Nama: Robi'atul Adawiyah
NIM: 22301244039
Kelas: Pendidikan Matematika C 2022

Kalkulus

Materi Kalkulus mencakup di antaranya:

1. Fungsi (fungsi aljabar, trigonometri, eksponensial, logaritma, komposisi fungsi): definisi, kurva, dan sifat-sifatnya;

2. Limit Fungsi (mencakup semua jenis fungsi di atas): definisi limit kiri, limit kanan, limit, visualisasi limit;

3. Turunan Fungsi (mencakup semua jenis fungsi di atas): definisi, visualisasi dan kurva fungsi turunan, sifat-sifat, dan aplikasinya;

4Integral Tak Tentu (mencakup semua jenis fungsi di atas): definisi, kurva fungsi antiderivatif, sifat-sifat, dan rumus-rumus integral tak tentu;

5. Integral Tentu (mencakup semua jenis fungsi di atas): definisi, visualisasi, sifat-sifat, dan aplikasi integral tentu;

6.Barisan dan Deret: definisi, visualisasi, rumus deret berhingga, rumus deret tak hinga, limit barisan, kekonvergenan barisan dan deret, dan aplikasinya.

7.Fungsi multivariabel: definisi, grafik, turunan, integral, dan aplikasinya.

Fungsi Aljabar

```
Fungsi aljabar merupakah ekspresi aljabar menggunakan sejumlah suku
```

terbats yang melibatkan operasi aljabar seperrti penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, serta pangkat pecahan

```
Bentuk bentuk fungsi aljabar yaitu: fungsi polinom, fungsi
```

rasional,fungsi akar, fungsi ekponensial, fungsi logaritma, dll.

Contoh:

```
>function f(x) := 2*x^2+exp(sin(x)) // fungsi numerik
>f(0), f(1), f(pi)
```

```
1
4.31977682472
20.7392088022
```

Sifat sifat fungsi aljabar

1. Sifat Asosiatif

```
Suatu operasi hitung dikatakan memiliki sifat asosiatif ketika
```

bilangan bulat ditambahkan atau dikalikan hasilnya akan tetap sama terlepas dari bagaimana mereka dikelompokkan.

$$(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$$

atau

$$(f(x).g(x))h(x) = f(x)(g(x).h(x))$$

2. Sifat Distributif

Sifat distributif merupakan operasi hitung yang digunakan dengan cara mengombinasikan atau menggabungkan bilangan hasil operasi dengan elemen kombinasi yang ada.

$$(f(x) + g(x)).h(x) = f(x).h(x) + g(x).h(x)$$

3. Sifat Komutatif

Suatu operasi hitung dikatakan memiliki sifat komutatif jika letak bilangannya saling ditukarkan, akan tetap menghasilkan hasil yang sama meskipun bilangan itu merupakan bilangan positif maupun negatif.

$$a + b = b + a$$

atau

$$ab = ba$$

Menggambar kurva pada fungsi aljabar menggunakan EMT

Contoh soal:

1.

$$2x^2 - 3x - 1$$

```
>function f(x) &= (2*x^3 - 4*x + 1) // fungsi simbolik
```

$$2\,x^3 - 4\,x + 1$$

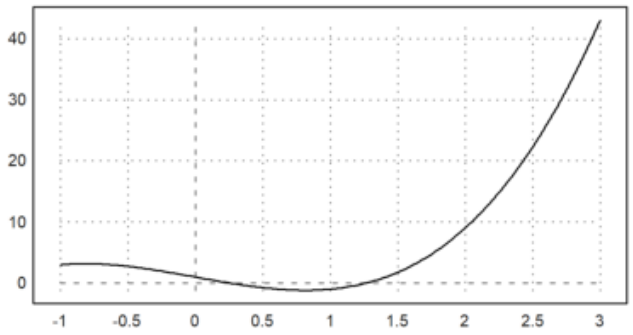
```
>function f(x) := (2*x^3 - 4*x + 1) // fungsi simbolik
>f(4)
```

```
  113
```

```
>f(-1:3)// nilai-nilai f(-1), f(0), ..., f(3):
```

```
  [3,  1,  -1,  9,  43]
```

```
>aspect(2); plot2d("f(x)",-1,3):
```



Fungsi Trigonometri

Dalam matematika, fungsi trigonometri merupakan fungsi real yang mengaitkan sudut dari segitiga bersiku dengan perbandingan antara dua sisi segitiga. Fungsi ini memiliki penerapan yang sangat luas dalam bidang sains terkait dengan geometri (misalnya navigasi, geodesi, mekanika benda langit, mekanika zat padat, dan cabang lainnya).

Ada beberapa fungsi trigonometri yang paling umum digunakan, yaitu:

sinus (sin) merupakan perbandingan panjang sisi sejajar terhadap panjang sisi miring.

$$sin(x)$$

cosinus (cos) merupakan perbandingan panjang sisi tegak lurus terhadap panjang sisi miring.

$$cos(x)$$

tangen (tan) merupakan panjang sisi sejajar terhadap panjang sisi tegak lurus.

$$tan(x)$$

cosecan (csc) merupakan nilai kebalikan dari (sin)

$$\frac{1}{sinx}$$

secan (sec), merupakan nilai kebalikan dari (cos)

$$\frac{1}{cosx}$$

cotangen (cot) merupakan nilai kebalikan dari tan

$$\frac{1}{tanx}$$

Sifat-Sifat Trigonometri

1. Penjumlhan sudut

```
   Penjumlahan sudut adalah kemampuan untuk mengekspresikan sin, cos,
```

dan fungsi trigonometri lainnya dari penjumlahan
dua sudut sebagai fungsi dari sin dan cos dari sudut-sudut asal. Terdapat beberapa rumus penjumlahan yang digunakan dalam trigonometri. Di antara rumus-rumus ini adalah:

```
>function f(x) &=trigexpand(sin(x+y)) // fungsi simbolik
```

$$\cos(x)\ \sin(y) + \sin(x)\ \cos(y)$$

```
>function g(x) &=trigexpand(cos(x+y)) // fungsi simbolik
```

$$\cos(x)\ \cos(y) - \sin(x)\ \sin(y)$$

```
>function g(x) &=trigexpand(tan (x-y)) // fungsi simbolik
```

$$\frac{\tan(x) - \tan(y)}{\tan(x)\ \tan(y) + 1}$$

2. Dua Kali Sudut

Dua kali sudut merupakan nilai fungsi trigonometri dari sudut 2x dimana x adalah sudut asal. contohnya:

```
>function f(x) &=trigexpand(sin(3*x)) // fungsi simbolik
```

$$3\ \cos^2(x)\ \sin(x) - \sin^3(x)$$

```
>function f(x) &=trigexpand(cos(3*x)) // fungsi simbolik
```

$$\cos^3(x) - 3\ \cos(x)\ \sin^2(x)$$

```
>function f(x) &=trigexpand(tan(3*x)) // fungsi simbolik
```

$$\frac{3\tan(x) - \tan^3(x)}{1 - 3\tan^2(x)}$$

3. Perkalian Sudut

Merupakan perhitungan nilai fungsi trigonometri dari hasil perkalian dua sudut tertentu dalam istilah fungsi trigonometri dari sudut asal.

```
>function f(x) &=trigexpand(sin(2*x)*sin(y)) // fungsi simbolik
```

$$2\cos(x)\sin(x)\sin(y)$$

```
>function f(x) &=trigexpand(cos(2*x)*cos(y)) // fungsi simbolik
```

$$(\cos^2(x) - \sin^2(x))\cos(y)$$

```
>function f(x) &=trigexpand(tan(2*x)*tan(y)) // fungsi simbolik
```

$$\frac{2\tan(x)\tan(y)}{1 - \tan^2(x)}$$

```
>function f(x) &=trigexpand(cos(2*x)*tan(y)) // fungsi simbolik
```

$$(\cos^2(x) - \sin^2(x))\tan(y)$$

4. Identitas Phytagoras

persamaan-persamaan yang menghubungkan fungsi trigonometri satu sama lain atau menggambarkan hubungan matematis antara fungsi trigonometri.Ini menggambarkan hubungan antara fungsi sin, cos, dan konstanta 1 dalam segitiga siku-siku.

```
>function f(x) &=trigexpand(cos(x)^3*tan(y^2)) // fungsi simbolik
```

```
   3         2
cos (x) tan(y )
```

Menggambar kurva fungsi trigonometri

Tentukan fungsi trigonometri dari

$$sin(x)$$

```
>function f(x) &= (sin(x)) // fungsi simbolik
```

```
sin(x)
```

```
>f(pi)
```

```
  0
```

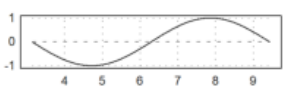
```
>f(5*pi)
```

```
  0
```

```
>f(pi:5pi)
```

```
  [0,  -0.841471,  -0.909297,  -0.14112,  0.756802,  0.958924,  0.279415,
  -0.656987,  -0.989358,  -0.412118,  0.544021,  0.99999,  0.536573]
```

```
>aspect(5); plot2d("f(x)",pi,3pi):
```



5.

$$tan(x)$$

```
>function g(x) &= trigexpand(tan(x)) // fungsi simbolik
```

```
tan(x)
```

```
>g(pi)
```

```
  0
```

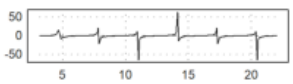
```
>g(1/2*pi)
```

```
  1.63312393532e+16
```

```
>g(pi:4pi)
```

```
  [0,  1.55741,  -2.18504,  -0.142547,  1.15782,  -3.38052,  -0.291006,
  0.871448,  -6.79971,  -0.452316]
```

```
>aspect(5); plot2d("g(x)",pi,7pi):
```



Fungsi Ekponensial

Fungsi eksponen adalah suatu fungsi yang memuat variabel di bagian pangkatnya
bentuk umum fzungsu ekponensial:

$$f(x) = a^x$$

dengan x>0 dan x tidak sama dengan 0

```
>function f(x) &= a^x // fungsi simbolik
```

```
   x
  a
```

Sifzat sifat ekponensial

1. penjumlahzan pangkat

```
>function f(x) &= a^x + a^y = a^(x+y) // fungsi simbolik
```

```
   y    x    y + x
  a  + a  = a
```

2. Pengurangan pangkat

```
>function f(x) &= a^x - a^y = a^(x-y) // fungsi simbolik
```

$$a^{x} - a^{y} = a^{x - y}$$

3.Perkalian pangkat

```
>function f(x) &= (a^x)^y = a^{xy} // fungsi simbolik
```

$$(a^{x})^{y} = a^{\{xy\}}$$

4.Perkalian bilangan yang dipangkatkan

```
>function f(x) &= (a*b) = a^x*b^x // fungsi simbolik
```

$$a^{x}\, b^{x} = (a\, b)^{x}$$

Menggambar Fzungsi Ekponensial

tentukan fzungsi ekponen berikut

$$10^{a}$$

```
>function f(a) &=10^a// fungsi simbolik
```

$$10^{a}$$

```
>f(-1)
```

```
  0.1
```

```
>f(6)
```

```
  1000000
```

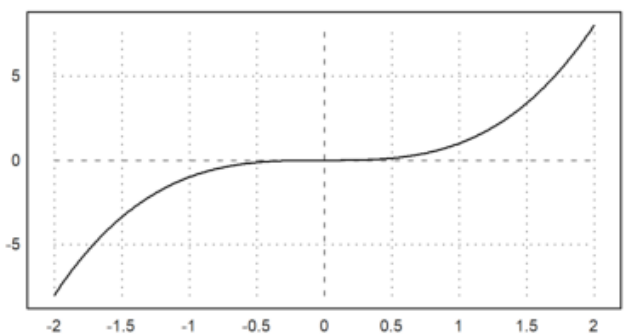
```
>f(0)
```

```
  1
  f
```

```
> f(-2:2) // nilai-nilai f(-2), f(-1), ..., f(2)
```

```
  [-8,  -1,  0,  1,  8]
```

```
>aspect(2); plot2d("f(x)",-2,2):
```



Fungsi Komposisi

```
  Fungsi komposisi merupakan operasi matematika yang menggabungkan
```

dua atau lebih fungsi untuk membentuk
fungsi baru. Dalam matematika, jika Anda memiliki dua fungsi, misalnya, f(x) dan g(x), maka fungsi komposisi dari kedua fungsi ini, yang biasanya dilambangkan sebagai (f°g)(x), didefinisikan sebagai berikut:

```
>function f(x) := 4*x+2 // fzungsi simbolik
>function g(x) := x^4 // fungsi simbolik
>function h(x) := f(g(x)) // definisi komposisi fungsi
>h(5) // sama dengan f(g(5))
```

```
  2502
```

Sifat-Sifat fungsi Komposisi

fzungsi komposisi memiliki sifat-sifat:

1. Tidak berlaku sifat komutatif,
(f°g)(x) tidak sama dengan (g°f)(x).
2. Berlaku sifat asosiatif,
(f°(g°h))(x) = ((f°g)°h)(x).
3. Adanya unsur identitas (I)(x)
(f°I)(x) = (I°f)(x) = f(x)

Menggambar kurva pada fungsi Komposisi

$$f(x) : x^3; g(x) : 2x + 2$$

Kita akan memvisualisasikan fungsi komposisi (f°g)(x), yang menggabungkan fungsi f(x) dan g(x).

```
>function f(x) := x^3 // fungsi simbolik
>function g(x):=2*x+2 //fungsi simbolik
>function h(x) := f(g(x)) // definisi komposisi fungsi
```

menentukan nilai x

```
>h(-2) // sama dengan f(g(-2)
```

```
  -8
```

```
>h(5) // sama dengan f(g(5))
```

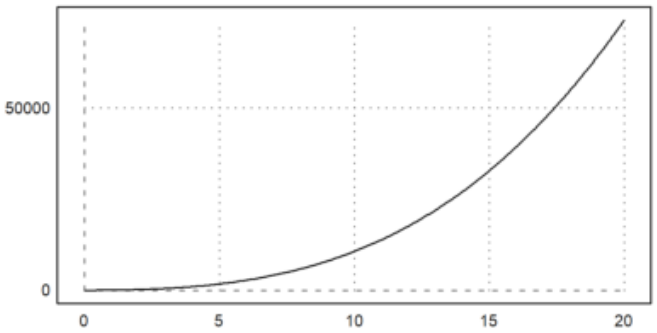
```
  1728
```

menentukan interval x,y untuk kurva 2d

```
>h(0:20) // nilai-nilai f(0), f(1), ..., f(20)
```

```
  [8,  64,  216,  512,  1000,  1728,  2744,  4096,  5832,  8000,  10648,
  13824,  17576,  21952,  27000,  32768,  39304,  46656,  54872,  64000,
  74088]
```

```
>aspect(2); plot2d("h(x)",0,20):
```



Limit

Limit adalah suatu batas yang menggunakan konsep pendekatan fungsi. Jadi, bisa dibilang limit adalah nilai yang didekati fungsi saat suatu titik mendekati nilai tertentu. Suatu fungsi dapat dikatakan memiliki limit apabila antara limit kiri dan limit kanan juga mempunyai besar nilai yang sama.Apabila limit kiri dan limit kanan tidak sama, maka nilai limitnya juga tidak akan

Limit adalah konsep dasar dalam kalkulus dan digunakan untuk menghitung turunan dan integral, serta untuk memahami perilaku fungsi matematika dalam berbagai konteks, seperti analisis matematika.

Dalam matematika, istilah "limit" merujuk pada konsep yang digunakan untuk mendefinisikan perilaku suatu fungsi saat variabel inputnya mendekati suatu nilai tertentu. Secara formal, limit dapat didefinisikan sebagai berikut:

Limit kanan

Limit kanan (right-hand limit) adalah salah satu jenis limit dalam matematika. Limit kanan dari suatu fungsi f(x) saat x mendekati nilai a dari arah kanan adalah limit yang didefinisikan ketika x mendekati a hanya dari sebelah kanan atau nilai yang lebih besar dari a. Ini dilambangkan sebagai:

lim (x->a+) f(x)

Dalam notasi ini, "a+" menunjukkan bahwa kita hanya mempertimbangkan nilai x yang lebih besar dari a. Untuk menghitung limit kanan, Anda mengamati perilaku fungsi saat x mendekati a dari arah kanan.

Secara formal, limit kanan didefinisikan sebagai berikut: Untuk setiap e (epsilon) yang positif, ada suatu d (delta) positif sehingga jika a < x < a + d, maka |f(x) - L| < e, di mana L adalah suatu bilangan yang merupakan limit kanan dari f(x) saat x mendekati a dari arah kanan.

Limit kanan sering digunakan dalam kalkulus untuk memahami sifat-sifat fungsi pada titik tertentu, terutama saat ada perubahan yang tajam dalam fungsi tersebut pada nilai a. Limit kanan adalah konsep yang penting dalam pemahaman perilaku fungsi matematika.

Limit Kiri

Limit kiri (left-hand limit) adalah konsep matematika yang merupakan kebalikan dari limit kanan. Limit kiri dari suatu fungsi f(x) saat x mendekati nilai a dari arah kiri adalah limit yang didefinisikan ketika x mendekati a hanya dari sebelah kiri atau nilai yang lebih kecil dari a. Ini dilambangkan sebagai:

lim (x ? a-) f(x)

Dalam notasi ini, "a-" menunjukkan bahwa kita hanya mempertimbangkan nilai x yang lebih kecil dari a. Untuk menghitung limit kiri, Anda mengamati perilaku fungsi saat x mendekati a dari arah kiri.

Secara formal, limit kiri didefinisikan sebagai berikut: Untuk setiap e (epsilon) yang positif, ada suatu d (delta) positif sehingga jika a - d < x < a, maka |f(x) - L| < e, di mana L adalah suatu bilangan yang merupakan limit kiri dari f(x) saat x mendekati a dari arah kiri.

Limit kiri dan limit kanan adalah konsep yang digunakan untuk memahami perilaku fungsi matematika pada titik tertentu, terutama saat ada perubahan yang tajam dalam fungsi tersebut pada nilai a. Kedua konsep ini adalah bagian penting dalam kalkulus dan analisis matematika.

Limit Fungsi Aljabar

```
limit fungsi aljabar memiliki konsep yang sama dengan materi limit
```

pada umumnya. Ini karena limit aljabar merupadan jenis limit yang dijadikan dasar atau pedoman umumnya limit.

Berikut contoh limit fungsi aljabar :

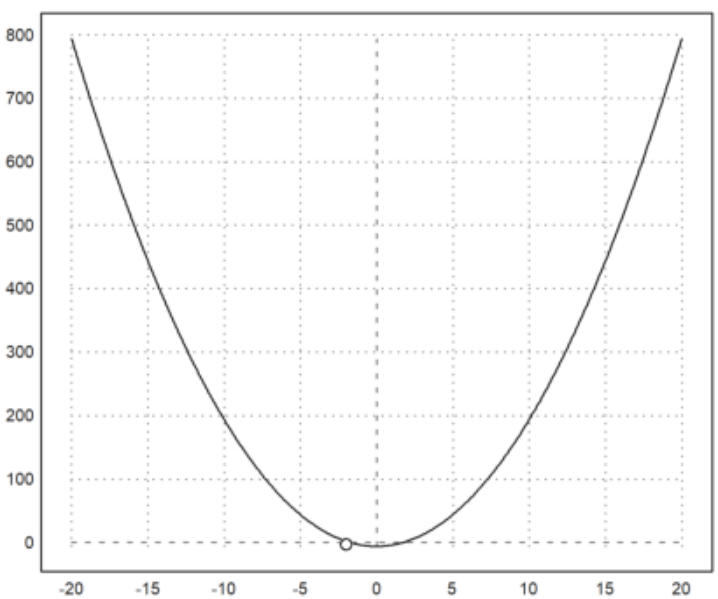
1.

$$\lim_{x \to -1} (2x^2 - 6)$$

```
>$showev('limit((2*x^2-6),x,4))
```

$$\lim_{x \to 4} 2\,x^2 - 6 = 26$$

```
>aspect(1.2); plot2d("(2*x^2-6)",-20,20); plot2d(-2,-3,>points,style="ow",>add):
```



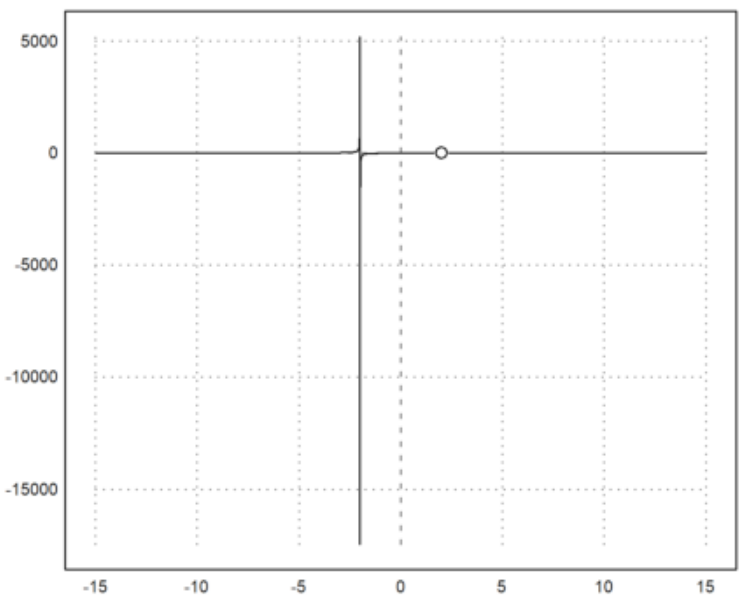
2.

$$\lim_{x\to 2}(\frac{3x-6}{x+2}$$

```
>$showev('limit(((3*x-6)/(x+2)),x,2))
```

$$\lim_{x\to 2}\frac{3\,x-6}{x+2}=0$$

```
>aspect(1.2); plot2d("((3*x-6)/(x+2))",-15,15); plot2d(2,4,>points,style="ow",>add):
```



Limit Fungsi Trigonometri

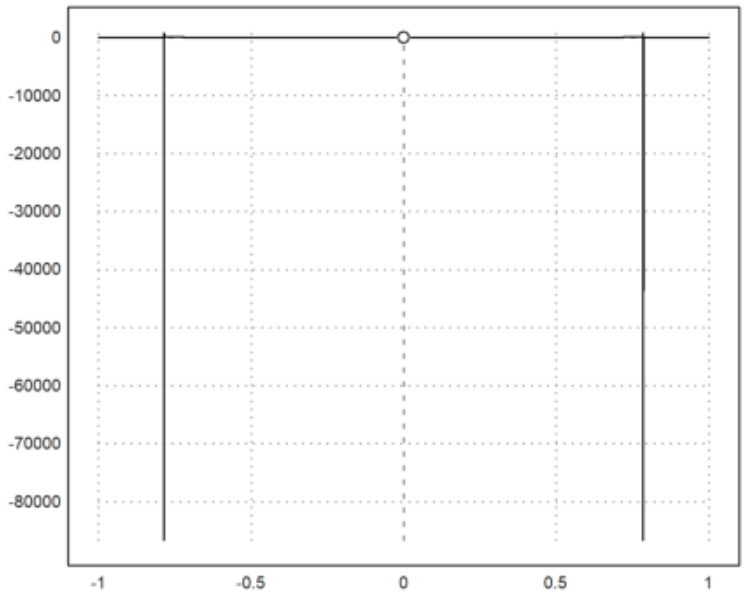
Limit yang fungsinya menggunakan atau mengandung fungsi trigonometri.
contoh:

$$\lim_{x\to 0}(\frac{tan2x}{4x})$$

```
>$limit(tan(2*x)/(4*x),x,0)
```

$$\frac{1}{2}$$

```
>plot2d("tan(2*x)/(4*x)",-1,1); plot2d(0,1,>points,style="ow",>add):
```



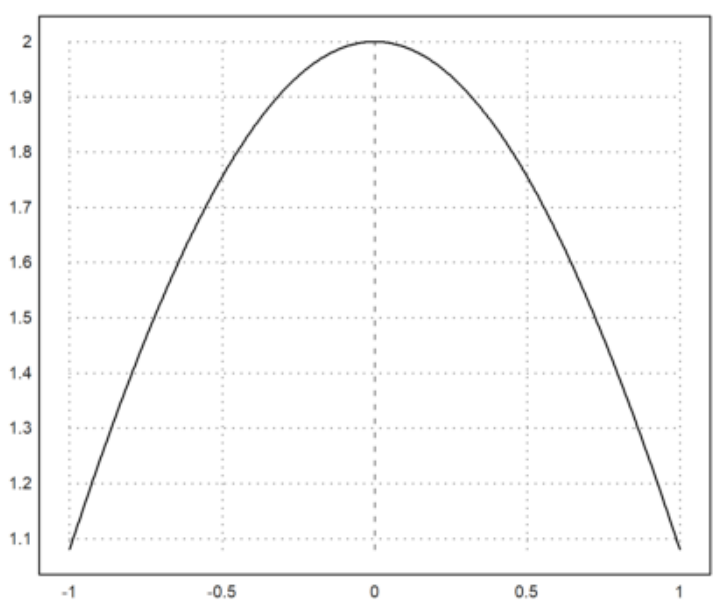
2.

$$\lim_{x\to 0}(\frac{sin2x}{sinx})$$

```
>$limit(sin(2*x)/(sin(x)),x,0)
```

2

```
>plot2d("sin(2*x)/(sin(x))",-1,1); plot2d(0,1,>points,style="ow",>add):
```



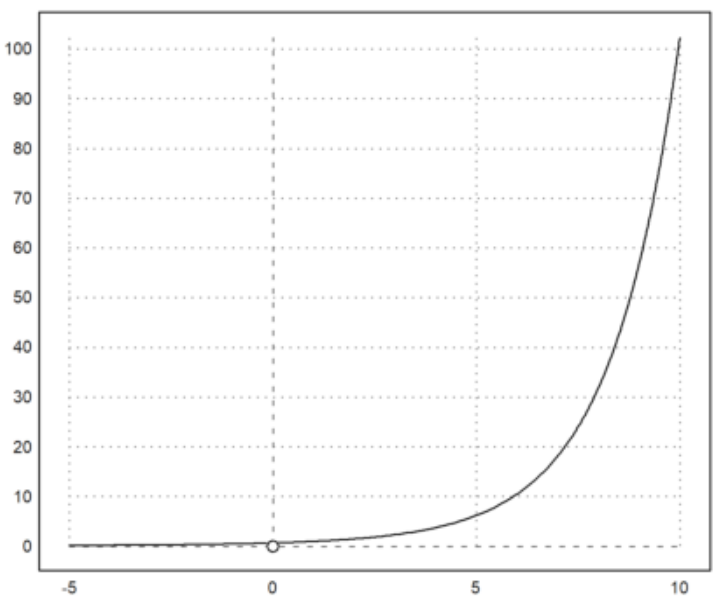
limit Eksponensial adalah limit yang melibatkan pangkat di dalamnya
contoh:
1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x}{2}(2^x - 1)$$

```
>$limit((4*x/2)*(2^x-1),x,0)
```

$$0$$

```
>plot2d("(1/x)*(2^x-1)",-5,10); plot2d(0,0,>points,style="ow",>add):
```



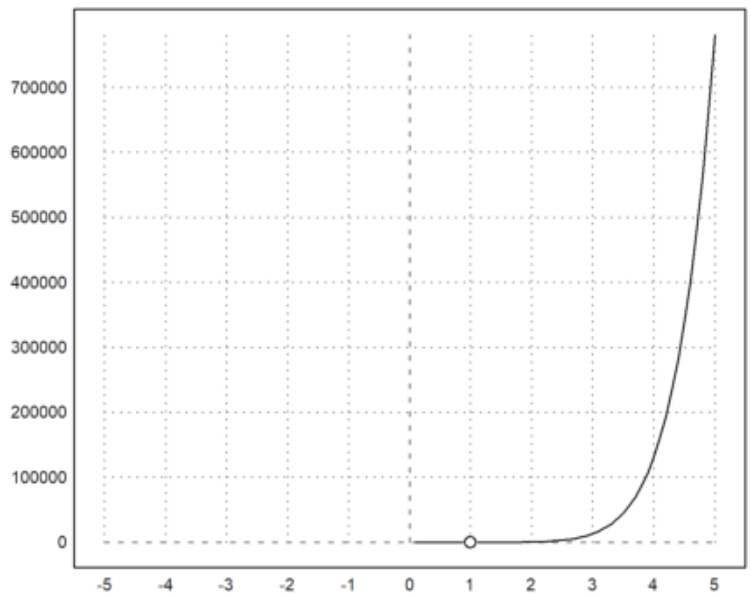
2

$$\lim_{x\to 1}(2x^8 - \sqrt{4x})$$

```
>$limit((2*x^8-sqrt(4*x)),x,1)
```

$$0$$

```
>plot2d("2*x^8-sqrt(4*x)",-5,5); plot2d(1,0,>points,style="ow",>add):
```



Limit Fungsi Logaritma

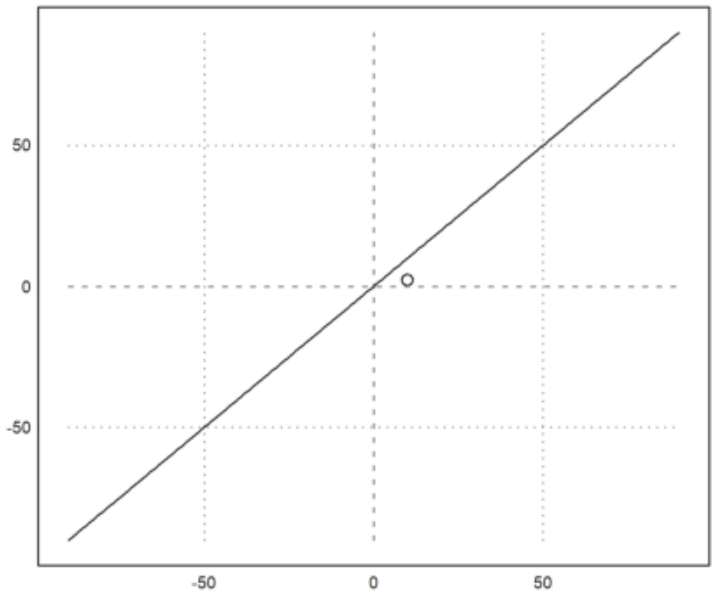
contoh

$$\lim_{x \to 0} \log 50x$$

```
>$limit(log(x),x,10)
```

$$\log 10$$

```
>plot2d("x",-90,90); plot2d(10,log(10),>points,style="ow",>add):
```



Limit Tak Hingga

secara umum jika ditemui permasalahan : l

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{px^2+qx+r})$$

maka akan menghasilkan nilai limit yakni :
1. a>p

$$\infty$$

2. a<p

$$-\infty$$

3. a=p

$$\frac{b-q}{2\sqrt{a}}$$

CONTOH 1 :

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{4x^2+6x+5-3x})$$

```
>$limit((sqrt(x^2+2*x-3))+(sqrt(4*x^2+6*x+5-3*x)),x,inf)
```

$$\infty$$

2.

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{2x^3-5}{4x^2+x+1})$$

```
>$limit((2*x^3-5)/(4*x^2+x+1),x,inf)
```

$$\infty$$

Turunan Fungsi

Dalam matematika, turunan fungsi adalah konsep yang mengukur perubahan laju pertumbuhan suatu fungsi terhadap perubahan variabel independennya. Dalam konteks fungsi matematika, turunan mengukur sejauh mana nilai fungsi berubah saat variabel inputnya berubah.

Turunan adalah pengukuran terhadap bagaimana fungsi berubah seiring
perubahan nilai yang dimasukan, atau secara umum turunan menunjukkan bagaimana suatu besaran berubah akibat perubahan besaran lainnya.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

```
>&showev('limit((sin(x+h)-sin(x))/h,h,0))//turunan sin(x)
```

```
                sin(x + h) - sin(x)
limit           ------------------- = cos(x)
h -> 0                  h
```

```
>$showev('limit(((x+h)^n-x^n)/h,h,0))// turunan x^n
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h} = n\,x^{n-1}$$

```
>$showev('limit((log(x+h)-log(x))/h,h,0)) // turunan log(x)
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h} = \frac{1}{x}$$

```
>$showev('limit((1/(x+h)-1/x)/h,h,0)) // turunan 1/x
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=-\frac{1}{x^2}$$

```
>$showev('limit((asin(x+h)-asin(x))/h,h,0)) // turunan arcsin(x)
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\arcsin(x+h)-\arcsin x}{h}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

```
>$showev('limit((tan(x+h)-tan(x))/h,h,0)) // turunan tan(x)
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan x}{h}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Sifat-Sifat Turunan Fungsi

1. Sifat Linear

Turunan dari jumlah atau selisih dua fungsi adalah jumlah atau selisih dari turunan-turunan fungsi-fungsi tersebut.

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$$

$$(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x)$$

2. Aturan Perkalian

Turunan dari perkalian dua fungsi adalah hasil dari turunan pertama dikalikan dengan fungsi kedua ditambah fungsi pertama dikalikan dengan turunan kedua.

$$(f(x).g(x))'=f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$$

3. Aturan Rantai(Chain Rule)

Aturan rantai digunakan ketika kita memiliki komposisi fungsi, yaitu suatu fungsi yang terdiri dari fungsi-fungsi lain. Aturan rantai mengatakan bahwa turunan dari fungsi komposisi adalah produk dari turunan-turunan fungsi-fungsi tersebut.

$$(f(g(x)))'=f'(g(x)).g'(x)$$

4. Turunan Konstanta

Turunan dari suatu konstanta adalah nol.

$$(c)'=0$$

5. Turunan Identitas
Turunan dari x terhadap x adalah 1.

$$(x)' = 1$$

6. Turunan dari x^n
Jika

$$f(x) = x^n,$$

dimana n adalah bilangan bulat positif,
maka

$$f'(x) = n.x^n - 1$$

7. Turunan Eksponensial
Turunan dari fungsi eksponensial, seperti

$$f(x) = e^x$$

adalah dirinya sendiri, yaitu

$$f'(x) = e^x$$

$$(e^x)' = e^x$$

8. Turunan Logaritma
Turunan dari logaritma alami, seperti

$$f(x) = ln(x)$$

adalah 1/x, yaitu

$$f'(x) = 1/x$$

$$(ln(x))' = 1/x$$

1. Tentukan turunan dari fungsi berikut

$$f(x) = 4x^2 + 8x - 1$$

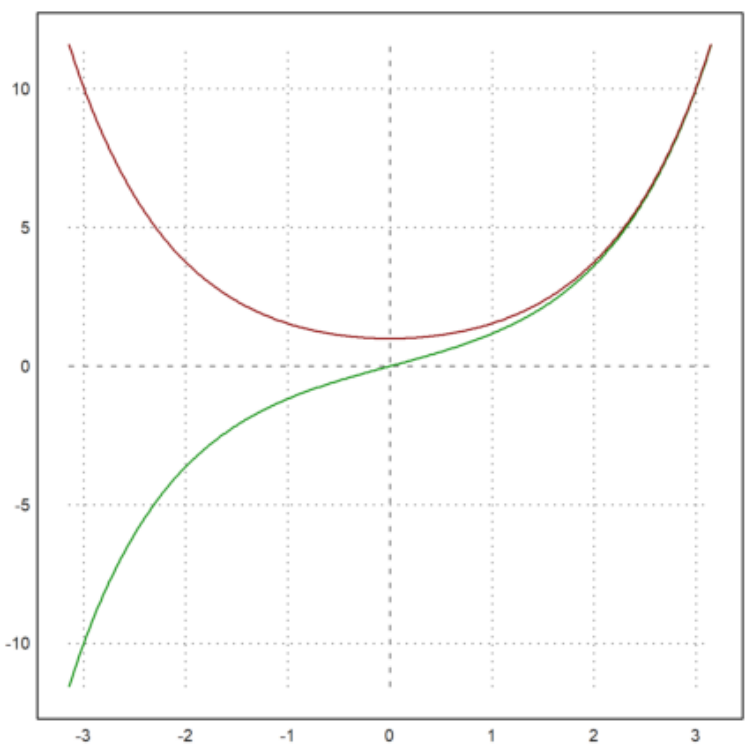
```
>function f(x) &= sinh(x) // definisikan f(x)=sinh(x)
```

$$\sinh(x)$$

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$\frac{e^{-x}\left(e^{2x}+1\right)}{2}$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[green,red]):
```



Definisi Integral Tak Tentu

Integral tak tentu (indefinite integral) adalah integral yang tidak

memiliki batas-batas nilai tertentu, sehingga hanya diperoleh fungsi umumnya saja disertai suatu konstanta C. Setiap bentuk operasi matematis pasti memiliki operasi kebalikan atau invers, seperti penjumlahan dan pengurangan, perkalian dan pembagian, akar dan pangkat. Kebalikan itu juga berlaku pada turunan, di mana kebalikan dari turunan adalah integral.

EMT dapat digunakan untuk menghitung integral, baik integral tak tentu maupun integral tentu. Untuk integral tak tentu (simbolik) sudah tentu EMT menggunakan Maxima,

Sifat-sifat Integral tak tentu

```
Dalam perhitungan, integral tak tentu memiliki sifat-sifat yang
```

dapat digunakan. Ada tiga sifat integral tak tentu yang dapat mempermudah perhitungan yaitu sebagai berikut:

1. sifat pangkat

$$\int x^n dx = \frac{x^(n+1)}{n+1} + C$$

2. Penjumlahan

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x) + g(x)dx$$

3. Pengurangan

$$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x) - g(x)dx$$

4. Konstanta

$$\int k, f(x)dx = k \int f(x)dx$$

Rumus Integral

$$\int x^n dx = \frac{x^(n+1)}{n+1} + C$$

Definisi Integral Tentu

```
Integral tentu (definite integral) adalah integral yang memiliki
```

batas-batas nilai tertentu, sehingga hasil akhirnya bisa ditentukan secara pasti. Batas-batas nilai itu merupakan nilai variabel dari fungsi yang telah diintegralkan. Dalam Matematika, integral tentu bisa dimanfaatkan untuk mencari luasan di bawah kurva, volume benda putar yang dibatasi oleh titik-titik tertentu, luas daerah yang dibatasi oleh kurva tertentu, dan masih banyak lainnya.

Perhitungan integral tentu EMT sudah menyediakan beberapa fungsi yang mengimplementasikan algoritma kuadratur (perhitungan integral tentu menggunakan metode numerik).

Rumus Integral Tentu

Berikut adalah rumus dari integral tentu yang perlu kamu tahu.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \quad \text{dengan } F'(x) = f(x).$$

Integral dari f(x) terhadap dx dari nilai a sampai dengan nilai b adalah F(b) dikurangi dengan F(a). Dengan begitu, F′(x) adalah turunan fungsi yang bernilai f(x). Hasil yang didapat dari rumus integral tentu adalah suatu angka yang pasti.

Sifat-sifat Integral Tentu

Berikut ini beberapa sifat integral tentu:

1.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

2

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx dengan a < b < c$$

3.

$$\int_a^b f(x)\,dx = int_a^b f(x),$$

berarti F(b)-F(a) = -(F(a)-F(b))

4.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 atau F(a) - F(a) = 0$$

5.

$$\int_a^b f(x)\,dx \pm g(x)dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

Visualisasi intergral tentu

```
>$showev('integrate(2/(2+x),x))
```

$$2\int \frac{1}{x+2}\,dx = 2\,\log\left(x+2\right)$$

```
>$showev('integrate(1/(1+x^2),x))
```

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x$$

```
>$showev('integrate(1/sqrt(1-x^2),x))
```

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$$

Kurva Fungsi devariatif

Kurva fungsi antiderivatif adalah grafik yang merepresentasikan fungsi antiderivatif dari suatu fungsi asal. Antiderivatif atau integral tak tentu dari suatu fungsi adalah fungsi yang turunannya sama dengan fungsi asal (kecuali konstanta).

Jadi, jika kita memiliki fungsi F(x) sebagai antiderivatif dari f(x)(dituliskan sebagai F'(x) = f(x)), maka kurva fungsi antiderivatif akan menunjukkan bagaimana nilai F(x) berubah seiring dengan perubahan nilai x . Ini mirip dengan kurva fungsi asalnya, tetapi dengan pergeseran vertikal yang mungkin disebabkan oleh konstanta integrasi.

Dengan kata lain, kurva fungsi antiderivatif memberikan gambaran tentang akumulasi nilai fungsi asal terhadap variabel independennya.

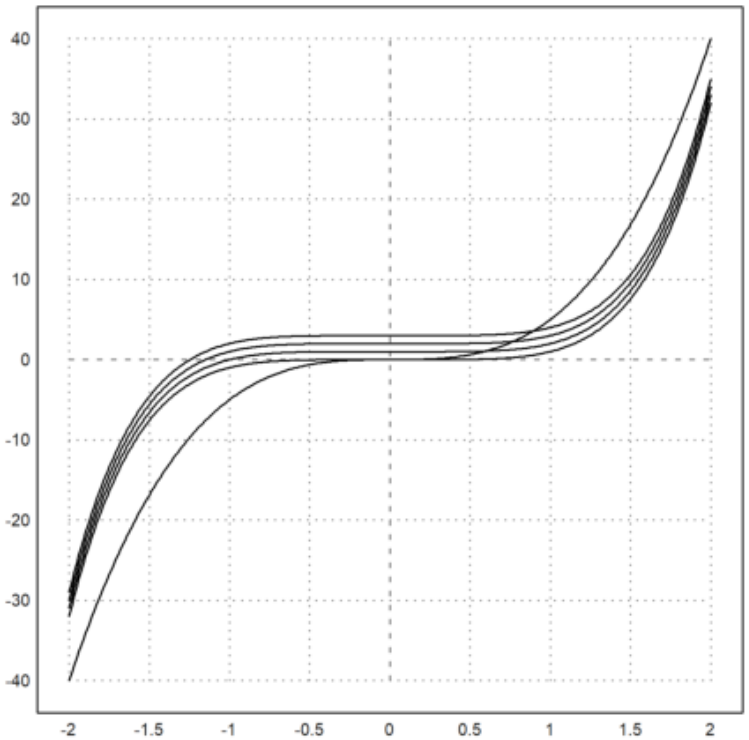
```
>$F(x)=('integrate(5*x^3,x))
```

$$F\left(x\right) = 5\int x^3\,dx$$

```
>$showev('integrate(5*x^3,x)+c)
```

$$5\int x^3\,dx + c = \frac{5\,x^4}{4} + c$$

```
>plot2d(["5*x^3","x^5","x^5+1","x^5+2","x^5+3"]):
```



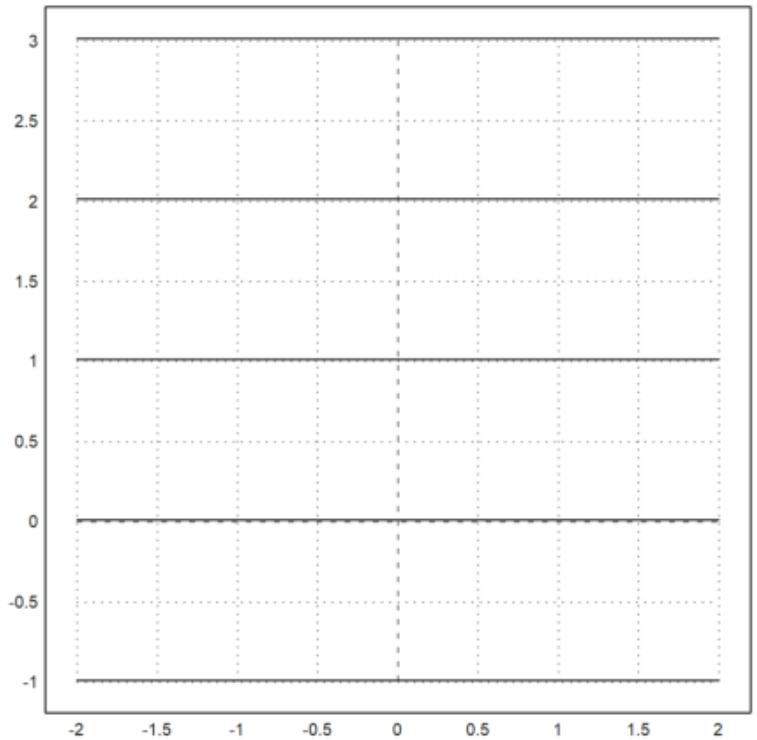

```
>$F(x)=('integrate(sin(30),x))
```

$$F\left(x\right)=\sin 30\,x$$

```
>$showev('integrate(sin(30),x)+c)
```

$$\sin 30\,x+c=\sin 30\,x+c$$

```
>plot2d(["sin(30)","sin(30)+1","sin(30)+2","sin(30)+3","sin(30)+4"]):
```



Aplikasi/penerapan Integral Tentu

1. Pada Bidang Matematika
Menentukan luas suatu bidang,
Menentukan volume benda putar,
Menentukan panjang busur

2. Pada Bidang Ekonomi
Mencari fungsi asal dari fungsi marginalnya (fungsi turunannya)
Mencari fungsi biaya total
Mencari fungsi penerimaan total dari fungsi penerimaan marginal
Mencari fungsi konsumsi dari fungsi konsumsi marginal,
Fungsi tabungan dari fungsi tabungan marginal
Fungsi kapital dari fungsi investasi

3. Pada Bidang Teknologi
Penggunaan laju tetesan minyak dari tangki untuk menentukan jumlah kebocoran selama selang waktu tertentu
Penggunaan kecepatan pesawat ulang alik Endeavour untuk menentukan ketinggian maksimum yang dicapai pada waktu tertentu
Memecahkan persoalan yang berkaitan dengan volume, panjang kurva, perkiraan populasi, keluaran kardiak, gaya pada bendungan, usaha, surplus konsumen

Definisi Barisan dan Deret

Secara umum, barisan adalah sebuah daftar bilangan yang mengurut dari kiri ke kanan. Setiap urutan bilangannya juga memiliki karakteristik atau pola tertentu. Setiap bilangan yang ada pada barisan merupakan suku dalam barisan itu sendiri.

Sementara itu, deret adalah penjumlahan suku-suku dari suatu barisan. Misalnya, terdapat barisan U1, U2, U3, U4, ….. Un, maka deret itu adalah U1 + U2 + U3 + U4 +….. Un. Oh iya, “U” itu artinya suku ya. Kalau Un berarti suku ke-n.

Barisan dapat didefinisikan dengan beberapa cara di dalam EMT, di antaranya:

- dengan cara yang sama seperti mendefinisikan vektor dengan elemen-elemen beraturan (menggunakan titik dua ":");
- menggunakan perintah "sequence" dan rumus barisan (suku ke -n);
- menggunakan perintah "iterate" atau "niterate";
- menggunakan fungsi Maxima "create_list" atau "makelist" untuk menghasilkan barisan simbolik;
- menggunakan fungsi biasa yang inputnya vektor atau barisan;
- menggunakan fungsi rekursif.

Operasi pada barisan dan deret

EMT menyediakan beberapa perintah (fungsi) terkait barisan, yakni:

- sum: menghitung jumlah semua elemen suatu barisan
- cumsum: jumlah kumulatif suatu barisan
- differences: selisih antar elemen-elemen berturutan

EMT juga dapat digunakan untuk menghitung jumlah deret berhingga maupun deret tak hingga, dengan menggunakan perintah (fungsi) "sum". Perhitungan dapat dilakukan secara numerik maupun simbolik dan eksak.

Contoh Perhitungan Barisan dan Deret

```
>1:100 // barisan kompleks
```

```
  [1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10,  11,  12,  13,  14,  15,  16,
  17,  18,  19,  20,  21,  22,  23,  24,  25,  26,  27,  28,  29,  30,
  31,  32,  33,  34,  35,  36,  37,  38,  39,  40,  41,  42,  43,  44,
  45,  46,  47,  48,  49,  50,  51,  52,  53,  54,  55,  56,  57,  58,
  59,  60,  61,  62,  63,  64,  65,  66,  67,  68,  69,  70,  71,  72,
  73,  74,  75,  76,  77,  78,  79,  80,  81,  82,  83,  84,  85,  86,
  87,  88,  89,  90,  91,  92,  93,  94,  95,  96,  97,  98,  99,  100]
```

```
>1:50 // barisan sederhana
```

```
  [1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10,  11,  12,  13,  14,  15,  16,
  17,  18,  19,  20,  21,  22,  23,  24,  25,  26,  27,  28,  29,  30,
  31,  32,  33,  34,  35,  36,  37,  38,  39,  40,  41,  42,  43,  44,
  45,  46,  47,  48,  49,  50]
```

```
>sum(5:10:50), sum(1/(5:10:50))
```

```
  125
  0.35746031746
```

Definisi Limit barisan

Dalam matematika, limit barisan adalah nilai yang didekati oleh suku-suku barisan ketika nomor urut suku-sukunya semakin membesar. Limit barisan seringkali dilambangkan dengan

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

Jika suatu barisan mempunyai limit, barisan itu disebut konvergen. Barisan yang tidak konvergen disebut divergen.Limit barisan dikatakan sebagai gagasan landasan seluruh analisis matematika.

Limit dapat ditentukan pada ruang metrik atau ruang topologi, tetapi biasanya pertama kali ditemukan dalam bilangan real.

Kekonvergenan suatu barisan dan deret

Suatu barisan disebut konvergen jika terdapat bilangan Z yang setiap lingkungannya memuat semua. Jika bilangan Z itu ada maka dapat ditulis: sehingga dapat dikatakan bahwa barisan itu konvergen ke limit Z, atau Z adalah limit dari {zn}. Apabila suatu barisan tidak konvergen maka dinamakan divergen.z

Definisi Deret Tak berhingga

Deret tak berhingga (atau deret tak hingga) adalah konsep matematika yang mengacu pada jumlah tak terhingga dari suku-suku dalam sebuah barisan atau urutan yang tak berhingga. Secara formal, deret tak berhingga didefinisikan sebagai jumlah dari suku-suku dalam barisan tak berhingga. Deret ini umumnya dinyatakan dalam bentuk berikut:

S = a_1 + a_2 + a_3 + ...

Di mana a_1, a_2, a_3, dan seterusnya adalah suku-suku dalam barisan tak berhingga.

Penting untuk diingat bahwa deret tak berhingga tidak selalu konvergen, yang berarti bahwa jumlahnya bisa menjadi tak terhingga atau tidak ada hasil yang jelas. Deret tak berhingga yang konvergen memiliki jumlah yang terhingga, sedangkan yang tidak konvergen memiliki jumlah yang tak terhingga. Studi tentang deret tak berhingga adalah bagian penting dalam teori deret dan kalkulus dalam matematika. Salah satu contoh terkenal adalah deret tak berhingga harmonic, yang dinyatakan sebagai:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4} + ...$$

```
Deret tak berhingga S yang dibangun oleh barisan X :=xn
```

disimbolkan dengan

$$\sum x_n atau \sum x_n atau \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

Contoh deret tak berhingga

1.Deret Harmonik:
Deret Harmonik adalah deret tak berhingga yang dinyatakan sebagai jumlah invers dari bilangan bulat positif, yaitu:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4} + ...$$

Deret ini adalah contoh deret tak berhingga yang tidak konvergen dan jumlahnya menjadi tak terhingga.

2. Deret Geometri:
Deret Geometri adalah deret tak berhingga yang memiliki rasio tetap antara suku-suku berturut-turut. Contoh deret geometri adalah:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8} + ...$$

Deret ini adalah contoh deret tak berhingga yang tidak konvergen dan jumlahnya menjadi tak terhingga.

3. Deret Aritmetika:
Deret Aritmetika adalah deret tak berhingga di mana perbedaan antara suku-suku berturut-turut adalah tetap. Contoh deret aritmetika adalah:

$$2 + 5 + 8 + 11 + 14 + ...$$

Deret ini adalah contoh deret tak berhingga yang konvergen dan memiliki jumlah terhingga.

4. Deret Fibonacci:
Deret Fibonacci adalah deret tak berhingga yang dihasilkan dengan cara menjumlahkan dua suku sebelumnya, dimulai dengan 0 dan 1:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$$

Deret ini adalah contoh deret tak berhingga yang konvergen dan memiliki jumlah terhingga.

5. Deret Bilangan Prima Reciprokal:
Deret ini adalah deret yang dinyatakan sebagai invers dari bilangan prima, seperti:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + ...$$

Deret ini adalah contoh deret tak berhingga yang konvergen dan memiliki jumlah terhingga.

Contoh soal

```
>5:5:250
```

```
  [5,  10,  15,  20,  25,  30,  35,  40,  45,  50,  55,  60,  65,  70,
  75,  80,  85,  90,  95,  100,  105,  110,  115,  120,  125,  130,
  135,  140,  145,  150,  155,  160,  165,  170,  175,  180,  185,  190,
  195,  200,  205,  210,  215,  220,  225,  230,  235,  240,  245,  250]
```

```
>1:10
```

```
  [1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10]
```

```
>sum (1:45)
```

```
  1035
```

Definisi Deret berhingga

Deret berhingga (atau deret hingga) adalah sebuah konsep matematika yang mengacu pada jumlah dari sejumlah suku dalam suatu barisan atau urutan yang terdiri dari bilangan yang tak hingga banyaknya. Deret ini umumnya dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + ...$$

Di mana a_1, a_2, a_3, dan seterusnya adalah suku-suku dalam

barisan. Deret ini sering digunakan dalam matematika dan berbagai bidang ilmu lainnya untuk menganalisis jumlah yang tak terbatas.

Contoh Deret berhingga

1. Deret Aritmetika:

Deret aritmetika adalah deret dengan selisih tetap antara suku-suku berturut-turut. Contoh:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ...$$

Deret ini adalah deret berhingga dan memiliki jumlah terhingga.

2. Deret Geometri:

Deret geometri adalah deret dengan rasio tetap antara suku-suku berturut-turut.
Contoh:

$$2 + 4 + 8 + 16 + 32 + ...$$

Deret ini adalah deret berhingga dan memiliki jumlah terhingga.

3. Deret Harmonik Terpotong:
Deret harmonik terpotong adalah variasi dari deret harmonik yang dihentikan setelah sejumlah suku tertentu.
Contoh:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$$

Contoh soal berhingga

tentukan jumlah dari deret aritmetika

$$3 + 7 + 11 + 15 + 19 + ...$$

Jika deret ini dihentikan setelah sejumlah suku tertentu, maka ia menjadi deret berhingga.

4.Deret Eksponensial:
Deret eksponensial adalah deret yang mengandung eksponen. Contoh:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$$

Deret ini adalah deret berhingga dan memiliki jumlah terhingga.

Deret Fibonacci Terpotong:
Deret Fibonacci yang dihentikan setelah sejumlah suku tertentu adalah deret berhingga. Contoh:
0, 1, 1, 2, 3, 5, ...

Jika deret ini dihentikan setelah beberapa suku tertentu, maka ia memiliki jumlah terhingga.

Contoh soal deret berhingga

tentukan jumlah deret aritmetika dibawah ini:

$$3 + 7$$

```
>sum (3:7)
```

```
  25
```

```
>sum (2:6:18)
```

```
  24
```

Definisi fungsi multivariabel

Fungsi multivariabel, juga dikenal sebagai fungsi dari beberapa variabel, adalah konsep dalam matematika yang mengaitkan kelompok variabel input (biasanya lebih dari satu) dengan variabel output tunggal. Fungsi ini mengambil sejumlah variabel sebagai masukan dan menghasilkan nilai tunggal sebagai keluaran. Dalam konteks fungsi multivariabel, biasanya terdapat lebih dari satu variabel independen yang mempengaruhi variabel dependen.

Secara formal, fungsi multivariabel dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$f(x1, x2, ..., xn) = y$$

Di mana:

f adalah fungsi multivariabel.
x1, x2, ..., xn adalah variabel-variabel independen atau input.
y adalah variabel dependen atau output.
Fungsi multivariabel dapat digunakan untuk menggambarkan hubungan kompleks antara beberapa variabel dalam berbagai konteks matematika dan ilmu pengetahuan, seperti dalam fisika, ekonomi, ilmu komputer, dan lain-lain. Fungsi multivariabel dapat digunakan untuk memodelkan berbagai situasi dalam dunia nyata di mana lebih dari satu variabel mempengaruhi hasil akhir. Misalnya, dalam ekonomi, fungsi pendapatan dapat bergantung pada faktor-faktor seperti harga barang, tingkat permintaan, dan biaya produksi, yang semuanya adalah variabel independen dalam model tersebut.