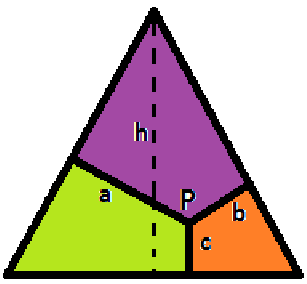
TEOREMA DE VIVIANI

Adriana Rabino

Fuentes: Pickover, Clifford "El libro de las matemáticas". 2009. Ed. Librero
www.uaq.mx – Alfinio Flores Peñafiel. "Extensiones del Teorema de Viviani para polígonos regulares". Arizona State University

Un surfista se encuentra viviendo en una isla con forma de triángulo equilátero. Quiere construir una cabaña de tal manera que las distancias a cada una de las costas sean mínimas, ya que le gusta surfear en las tres costas por igual. Se sorprenderá al ver que es indistinto el lugar donde construya su cabaña.

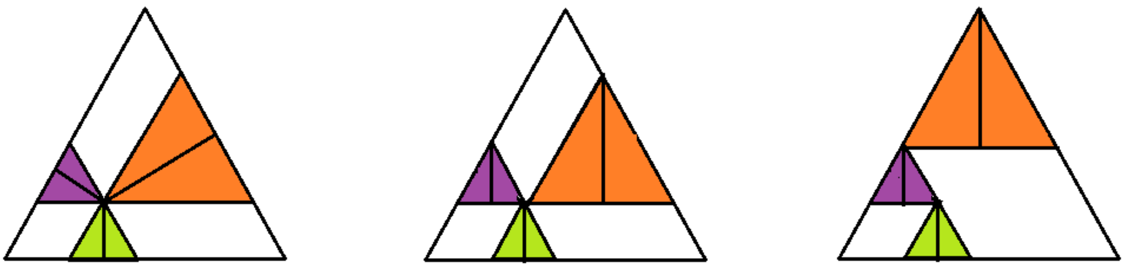
Desde cualquier punto interior de un triángulo equilátero, trazar los tres segmentos perpendiculares a cada lado del triángulo. Independientemente de dónde esté ubicado el punto, la suma de las distancias del punto a cada uno de los lados es constante e igual a la altura del triángulo.



$\boxed{a + b + c = h}$

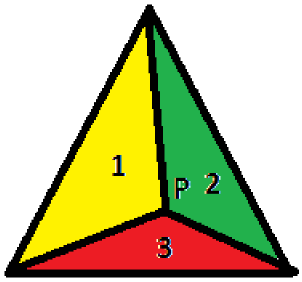
Este es el enunciado del **teorema** que se denomina de **Viviani** en honor al matemático y científico italiano Vincenzo Viviani, contemporáneo de Galileo Galilei (quien lo contrató como su colaborador por su talento).
¡A demostrarlo!

DEMOSTRACIÓN VISUAL



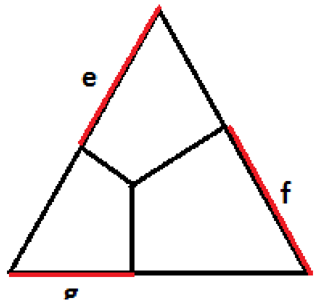
Explicar lo que se ve.

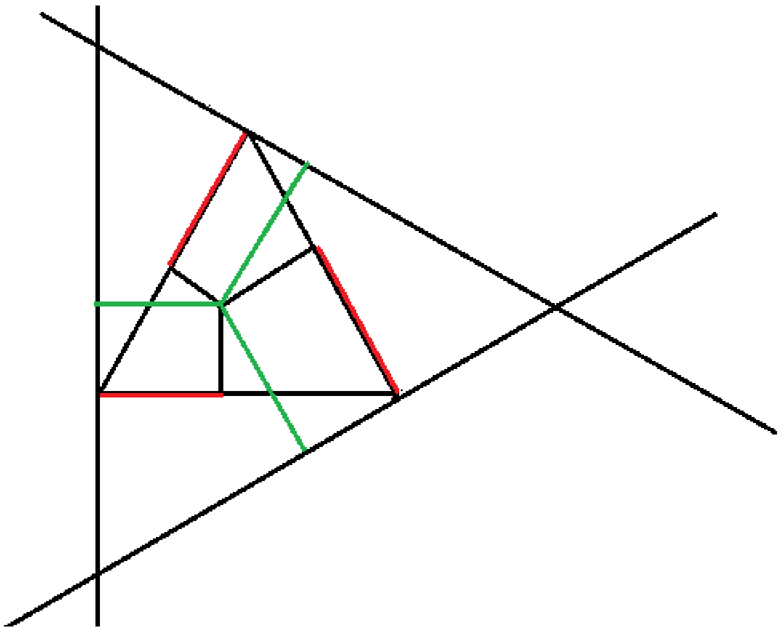
La **demostración** es muy sencilla. Unir el punto P con cada uno de los vértices del triángulo. Quedan determinados tres triángulos. Calcular sus áreas y compararlas con el área del triángulo original …y ya está!:



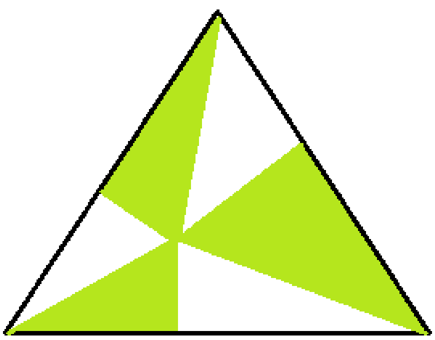
Sea *l* el lado del triángulo equilátero.
Área Δ1 = *l* . a/2
Área Δ2 = *l* . b/2
Área Δ3 = *l* . c/2
Si sumamos estas tres áreas nos da el área del triángulo original, que sería *l* . h/2, pero al plantear esta ecuación:
l . a/2 + *l* . b/2 + *l* . c/2 = *l* . h/2
y simplificando los 2 y los lados en ambos miembros de la ecuación concluimos que **a + b + c = h**, que es lo que queríamos demostrar.

Otra **propiedad** que se cumple es que *al trazar las perpendiculares a los lados desde un punto cualquier del interior del triángulo equilátero, la suma de los segmentos marcados sobre los lados es constante.*



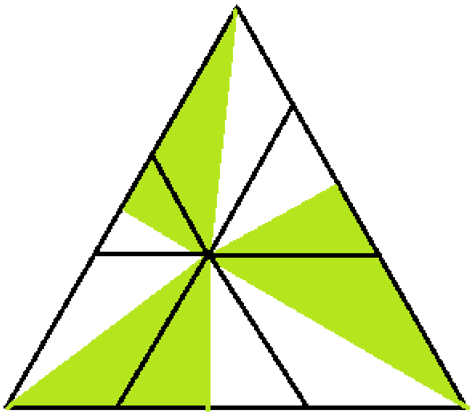


Para hacer esta demostración en forma geométrica, se construye una figura auxiliar. Trazar perpendiculares a cada uno de los lados del triángulo que pasen por cada uno de sus vértices, como muestra la figura. Queda conformado un nuevo triángulo equilátero (se conservan los ángulos de 60° ¿por qué?). Desde el punto interior trazar perpendiculares a cada uno de los lados del nuevo triángulo (segmentos verdes). La suma de estos segmentos es constante, por lo tanto también lo será la suma de los segmentos rojos (¿por qué? Ayuda: buscar paralelogramos…).



Otra **propiedad** que se puede analizar en esta misma situación es con respecto a las áreas. Ver *las áreas sombreadas, su suma equivale a la mitad del área del triángulo*

Para demostrar esta propiedad, dibujar triángulos equiláteros cuyas alturas sean las distancias desde el punto interior elegido hasta los lados. Quedan determinados triángulos equiláteros y paralelogramos en donde se puede visualizar que las partes sombreadas equivalen a la mitad de cada figura:

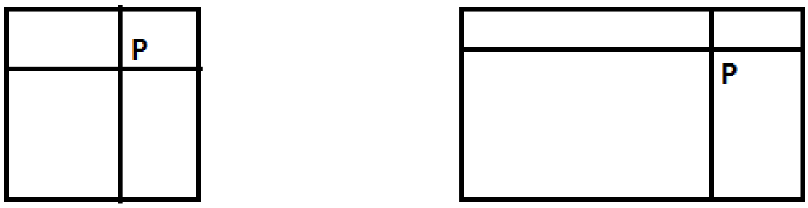


Pero, la visualización no alcanza para demostrar. Analizar los ángulos de cada figura para estar seguros de que se trata de paralelogramos. Luego, la diagonal de los mismos los dividen en dos partes iguales (lo mismo las alturas de los triángulos equiláteros).

¿SE CUMPLIRÁ ALGUNA DE ESTAS PROPIEDADES EN OTROS POLÍGONOS?

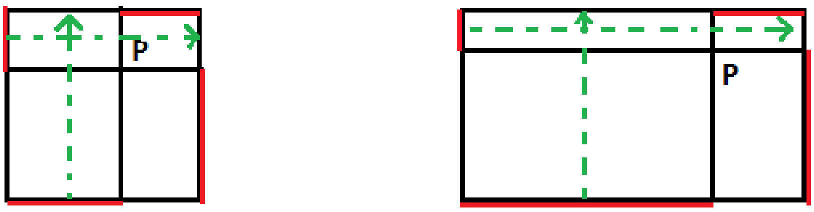
Empecemos el cuadrado y el rectángulo.

Busquemos un punto cualquiera P interior a cada una de las figuras y tracemos los segmentos perpendiculares a los lados.



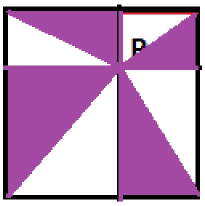
Al ser esos segmentos perpendiculares a los lados, cada uno resulta paralelo a otros dos lados, entonces claramente se puede verificar que la suma de las longitudes de los segmentos perpendiculares a es constante e igual a la suma de dos lados (desiguales en el caso del rectángulo) del cuadrado o del rectángulo. Con lo cual esta suma es igual al semiperímetro.

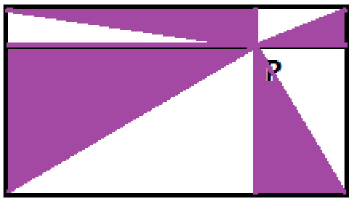
También se cumple que la suma de los segmentos marcados:



Es igual al semiperímetro (ver figura).

Y muy fácil de ver (porque quedan determinados rectángulos cortados por la diagonal) que el área de la zona sombreada es la mitad del área de cada figura:

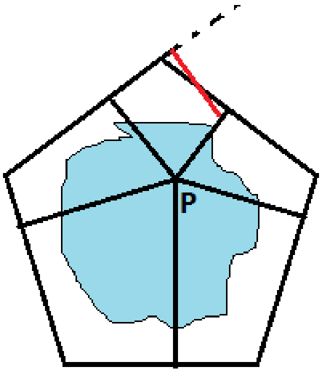




¿Se cumplirán estas propiedades en otras figuras poligonales? ¿Habrá alguna condición que deban tener los polígonos? ¿Surgirán otras propiedades?

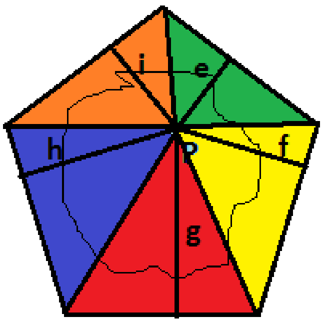
De hecho, las propiedades que veremos a continuación son extensiones del Teorema de Viviani y se pueden aplicar a **polígonos equiangulares o equiláteros.**

Podemos analizar lo que sucede en el pentágono regular y luego se podrá generalizar el procedimiento a otros polígonos.

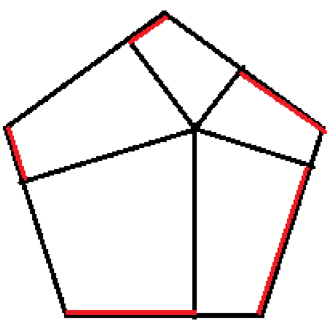


La suma de las distancias de P a cada uno de los lados del pentágono es constante e igual a 5a, donde a es la apotema del pentágono.
El punto P no puede ser cualquier punto interior, debe estar aproximadamente en la zona celeste, ya que fuera de esa zona, la intersección de los segmentos desde P a los lados puede quedar fuera de la figura.

La demostración de esta propiedad es similar a la efectuada con el triángulo equilátero.



Desde el punto P se trazan segmentos hacia los vértices. Quedan conformados los triángulos en colores que se ven en la figura. La suma de todas sus área es igual al área del pentágono, que es:
Perímetro.apotema/2, ó 5L.apotema/2.
Planteemos esta igualdad (siendo L el lado del pentágono):
L.e/2 + L.f/2 + L.g/2 + L.h/2 + L.i/2 = 5L . apotema/2
Simplificando los 2, sacando factor común L en el primer miembro de la igualdad y simplificándolo en ambos miembros queda que:
e + f + g + h + i = 5 apotema00
que es lo que se quería demostrar.



La suma de los segmentos marcados en los lados es constante.

Desde cada vértice se trazan segmentos perpendiculares a cada lado, de esta manera se forma otro pentágono regular dentro del anterior. Desde P se trazar las perpendiculares a los lados (azules). Se puede comprobar que estos segmentos con los rojos son lados opuestos de paralelogramos, o sea son congruentes.
Como la suma de los azules es constante, la suma de los rojos también lo es.