Macam-Macam Transformasi Geometri, Sifat & Contoh Soal



Gambar 1 Pemandangan Pohon Cemara di Tepi Danau

Yuk, kita belajar bersama mengenai konsep transformasi geometri, jenis-jenis, sifat, hingga contoh soalnya supaya kamu semakin paham! Simak sampai habis materi ini, ya.

Apa yang terlintas dipikiran kalian kalau terdengar kata transformasi?

Wah pasti bervariasi banget deh!

Ada yang langsung kepikiran film transformers atau mungkin lagi mikirin transformasi ulat menjadi kupu-kupu, tapi pernah nggak sih kamu ngeliat **pemandangan di tepi danau**?

Secara nggak sadar, kedua hal tadi berhubungan dengan materi yang kita bahas kali ini. Contohnya, ada **pohon cemara** yang berdiri tenang di tepi **sungai atau danau**. Airnya begitu jernih dan tenang, sampai-sampai **bayangan pohonnya terlihat jelas banget di permukaan air**.

Keliatan kayak kembarannya ya? Tapi yang satu nyata, yang satu cuma pantulan.

Kalau kamu amati, bentuk pohonnya sama persis cuma arahnya kebalik.

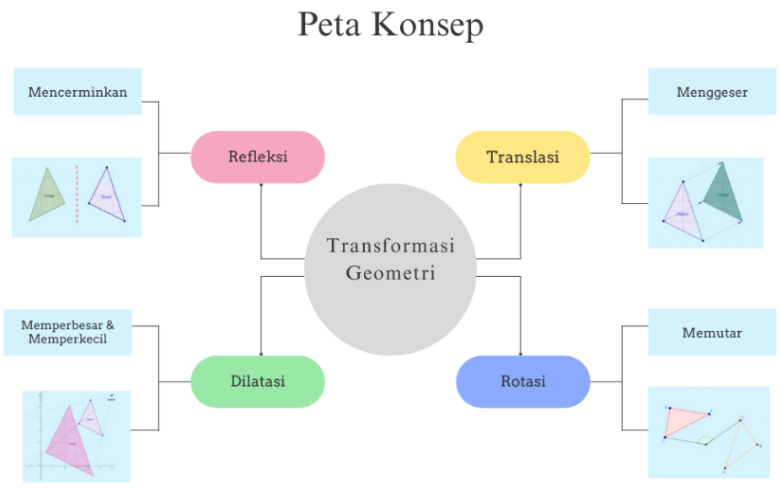
Nah, dari kedua hal itu kita bisa tau deh **arti dari transformasi, yaitu perubahan** (bisa perubahan posisi atau ukuran ya). Terus, arti geometri apa dong? **Geometri itu sesuatu yang berhubungan sama titik, garis atau bidang**.

Pengertian Transformasi Geometri

Menurut KBBI, pengertian transformasi geometri disusun berdasarkan dua kata pembentuknya yaitu transformasi dan geometri. Transformasi artinya adalah perubahan rupa (bentuk, sifat, fungsi dan sebagainya) bisa juga perubahan struktur gramatikal lain dengan menambah mengurangi atau menata kembali unsur-unsurnya. Sedangkan arti geometri adalah ilmu ukur dalam cabang matematika yang menjelaskan sifat-sifat garis, sudut, bidang hingga ruang.

Jadi, bisa disimpulkan nih bahwa **transformasi geometri adalah suatu perubahan posisi atau ukuran pada titik, garis atau bidang**. Misalnya, posisi awal (x,y) ketika mengalami transformasi posisinya menjadi **(x',y')**.

Nah, sekarang setelah mengetahui pengertian transformasi geometri, selanjutnya kita akan menjelaskan mengenai jenis-jenis transformasi geometri, berikut ini:



Gambar 2 Peta Konsep Transformasi Geometri

Jenis-Jenis Transformasi Geometri

1.) Refleksi (Perncerminan)

Jenis transformasi geometri yang pertama adalah refleksi.



Gambar 3 Contoh Refleksi

Coba kamu perhatikan bayangan pepohonan atau langit di permukaan air itu. Bentuknya sama, tapi posisinya terbalik, kan? Nah, itu adalah contoh alami dari refleksi. Kalau dalam kehidupan sehari-hari kita bisa melihat refleksi di cermin, dalam matematika pun ada konsep yang sama. Bedanya, refleksi di matematika bukan cuma ngaca, tapi memindahkan suatu objek ke sisi lain dari suatu garis, seperti sumbu X, sumbu Y, atau garis lain tertentu. Dalam matematika, refleksi itu seperti membalik objek terhadap sebuah garis seolah-olah garis tersebut adalah cermin.

Refleksi terhadap sumbu x dan y adalah dua jenis transformasi geometri yang memantulkan titik atau bangun geometri terhadap sumbu x atau sumbu y. Perbedaan utama terletak pada koordinat yang berubah. Saat dicerminkan terhadap sumbu x, koordinat x tetap sama, sedangkan koordinat y berubah tandanya (dari positif menjadi negatif atau sebaliknya). Sementara itu, saat dicerminkan terhadap sumbu y, koordinat y tetap sama, sedangkan koordinat x berubah tandanya.

Jadi refleksi adalah transformasi yang memindahkan setiap titik dari suatu objek ke posisi lain yang simetris terhadap suatu garis, yang disebut sumbu pencerminan. Dengan bentuk dan ukuran objek tetap sama persis tetapi posisinya “berbalik” seperti dicermin.

Rumus Refleksi

Berikut adalah rumus refleksi yang umum digunakan dalam koordinat kartesius :

1. Terhadap sumbu $x : (x, y) \rightarrow (x, -y)$
2. Terhadap sumbu $y : (x, y) \rightarrow (-x, y)$
3. Terhadap titik asal $O(0,0) : (x, y) \rightarrow (-x, -y)$
4. Terhadap garis $y = x : (x, y) \rightarrow (y, x)$
5. Terhadap garis $y = -x : (x, y) \rightarrow (-y, -x)$
6. Terhadap garis $y = h : (x, y) \rightarrow (x, 2h - y)$
7. Terhadap garis $x = h : (x, y) \rightarrow (2h - x, y)$

Contoh Soal

Diketahui sebuah segiempat ABCD dengan koordinat: A(6, -1), B(8, -1), C(8, -3), dan D(6, -3). Segiempat ini direfleksikan terhadap sumbu y. Tentukan koordinat bayangan A', B', C', dan D' setelah refleksi.

Penyelesaian :

Refleksi terhadap sumbu Y artinya: $(x, y) \rightarrow (-x, y)$

Hitung setiap koordinat bayangan:

1. Koordinat $A' : A(6, -1) \rightarrow A'(-6, -1)$
2. Koordinat $B' : B(8, -1) \rightarrow B'(-8, -1)$
3. Koordinat $C' : C(8, -3) \rightarrow C'(-8, -3)$
4. Koordinat $D' : D(6, -3) \rightarrow D'(-6, -3)$

Jadi koordinat bayangan setelah direfleksi adalah : $A'(-6, -1)$, $B'(-8, -1)$, $C'(-8, -3)$, dan $D'(-6, -3)$

2.) Translasi (Pergeseran)

Jenis transformasi selanjutnya ada translasi yaitu pergeseran.



Gambar 4 Contoh translasi

Coba kamu perhatikan gambar tersebut! Bentuk dan ukuran sama, tetapi bendanya berpindah tempat. Nah, itu adalah contoh alami dari translasi. Translasi adalah salah satu jenis transformasi geometri yang berarti pergeseran suatu objek pada bidang dengan arah dan jarak tertentu yang sama. Dalam translasi, setiap titik pada suatu bangun dipindahkan sejauh vektor tertentu tanpa mengubah bentuk, ukuran, maupun orientasi bangun tersebut. Dengan melihat bentuk dan ukuran bangun tidak berubah, posisi bangun berubah (bergeser), tidak ada rotasi atau pembalikan pada bangun, setiap titik berpindah dengan jarak dan arah yang sama dapat dipastikan bangun tersebut bertranslasi.

Notasi Translasi

Notasi umum untuk translasi adalah T(a, b), di mana "a" menyatakan pergeseran ke arah horizontal (kanan jika positif, kiri jika negatif), dan "b" menyatakan pergeseran ke arah vertikal (atas jika positif, bawah jika negatif).

Sifat-Sifat Translasi

Berdasarkan pengertian di atas, secara tidak langsung kita dapat mengetahui sifat-sifat translasi pada sebuah bangun maupun benda. Sifat-sifat translasi dapat dijabarkan sebagai berikut:

1. Bayangan bersifat kongruen dengan benda asli.
2. Luas bayangan sama dengan luas benda asli.
3. Dua translasi atau lebih yang berangkai dapat diwakili oleh sebuah translasi.
4. Translasi memiliki arah dan besaran.
5. Komponen translasi dapat dilambangkan dengan (x/y).

Rumus Translasi

Jika titik A(x, y) ditranslasi oleh T(a, b), maka bayangannya A’ akan berada di: A’ = (x + a, y + b).

Contoh Soal

Terdapat papan catur berukuran 8x8 kotak. Jika kuda berada di posisi (1,2) dijalankan sesuai dengan gerakan kuda pada catur, di posisi mana saja yang dapat di tempati kuda tersebut?

***Penyelesaian**:*

Gerakan kuda dalam catur berbentuk huruf "L", yaitu 2 langkah ke arah vertikal dan 1 langkah ke arah horizontal atau 2 langkah kearah horizontal dan 1 langkah ke arah vertikal .Dari posisi (2,1), kita bisa menghitung semua posisi yang dapat dicapai kuda dalam satu langkah dengan rumus:

Posisi baru = (x ± 2, y ± 1) dan (x ± 1, y ± 2)

Diberikan posisi awal kuda adalah (2,1), berikut semua kemungkinan posisi:

1. (2 + 2, 1 + 1) = (4,2)
2. (2 + 2, 1 - 1) = (4,0) → tidak valid (karena 0 di luar papan)
3. (2 - 2, 1 + 1) = (0,2) → tidak valid
4. (2 - 2, 1 - 1) = (0,0) → tidak valid
5. (2 + 1, 1 + 2) = (3,3)
6. (2 + 1, 1 - 2) = (3,-1) → tidak valid
7. (2 - 1, 1 + 2) = (1,3)
8. (2 - 1, 1 - 2) = (1,-1) → tidak valid

Jadi, posisi valid yang bisa ditempati kuda dari (2,1) adalah posisi (4,2), (3,3), dan (1,3)

3.) Rotasi (Perputaran)



Gambar 5 Contoh Rotasi

Pernahkah kita memperhatikan bagaimana baling-baling kipas angin berputar dengan mulus dan konsisten saat dinyalakan? Gerakan itu bukan sekadar putaran biasa, melainkan contoh nyata dari konsep matematika yang disebut *rotasi geometri*. Rotasi adalah transformasi yang memutar suatu objek mengelilingi titik pusat tertentu dengan sudut dan arah tertentu tanpa mengubah bentuk atau ukuran objek tersebut. Pada kipas angin, baling-baling berputar 360° mengelilingi porosnya, yang menjadi pusat rotasi, menghasilkan aliran udara yang menyebar ke seluruh ruangan.

Menariknya, kipas angin vertikal bahkan memiliki dua sumbu rotasi: satu untuk memutar baling-baling dan satu lagi untuk mengayun dari kiri ke kanan, sehingga angin yang dihasilkan lebih merata. Dengan memahami rotasi pada kipas angin, kita tidak hanya belajar tentang gerak fisik, tetapi juga mengaplikasikan konsep matematika rotasi seperti sudut putar, arah putaran, dan titik pusat rotasi dalam benda sehari-hari yang sangat berguna ini.

Analisis Gambar Kipas Angin dalam Rotasi Geometri

Kipas angin adalah contoh nyata penerapan rotasi geometri, di mana baling-balingnya berputar mengelilingi poros sebagai titik pusat rotasi. Pada gambar kipas angin, kita dapat mengamati bagaimana setiap titik pada baling-baling berpindah posisi secara melingkar sesuai sudut dan arah putaran, namun bentuk dan ukuran baling-baling tetap terjaga.

Titik Pusat Rotasi

Poros tengah kipas angin pada gambar merupakan titik pusat rotasi (A, B). Semua titik pada baling-baling berputar mengelilingi titik ini, sehingga posisi awal titik (x, y) berubah menjadi posisi baru (x', y') setelah rotasi.

Sudut dan Arah Rotasi

Gambar kipas angin dapat dianalisis dengan sudut rotasi khas seperti 90°, 180°, atau 270°, yang umum digunakan dalam transformasi geometri. Misalnya, rotasi 90° berlawanan arah jarum jam mengubah koordinat titik sesuai rumus:

$(x,y)\rightarrow(x',y')=(-y+a+b,x-a+b)$

di mana (a, b) adalah koordinat pusat rotasi. Dengan rumus ini, kita dapat menentukan posisi titik-titik baling-baling setelah berputar.

Visualisasi Perpindahan Titik

Pada gambar, bayangkan sebuah titik di ujung bilah baling-baling dengan koordinat tertentu. Setelah rotasi, titik ini berpindah ke posisi baru yang dapat dihitung menggunakan rumus rotasi. Dengan demikian, gambar kipas angin menjadi alat visual yang efektif untuk memahami perpindahan titik akibat rotasi.

Hubungan dengan Fungsi Kipas Angin

Rotasi baling-baling pada gambar bukan hanya ilustrasi matematis, tetapi juga merepresentasikan gerak nyata yang menghasilkan aliran udara. Putaran baling-baling yang stabil dan seimbang menciptakan hembusan angin yang membantu pendinginan ruangan.

Kompleksitas Rotasi pada Kipas Angin Modern

Beberapa kipas angin vertikal memiliki dua sumbu rotasi: satu untuk memutar baling-baling dan satu lagi untuk mengayun badan kipas. Gambar kipas angin dapat memperlihatkan dua jenis rotasi ini, yang masing-masing dapat dianalisis secara matematis menggunakan konsep rotasi geometri dengan pusat dan sudut berbeda.

Dengan menganalisis gambar kipas angin melalui rumus dan konsep rotasi geometri, kita tidak hanya memahami perpindahan titik secara matematis, tetapi juga mengapresiasi bagaimana prinsip matematika ini diaplikasikan dalam alat sehari-hari yang sangat berguna. Pendekatan ini menghubungkan teori dan praktik secara visual dan intuitif, menjadikan pembelajaran rotasi lebih menarik dan relevan. Referensi rumus rotasi dan contoh soal terkait dapat ditemukan dalam materi transformasi geometri1, yang membantu memperkuat pemahaman tentang bagaimana rotasi bekerja pada objek seperti kipas angin.

Contoh Soal:

Sebuah titik ujung baling-baling kipas angin berada pada koordinat P(4,3) di bidang koordinat kartesius. Titik pusat rotasi kipas angin adalah poros di titik O(1,1). Jika baling-baling kipas angin diputar berlawanan arah jarum jam sebesar 90°, tentukan koordinat bayangan titik *P'* setelah rotasi!

Penyelesaian

Diketahui:

- Titik awal P(x,y)=(4,3)
- Titik pusat rotasi O(a,b)=(1,1)
- Sudut rotasi θ=90∘ berlawanan arah jarum jam (positif)

Rumus rotasi 90° berlawanan arah jarum jam terhadap titik pusat (a,b)(*a*,*b*) adalah:

$(x',y')=(-(y-b)+a,(x-a)+b)$

⇔ Langkah 1: Hitung x'

$x'=-(y-b)+a=-(3-1)+1=-2+1=-1$

⇔ Langkah 2: Hitung y'

$y'=(x-a)+b=(4-1)+1=3+1=4$

Jadi, koordinat bayangan titik *P* setelah rotasi 90° berlawanan arah jarum jam terhadap titik pusat *O* adalah $P'(-1,4)$

Penjelasan

Rotasi ini menggambarkan bagaimana ujung baling-baling kipas angin berpindah posisi secara melingkar mengelilingi porosnya (titik pusat rotasi) tanpa mengubah bentuk atau ukuran baling-baling. Dengan memutar baling-baling sebesar 90°, titik awal berpindah ke posisi baru yang dapat dihitung dengan rumus rotasi geometri.

Soal ini menghubungkan konsep matematika rotasi dengan fenomena nyata pada kipas angin, sehingga memudahkan pemahaman dan aplikasi konsep rotasi dalam kehidupan sehari-hari.

4.) Dilatasi (Perbesar/Perkecil)

Jenis terakhir dari jenis-jenis transformasi geometri adalah dilatasi.



Gambar 6 Contoh Dilatasi

Biasanya saat listrik di rumah padam, terus kamu nyalain senter dan mengarahkan ke tangan, pasti ada bayangan yang terbentuk. Bayangannya berukuran lebih besar dari tangan kita normalnya.

Nah, tanpa disadari perilaku kita itu berkaitan dengan dilatasi, atau bisa dibilang tangan kita didilatasi. Wihh kedengarannya matematis banget tuh ya, hahaha!
Tau nggak sih? dilatasi itu jenis transformasi yang paling beda dari ketiga jenis transformasi lainnya. Hmm, kira-kira apa yang bikin beda, nih?

Dari segi definisi, *dilatasi* adalah transformasi yang mengubah ukuran suatu bentuk menjadi lebih besar atau lebih kecil. Kalau jenis transformasi sebelumnya kan yang berubah hanya posisinya, nah kalo hasil dari dilatasi posisi sama ukurannya yang berubah. Eits, tapi bentuknya tetap sama ya. Selanjutnya kita akan membahas tentang unsur-unsur dilatasi dan rumusnya.

Unsur-Unsur Dilatasi

Unsur dilatasi yang harus kamu perhatikan, ada 2 nih:

1. Pusat dilatasi atau titik acuan
   Kalau dari ilustrasi di awal tadi sih, senter itu adalah pusat dilatasinya.
2. Faktor skala biasa disimbolkan dengan k
   Maksudnya adalah faktor yang menyebabkan hasil dilatasi memperbesar atau memperkecil objek aslinya.

Rumus Dilatasi adalah sebagai berikut :

- Dilatasi dengan pusat (0, 0) dan faktor skala k: titik (x, y) menjadi (kx, ky)
- Dilatasi dengan pusat (a, b) dan faktor skala k: titik (x, y) menjadi (k(x - a) + a, k(y - b) + b)

Contoh Soal

Diketahui sebuah segiempat ABCD dengan koordinat : A(6,-1) B(8,-1) C(8,-3) D(6,-3). Segiempat ini mengalami dilatasi terhadap pusat (2,-2) dengan faktor skala k=1,2. Tentukan koordinat bayangan dari titik A',B',C' dan D' setelah dilatasi.

Penyelesaian :

Diketahui:

- Pusat dilatasi: (2, -2)
- Faktor skala: k = 1.2
- Titik-titik awal: A(6,-1) , B(8,-1) , C(8,-3), dan D(6, -3)
- Hitung setiap koordinat :
  Setelah dilatasi dengan faktor skala k = 1,2, koordinat hasil dilatasi dapat dihitung dengan rumus: $\boldsymbol{(x',y') = (x_p + k(x-x_p), (y_p + k(y-y_p))}$

1. Koordinat A'
   x'= 2+1.2(6-2) = 2 + 1.2(4) = 2 + 4.8 = 6.8
   y'= -2 + 1.2(-1 + 2) = -2 + 1.2(1) = -2 + 1.2 = -0.8
   Jadi, A'(6.8, -0.8)

2. Koordinat B'
   x' = 2 + 1.2(8 - 2) = 2 + 1.2(6) = 2 + 7.2 = 9.2
   y' = - 2 + 1.2(- 1 + 2) = - 2 + 1.2(1) = - 2 + 1.2 = -0.8
   Jadi, B'(9.2, -0.8)

3. Koordinat C'

   x' = 2 + 1.2(8 - 2) = 2 + 1.2(6) = 2 + 7.2 = 9.2

   y' = - 2 + 1.2(- 3 + 2) = - 2 + 1.2(- 1) = - 2 - 1.2 = -3.2

   Jadi, C'(9.2, -3.2)

4. Koordinat D'

   x' = 2 + 1.2(6 - 2) = 2 + 1.2(4) = 2 + 4.8 = 6.8

   y' = - 2 + 1.2(- 3 + 2) = - 2 + 1.2(- 1) = - 2 - 1.2 = -3.2

   Jadi D'(6.8,-3.2)

   Jadi, Koordinat bayangan setelah dihitung dengan rumus dilatasi diperoleh:

   A'(6.8, -0.8) , B'(9.2, -0.8) , C'(9.2, -3.2) , dan D'(6.8, -3.2)

Transformasi geometri merupakan konsep matematika yang penting dan memiliki banyak penerapan dalam kehidupan nyata. Transformasi seperti translasi (pergeseran), refleksi (pencerminan), rotasi (perputaran), dan dilatasi (perkalian skala) dapat ditemukan dalam berbagai situasi sehari-hari, seperti dalam pohon yang terlihat memantul di tepi sungai, lalu orang menggeser meja, perputaran kipas angin , dan sinar dari senter . Melalui pemahaman transformasi ini, kita dapat lebih mudah membaca pola, menciptakan desain simetris, serta menyelesaikan berbagai permasalahan spasial. Oleh karena itu, penguasaan konsep transformasi geometri tidak hanya penting dalam pelajaran matematika, tetapi juga sangat relevan dan bermanfaat dalam kehidupan nyata.

SUMBER REFRENSI

Carolina, G. (2022). *About Us: Zenius Education*. Retrieved from Zenius Education Web site: https://www.zenius.net/blog/transformasi-geometri/

Subchan, Winarni, & Muhamammad Syifa'ul, dkk. (2015). Matematika. In K. P. Kebudayaan, *Edisi Revisi Jakarta* (pp. 133-191). Jakarta: Pusat Kurikulum dan Pembukuan, Balitbang, Kemendikbud.

Subchan. Winarni. Mufid, M. S. (2018). *Matematika Transformasi Geometri.* Jakarta.