Kalkülfreie Einstiege in die Differenzial- und Integralrechnung

Hans-Jürgen Elschenbroich



ICME 13 Tagung für Lehrkräfte 28.7.2016, Hamburg

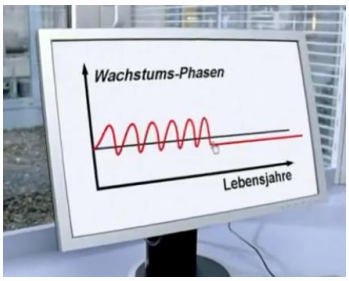
GeoGebraTube: www.geogebra.org/**m/PKeGfNd5**

Agenda

1. Grundlegendes zu Funktionen
2. Graphenplotter
3. Funktionenplotter
4. **Funktionenlupe**
5. **Integrator**
6. Kumulator

GeoGebraTube: www.geogebra.org/**m/PKeGfNd5**

1.1 Funktionen sind überall



1.2 Meraner Reform



Funktionen:
Im MU erst seit einem Jahrhundert Thema.
Meraner Reform (1905), Felix Klein

Meraner Reform:

-„Erziehung zur **Gewohnheit des funktionalen Denkens**“

- „diese Gewohnheit des funktionalen Denkens soll auch in der Geometrie **durch fortwährende Betrachtung der Änderungen** gepflegt werden “.

1.3 Funktionaler Zusammenhang

Funktionales Denken:
Heute Funktionaler Zusammenhang.
Dynamische Sicht.

Aber unterrichtliche Umsetzung: Funktionsbegriff,
statische Sicht (rechtseindeutige Zuordnung).

Ab 2000 Wiederbelebung:
- Kovariation (Malle 2000)
- Leitidee funktionaler Zusammenhang (KMK 2003, 2012)

1.4 Werkzeug-Nutzung

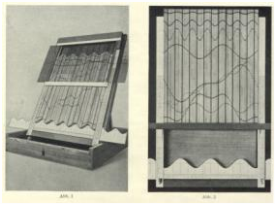




Das Werkzeug sollte zur Aufgabe passen …
und die Aufgabe zum Werkzeug

1.5 Funktionen-Werkzeug?

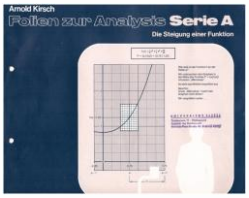
Lange Zeit kein geeignetes Werkzeug zur Darstellung/ Manipulation von Funktionen!



Marzani (1956): Funktionenschieber

1.5 Funktionen-Werkzeug?

Lange Zeit kein geeignetes Werkzeug zur Darstellung/ Manipulation von Funktionen!



Kirsch (1980): Funktionenmikroskop. OHP Foliensatz.

1.6 Funktionenplotter

Funktionsgraph: schwieriges Objekt!
„Kurvendiskussion“: Graph-Skizze als Krönung.

Ab 80-er Jahre: Funktionenplotter (Mathe-Ass etc.), später CAS (Derive) und GTR, GeoGebra etc.

Digitales Werkzeug zum Visualisieren von Funktionen.

Typisch: Zuerst der Funktionsterm, dann der Graph.

1.7 Repräsentationsformen

„Eine Funktion hat viele Gesichter.“ (Herget et al)

Typische Repräsentationsformen :
Term – **Tabelle** – **Graph** – Text .

Multirepräsentationssoftware wie *GeoGebra* oder *TI-Nspire* ermöglicht nicht nur das Arbeiten in diesen Repräsentationsformen, sondern auch den Wechsel zwischen ihnen.

2.1 Graphenplotter

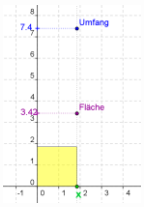
Funktionenplotter: enormer Fortschritt!
Aber didaktisch ein zu großer Schritt?
Entschleunigung?
Graph erscheint statisch.
Priorität des Funktionsterms?

Punkteweiser Zugang: Kovariation wird deutlich!

DGS macht Funktionsgraphen erlebbar und verstehbar als **Ortslinie/ Spur** von P(x/y) bei Variation von x.

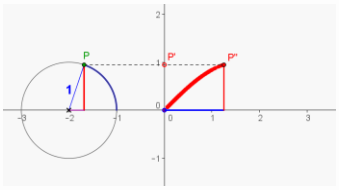
Zuerst entsteht hier der Graph!
Auch Graph von Kurven, die keine Funktionen sind!

2.2 Formel oder Funktion?



Umfang bzw. Fläche eines Quadrats.
Der Graph entsteht vor dem Term, ohne den Term durch Übertragen von *gemessenen Werten* !

2.3 Entstehung der Sinuskurve



Die Sinuskurve entsteht aus der Kreisbewegung. Der Graph entsteht vor dem Term, ohne den Term aus *konstruierten Punkten* !

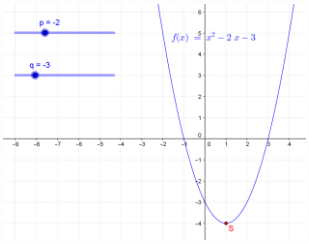
3.1 Funktionen‘schar‘

Plotten von Funktionen mit Formvariablen (Parametern): (Funktionen‘*schar*‘). Umsetzung in CAS: Vector-Befehl.

GeoGebra: Zu den jeweiligen Parameter-Werten ist der zugehörige Funktionsgraph sichtbar (keine Schar)! Funktionsklasse wird durch einen Prototypen repräsentiert.

Dynamische Umsetzung durch *Schieberegler*.

3.2 Scheitelpunktskurve



Kurve des Scheitelpunkts ?

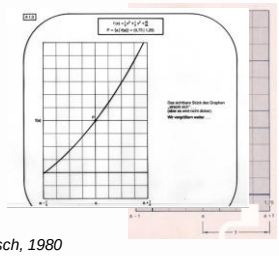
4.1 Einstieg Differenzialrechnung

Ansatz meist geometrisch (Sekante-Tangente) oder anwendungsorientiert (Änderungsrate) .

Üblicher Kalkül:
Differenzenquotienten, trickreich kürzen, Grenzwertprozess.

(Zu) schneller Übergang von Begriffen zu Regeln:
$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

4.2 Funktionenmikroskop



- *Kirsch, 1980*

4.2 Funktionenmikroskop

Keine Differenzenquotienten, keine Grenzwertbildung.
Keine Lineare Approximation, keine Tangente (!).

Es geht Kirsch um die **Funktion f selber**, um „die **Idee der ‚lokalen Glättung‘** des Graphen bei fortwährender Vergrößerung“ (Blum & Kirsch, 1979).

„**Wie steil** ist die Funktion f an der Stelle a ?“ (Kirsch, 1980)

OHP-Foliensatz

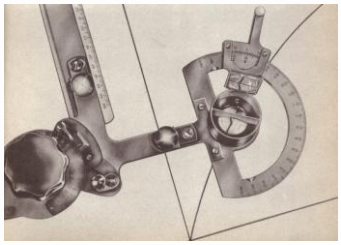
4.2 Funktionenmikroskop

Graphischer, kalkülfreier und direkter Zugang zur Steigung des Graphen von f an einem Punkt A.

Nachteil 1:
Man verliert beim Hineinzoomen den Überblick .
Idee: Mit moderner Software zwei Grafik-Fenster nutzen.

Nachteil 2:
Stand alone Lösung, keine Verbindung zum klassischen Zugang (Sekante-Tangente, h-Methode).
Idee: Mit moderner Software heute verbindbar!

4.3 Derivimeter



Großes Handbuch der Mathematik, 1967

4.4 Differentiograph

21

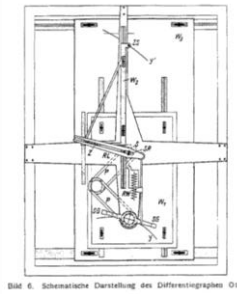


Bild 6. Schematische Darstellung des Differentiographen Ott.

- *Willers, 1942*

4.5 Die digitale Funktionenlupe I

- **Steigung lokal – Derivimeter und Funktionenmikroskop 2.0**

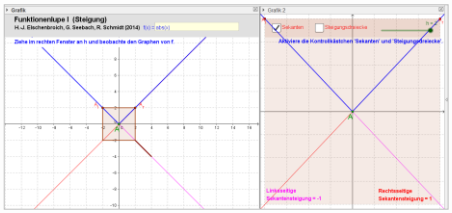


- **Funktionenlupe: global *und* lokal = glokal**

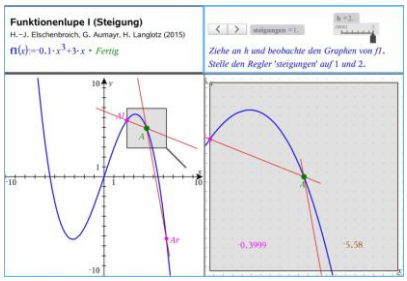
www.funktionenlupe.de **GeoGebraTube: Die Funktionenlupe**

4.5 Die digitale Funktionenlupe I

- **Nicht-Differenzierbarkeit**

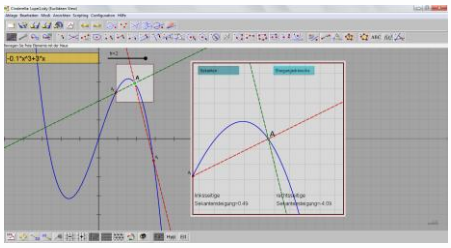


4.5 Die digitale Funktionenlupe TI-Nspire



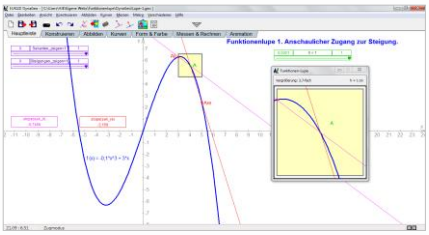
TI-Nspire Version: Elschenbroich, Langlotz & Aumayr

4.5 Die digitale Funktionenlupe Cinderella



Cinderella Version: Jürgen Richter-Gebert

4.5 Die digitale Funktionenlupe Dynageo



DynaGeo Version: H.-J. Elschenbroich

4.6 Die digitale Funktionenlupe II

- **Steigungsfunktionen → Ableitungsfunktion**

Steigung lokal: dynamisieren.
Die jeweilige Steigung als y-Koordinate eines Punktes (x(A), _).

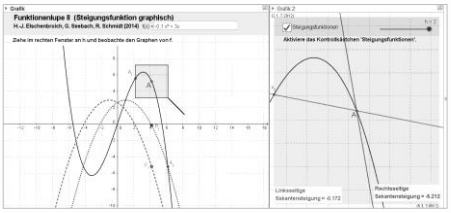
Punkt A auf dem Graphen von f bewegen.

Von der lokalen linksseitigen und rechtsseitigen Sekantensteigung zu Sekantensteigungsfunktionen.

Graphischer Zugang mittels **Ortslinien**. Ohne Funktionsterm!

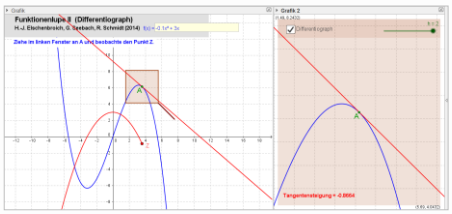
4.6 Die digitale Funktionenlupe II

- **Steigungsfunktionen**



4.6 Die digitale Funktionenlupe II

- **Differentiograph**



4.7 Die digitale Funktionenlupe III

- **Krümmung lokal**

Zweite Ableitung: Links- oder Rechtsgekrümmtheit.

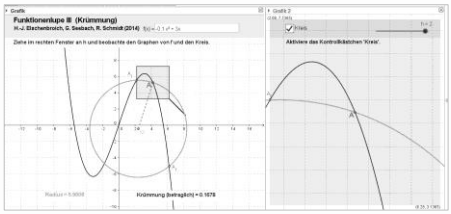
Krümmung: analytisch ein sehr schwieriger Begriff.
Änderung des Steigungswinkels in Bezug auf die Bogenlänge:

$$k = \frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}^3}$$

Geometrische Idee einfach: Kreis durch drei Punkte A_l, A, A_r.
Krümmung = 1/Radius. Ggf. zusätzlich Vorzeichen ermitteln.

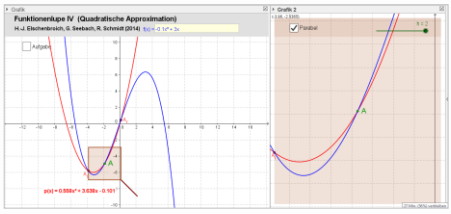
4.7 Die digitale Funktionenlupe III

- **Krümmung lokal – Schmiegekreis**



4.8 Die digitale Funktionenlupe IV

- **Parabel-Approximation**



Parabel durch drei Punkte A_l, A, A_r.

4.9 Die digitale Funktionenlupe V

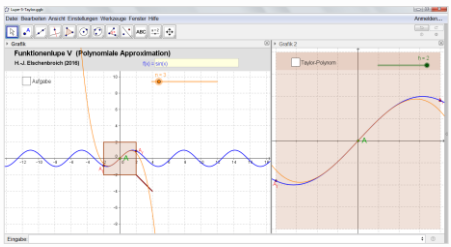
- **Taylor-Approximation**

Lineare Approximation: Tangente (Schmiegegerade)
Quadratische Approximation : Parabel (Schmiegeparabel)
Höhere Approximation?

Taylor-Polynom (Black Box Befehl ?)
De: `TaylorReihe[f,a,n]`
En: `TaylorPolynomial[f,a,n]`

4.9 Die digitale Funktionenlupe V

- **Taylor-Approximation**



4.10 Grundvorstellungen Differenzialrechnung

- Sekante, Tangente, Steigung
- Ableitungsfunktion
- Krümmung
- Approximation

5.1 Einstieg Integralrechnung

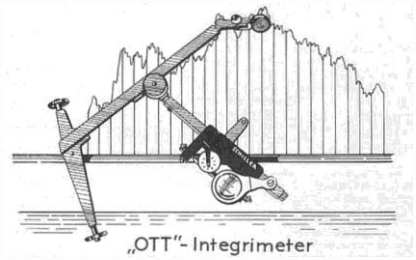
Ansatz geometrisch (Flächeninhalt) oder anwendungsorientiert (Änderungseffekt, Bestand) .

Üblich: Produktsummen, trickreich zusammenfassen, kürzen. Grenzwertprozess.

(Zu) schneller Übergang von Begriffen zu Regeln, Stammfunktionen statt Integration.

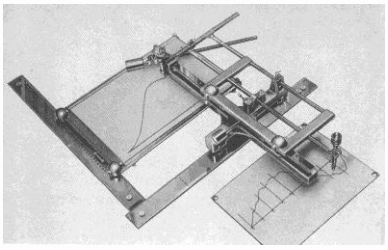
$f(x) = x^n \Rightarrow F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

5.2 Integrimeter



- *Rechnerlexikon.de, Schiller 1951*

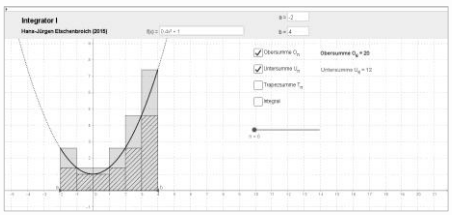
5.3 Integraph



- *Großes Handbuch der Mathematik, 1967*

5.4 Der digitale Integrator

- **Integrator I: Integrimeter**



www.integrator-online.de **GeoGebraTube: Der Integrator**

5.5 Der digitale Integrator II

- **Integrator II: Summenfunktionen → Integralfunktion**

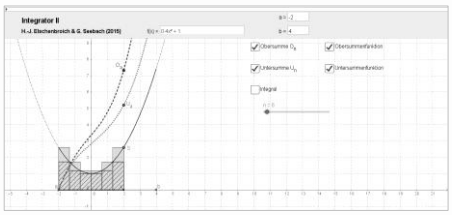
Summe auf [a;b] dynamisieren:
x auf dem Intervall [a;b] bewegen.
Summen auf [a;x] betrachten.
Die jeweilige Summe als y-Koordinate von (x; □) .

Von der Untersummenfunktion und Obersummenfunktion zur Integralfunktion.

Graphischer Zugang mittels Ortslinien.

5.5 Der digitale Integrator II

- **Summenfunktionszeichner → Integralfunktionszeichner**



5.6 Der digitale Integrator III

- **Integraph**

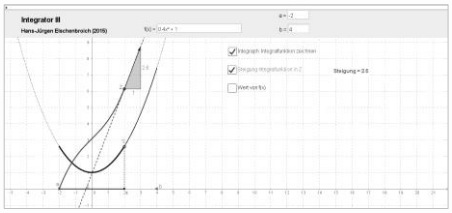
Integrator II: Integralfunktion wird ‚komplett' gezeichnet.

Ziel: *sukzessiver Aufbau* der Integralfunktion.
Integraph: Führstift S auf dem Graphen von f und Zeichenstift Z zum Zeichnen des Graphen von F.

Steigung der Integralfunktion? ➜ HDI.

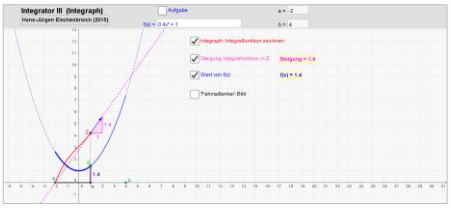
5.5 Der digitale Integrator III

- **Integrator III: Integraph**



5.6 Die Entdeckung des HDI

- **F'(x) = f(x)**



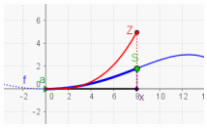
5.6 Der digitale Integrator III

- **InteGRAPH**

Zeichnet Integral- bzw. Stammfunktionen auch bei solchen Funktionen f , bei denen dies wegen Stetigkeit existieren muss, ohne dass man via HDI einen Stammfunktionsterm angeben könnte.

Z. B. $f(x) = 3 \sin(0.01x^2)$.

Da ist (mindestens in der Schule) ein blinder Fleck!



5.7 Freifallturm

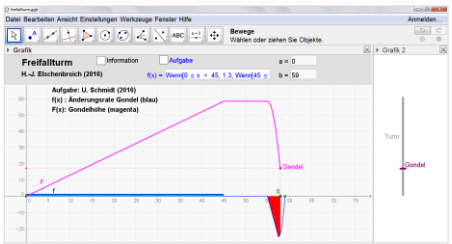
- Freifallturm ‚The High Fall' im Movie Park Germany:
- Höhe 61 m, 45 s hochziehen mit 1,3 m/s.
- Oben 10 s stehen.
- Freier Fall 2,5 s, dann bremsen.





5.7 Freifallturm

- **Höhe als Integralfunktion**



5.8 Rotationsvolumen

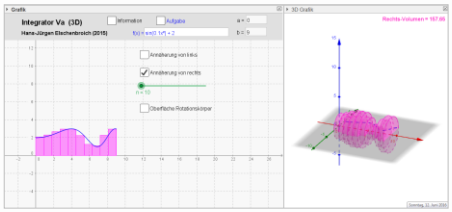
(Zu?) schneller Übergang von der Randfunktion f zur Integration von $g(x) = \pi \cdot f^2(x)$ und zur Anwendung von Regeln zur Bestimmung einer Stammfunktion von g.

Der Schritt der Annäherung durch Unter- und Obersummen mit Zylindern (anschaulich: ‚Scheiben') dann meist schnell übergangen.

Mit dynamischer Software kann man diesen Weg jetzt direkt gehen und die Rechenarbeit der Software übertragen.

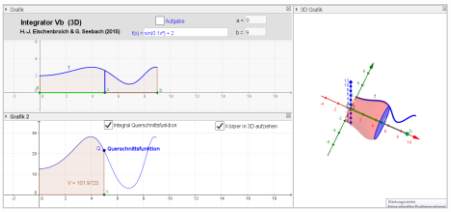
5.7 Rotationsvolumen

- **Rotation von f um die x-Achse**



5.9 Querschnitte und Rotationskörper

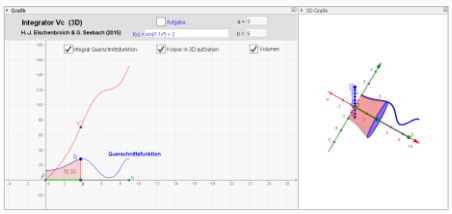
- **Querschnitt orthogonal zur x-Achse**



Buchholtz, N., Behrens, D. (2016): GeoGebra-Einsatz im Analysis-Unterricht. Ausbildung von Grundvorstellungen mit GeoGebra unterstützen. Workshop LI-MINT Tagung Hamburg, 16.2.2016

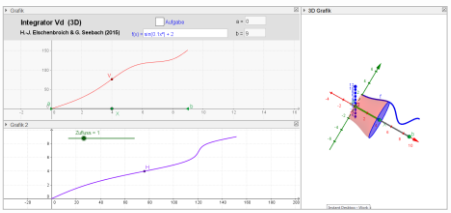
5.10 Querschnitte und Volumen

- **Volumen als Integralfunktion**



5.11 Füllhöhenkurve

- **Füllhöhe**



5.12 Grundvorstellungen Integralrechnung

- Unter- und Obersumme, Integral
- Integralfunktion
- Volumen

6.1 Wachstum

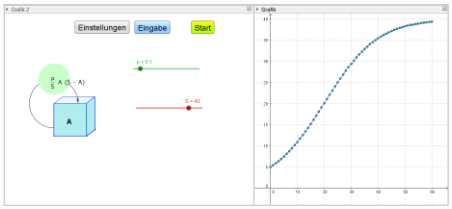
Häufiger Ansatz:
Funktionsterm für den Bestand herleiten.
Differenzialgleichungen lösen!
Logistische Funktion

Anderer Ansatz: Änderungsraten.
Stella, Dynasys. Typische Flow-Chart Diagramme.
Hat sich im Mathematik-Unterricht nicht eingebürgert.

Die Thematik Wachstum und dynamische Systeme ist aber extrem wichtig.

6.2 Kumulator

- **kumulativ den Bestand berechnen**



Erscheint in: *mathematik lehren 199*,
Elschenbroich/ Seebach: Modellieren mit dem KUMULATOR

Grundideen

• **Funktionenlupe**

Vom Punkt A auf dem Graphen von f über die drei Punkte A_l, A und A_r graphisch zu Steigung, Ableitung, Krümmung und Approximation. Graphischer Zugang zur Ableitungsfunktion als Ortslinie.

• **Integrator**

Über direkt berechnete Unter- und Obersummen zum Integral[f,a,x] mit $x \in [a;b]$ und graphisch zur Integralfunktion als Ortslinie und dann anschaulich zum HDI.

Grundideen

• **Kumulator**

Graphischer Zugang zu Wachstumsfunktionen.

Kumulative schrittweise Berechnung.

Änderungsrate statt Funktionsterm.

• **Generell**

Kalkülfreie graphische Zugänge (für Schüler) möglich, weil wir GeoGebra als Rechenknecht und Visualisierer nutzen.

Fazit

Dynamische Software wie GeoGebra mit mächtigen Befehlen, Schiebereglern und Ortslinien eignet sich bestens für anschauliche und dynamische Zugänge zu Funktionen, insbesondere in Form von Lernumgebungen.

Dies fördert den Aufbau von Verständnis und ermöglicht entdeckende Zugänge in Schülerhand.

Literatur

Elschenbroich, H.-J. (2016): Anschauliche Zugänge zur Analysis mit alten und neuen Werkzeugen. In: MU 1/ 2016

Elschenbroich, H.-J. (2016): Digitale Werkzeuge im Analysisunterricht. In: Blum/ Vogel/ Drüke-Noe/ Roppelt (Hrsg.): Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II. IQB. Westermann Bildungshaus Schulbuchverlage, Braunschweig.

Elschenbroich, H.-J. (2015): Anschauliche Differenzialrechnung mit der Funktionenlupe. In: MNU 5/ 2015

Elschenbroich, H.-J. & Seebach, G. & Schmidt, R. (2014): Die digitale Funktionenlupe. mathematik lehren 187

Elschenbroich, H.-J. & Seebach, G. (2014): Funktionen unter der Lupe. MatheWelt 187

Elschenbroich, H.-J. (2010): Ein dynamischer Zugang zu Geometrie und Funktionen. In: Praxis der Mathematik, Heft 34

Elschenbroich, H.-J. (2003): Ein dynamischer Zugang zu Funktionen und Gleichungen. In: MNU 56/8

Literatur

Gutzmer, A. (1908): Bericht betreffend den Unterricht in der Mathematik an den neunklassigen höheren Lehranstalten. Reformvorschläge von Meran. Nachdruck in: Der Mathematikunterricht 26 (1980) Nr. 6, 53 - 62

Malle, G. (2000): Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. In: mathematik lehren 103

Schmidt, U. (2016): Von der Änderungsrate zum Bestand. In: Blum/ Vogel/ Drüke-Noe/ Roppelt (Hrsg.): Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II. IQB. Westermann Bildungshaus Schulbuchverlage, Braunschweig.