelve $\int \frac{e^x}{(e^{2x}-1)(e^x+1)}dx$

Aplicamos el siguiente cambio de variable → $e^x=t \quad \rightarrow \quad e^x dx=dt \quad \rightarrow \quad dx=\frac{dt}{e^x}=\frac{dt}{t}$

$$I=\int \frac{t}{(t^2-1)(t+1)}\frac{dt}{t}=\int \frac{1}{(t+1)(t-1)(t+1)}dt=\int \frac{1}{(t+1)^2(t-1)}dt$$

Llegamos a un cociente de polinomios, con grado del numerador menor que el grado del denominador. En el denominador tenemos una raíz doble y una raíz simple, por lo que aplicamos el método de los coeficientes indeterminados.

$$\int \frac{1}{(t+1)^2(t-1)}dt=\int \frac{A}{t+1}dt+\int \frac{B}{(t+1)^2}dt+\int \frac{C}{t-1}dt$$

$$1=A(t+1)(t-1)+B(t-1)+C(t+1)^2$$

$$t=1 \quad \rightarrow \quad 1=0+0+C(2)^2 \quad \rightarrow \quad C=\frac{1}{4}$$

$$t=-1 \quad \rightarrow \quad 1=0+B(-2)+0 \quad \rightarrow \quad B=\frac{-1}{2}$$

$$t=0 \quad \rightarrow \quad 1=A(1)(-1)+B(-1)+C(1)^2 \quad \rightarrow \quad 1=-A+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad A=\frac{-1}{4}$$

$$I=\frac{-1}{4}\int \frac{1}{t+1}dt-\frac{1}{2}\int \frac{1}{(t+1)^2}dt+\frac{1}{4}\int \frac{1}{t-1}dt=\frac{-1}{4}\ln|t+1|+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+1}+\frac{1}{4}\ln|t-1|+C$$

Deshacemos el cambio de variable $e^x=t$

$$I=\frac{-1}{4}\ln|e^x+1|+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^x+1}+\frac{1}{4}\ln|e^x-1|+C=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^x+1}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C$$