Razones trigonométricas.

Medidas de ángulos.

Medidas en grados (Deg.)

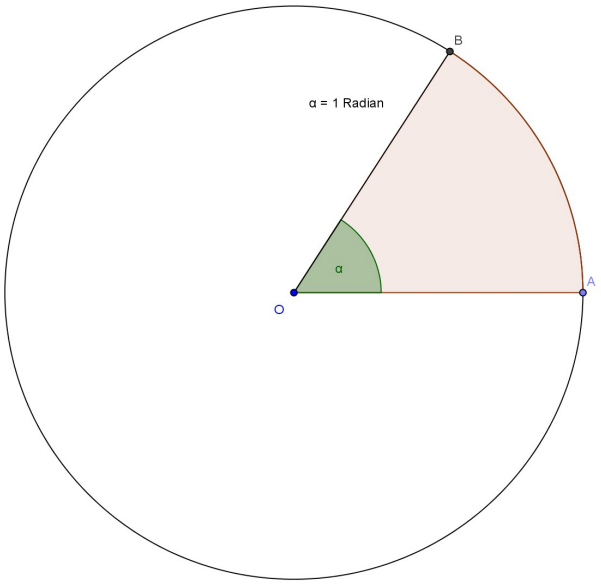
El **grado** es el ángulo plano que teniendo su vértice en el centro de un círculo intercepta sobre la circunferencia de este círculo en un arco de longitud $\frac{2\pi\, radio}{360^o}$.

Además, **1º (1 grado) = 60 ' (60 minutos)** y **1 ' (1 minuto) = 60 '' (60 segundos)**.

Conviene también recordar que un **ángulo recto** mide 90º, un **ángulo llano** mide 180º y un **ángulo completo** mide 360º.

Medidas en grados (Rad.)

El **radián** es el ángulo plano que teniendo su vértice en el centro de un círculo intercepta sobre la circunferencia de este círculo en un arco de longitud igual al radio. Se simboliza por rad.



Además, un **ángulo recto** mide $\frac{\pi}{2}\, rad.\,(=90^o)$, un **ángulo llano** mide $\pi\, rad.\,(=180^o)$ y un **ángulo completo** mide $2.\pi.\, rad.\,(=360^o)$.

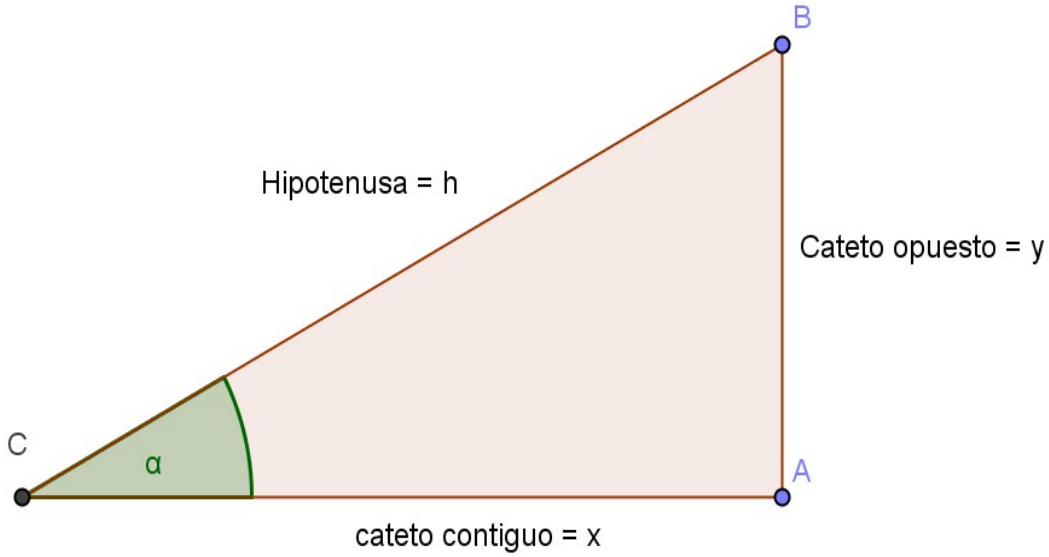
Equivalencia entre grados y radianes

Teniendo en cuenta que que el ángulo de una circunferencia mide 360° (*en unidades sexagesimales*) ó $2.\pi.\, rad.$. Obtenemos, que

$$1\, rad. = \frac{180^o}{\pi} \approx 57{,}29578^o = 57^o 17' 44{,}826'' \qquad 1^o = \frac{\pi}{180^o}\, rad. \approx 0{,}017453\, rad.$$

Razones trigonométricas de un triángulo rectángulo.

Dado un triángulo rectángulo de vértices A, B, C.



Si α es un ángulo agudo en el vértice C de dicho triángulo, x la longitud del cateto contiguo al ángulo α, y la longitud del cateto opuesto al ángulo α y h la longitud de la hipotenusa. Las razones trigonométricas del cateto contiguo al ángulo α serán

$$sen\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{h}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{h}$$

$$tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{y}{h}}{\frac{x}{h}} = \frac{y}{x}$$

Además, de estas razones tomando las inversas se obtiene también las siguientes razones

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha} = \frac{h}{y}$$

$$sec\,\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{h}{x}$$

$$cotg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha} = \frac{x}{y}$$

 # Ejemplo.- Las razones trigonométricas del ángulo α *del triángulo de catetos* $x = 4$ unidades, $y = 3$ unidades *y* $h = 5$ unidades *son:*

$sen\,\alpha = \frac{3}{5}$ $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ $tg\,\alpha = \frac{3}{4}$

$cosec\,\alpha = \frac{5}{3}$ $sec\,\alpha = \frac{5}{4}$ $cotg\,\alpha = \frac{4}{3}$

Ampliación del concepto de ángulo.

Ángulos de giro positivos o negativos

Teniendo en cuenta que un **radián** es el ángulo plano que teniendo su vértice en el centro de un círculo intercepta sobre la circunferencia de este círculo en un arco de longitud igual al radio, podemos, extender el ángulo a magnitudes mayores que el arco abarcado por una circunferencia y también a ángulos negativos, si giramos en sentido del movimiento de las agujas de un reloj.

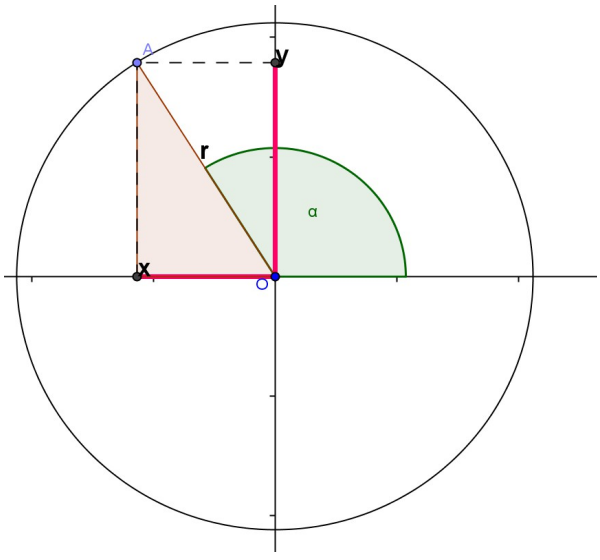
 # Ejemplo.- El ángulo equivalente a efectuar el giro de $2{,}5$ *veces una circunferencia en sentido contrario de la agujas del reloj, será de medida* $(2{,}5).(2.\pi)\,rad. = 5.\,pi.\,rad$ *. cuya medida equivalente en grados será* $900º$.

Y el ángulo equivalente a efectuar el giro un cuarto de veces una circunferencia en sentido de la agujas del reloj, será de medida $\left(-\frac{1}{4}\right)(2.\pi)\,rad. = -\frac{\pi}{2}.rad$ *. cuya medida equivalente en grados será* $-90º$.

Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.

Ampliación de las definiciones de razones trigonométricas

Si consideramos una circunferencia de radio r, centrada en el origen de coordenadas O, y sea $A(x, y)$ un punto sobre la circunferencia y α el ángulo formado por el eje OX^+ y la semirrecta de origen O y que pasa por el punto A.



Las razones trigonométricas serán las siguientes

Razones directas	Razones inversas
$sen\,\alpha=\frac{y}{r}$	$cosec\,\alpha=\frac{r}{y}$
$\cos\alpha=\frac{x}{r}$	$sec\,\alpha=\frac{r}{x}$
$tg\,\alpha=\frac{y}{x}$	$cotg\,\alpha=\frac{x}{y}$

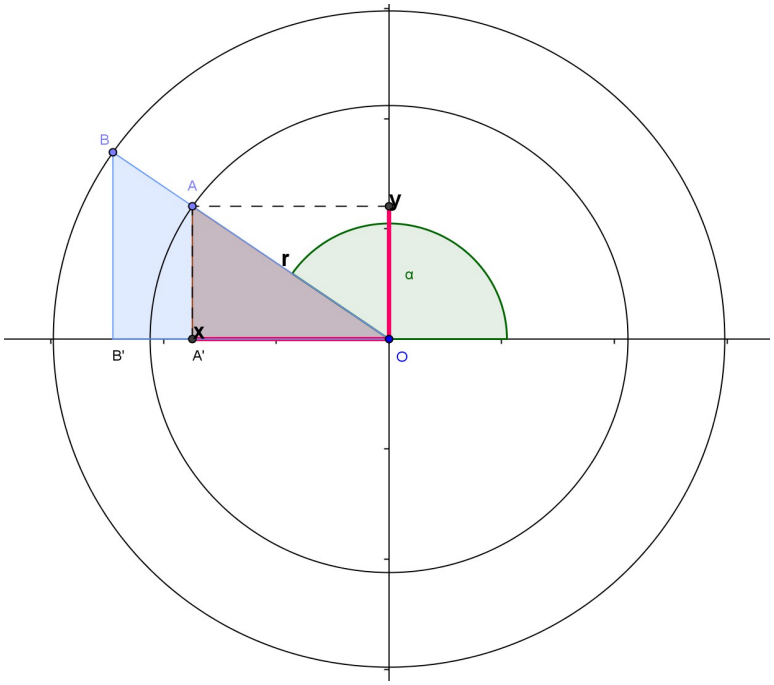
 # Ejemplo.- Si tomamos un punto $A(-1,\sqrt{3})$ *sobre la circunferencia de radio 2, las razones trigonométricas del ángulo* $\alpha=\widehat{(\overrightarrow{OX})O(\overrightarrow{OA})}$ *son:*

$$sen\,\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\alpha=-\frac{1}{2} \qquad tg\,\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cosec\,\alpha=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2.\sqrt{3}}{3} \qquad sec\,\alpha=-2 \qquad cotg\,\alpha=-\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Razones trigonométricas únicas

Un resultado importante es que las razones trigonométricas no dependen del valor del radio de la circunferencia elegida. Dado que si C_1 y C_2 son dos circunferencias concéntricas con centro en el origen de coordenadas O y de radios r y R respectivamente. Si A es un punto de $A\in C_1$ y B es un punto de $B\in C_2$, tal que A `in `[OB], entonces



Por la semejanza de los triángulos $OA'A$ y $OB'B$, los lados son proporcionales, y por tanto también lo son las razones trigonométricas.

Luego, para el estudio de un ángulo cualquiera $\alpha = \widehat{A'OA}$, tomando la **circunferencia goniométrica** (*Circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio r = 1*), si $A(x, y)$ es un punto de la circunferencia, se cumplirá $sen\,\alpha = y$ y $\cos\alpha = x$, y por tanto las razones trigonométricas de $\alpha = \widehat{A'OA}$ serán:

Razones directas	Razones inversas
$sen\,\alpha = y$	$cosec\,\alpha = \frac{1}{y}$
$\cos\alpha = x$	$sec\,\alpha = \frac{1}{x}$
$tg\,\alpha = \frac{y}{x}$	$cotg\,\alpha = \frac{x}{y}$

Hay que observar que como para cualquier punto $A(x, y)$ de la circunferencia goniométrica se cumple $-1 \le x \le 1$ y $-1 \le y \le 1$, será

$$-1 \le \cos\alpha \le 1 \quad \text{y} \quad -1 \le sen\,\alpha \le 1$$

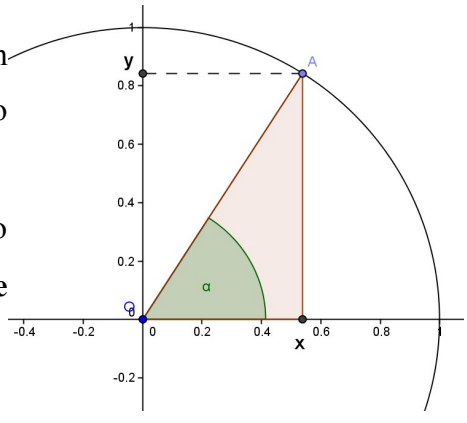
Signo y valor de las razones trigonométricas.

Utilizando la circunferencia goniométrica fácilmente podemos obtener la siguiente tabla

Cuadrante	α	x	y	$sen\,\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\,\alpha$
[redacted]	0º	1	0	0	1	0
1º	$0º < \alpha < 90º$	>0	>0	>0	>0	>0
[redacted]	90º	0	1	1	0	$+\infty$
2º	$90º < \alpha < 180º$	<0	>0	>0	<0	<0
[redacted]	180º	-1	0	0	-1	0
3º	$180º < \alpha < 270º$	<0	<0	<0	<0	>0
[redacted]	270º	0	-1	-1	0	$-\infty$
4º	$270º < \alpha < 360º$	>0	<0	<0	>0	<0

Relación entre razones trigonométricas.

Si consideramos un ángulo α determinado por un punto $A(x, y)$ sobre la circunferencia goniométrica, como $\cos\alpha = x$ y $sen\,\alpha = y$.



Teniendo en cuenta el teorema de Pitagóricas como $x^2 + y^2 = 1$, se cumplirá la **relación fundamental de trigonometría**

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Si $sen\,\alpha \neq 0$, dividiendo la relación de trigonometría con $sen^2\alpha$, se tiene la relación

$$1+cotg^2\alpha = cosec^2\alpha$$

Si $\cos\alpha \neq 0$, dividiendo la relación de trigonometría con $\cos^2\alpha$, se tiene la relación

$$tg^2\alpha + 1 = sec^2\alpha$$

 # Ejemplo.- Si α *es un ángulo que está en el cuarto cuadrante y* $tag\,\alpha = -\frac{3}{4}$ *, entonces*

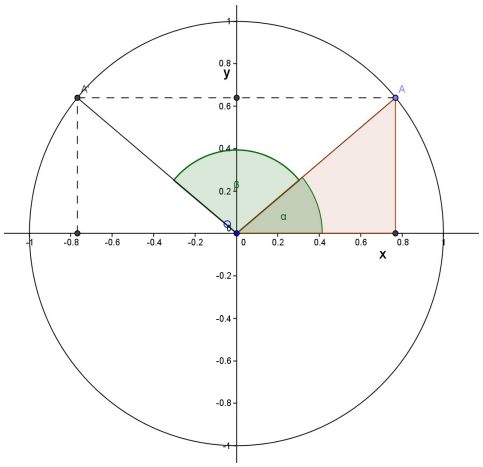
$$tg^2\alpha+1=sec^2\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{16}+1=sec^2\alpha \quad \Rightarrow \quad sec\,\alpha=\frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha=\frac{4}{5}$$

Y dado que $tg\,\alpha = sen\frac{\alpha}{\cos}\alpha \quad \Rightarrow \quad sen\,\alpha = -\frac{3}{4}.\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$

Relaciones entre las razones de ciertos ángulos.

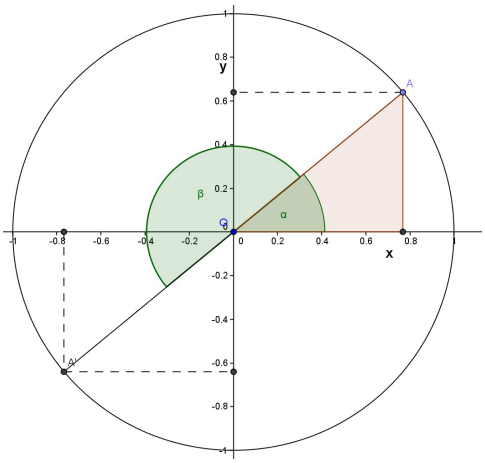
Utilizando la circunferencia goniométrica fácilmente se deduce los siguientes resultados

Ángulos suplementarios: α **y** $180^o-\alpha$



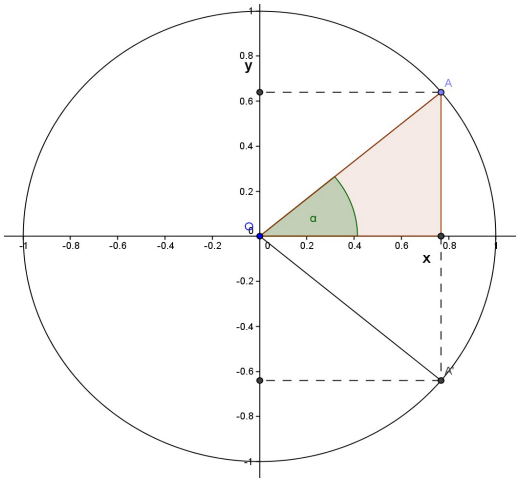
$$sen\,(180^o-\alpha)=sen\,\alpha$$
$$\cos(180^o-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$tg\,(180^o-\alpha)=-tg\,\alpha$$
$$cosec\,(180^o-\alpha)=cosec\,\alpha$$
$$sec\,(180^o-\alpha)=-sec\,\alpha$$
$$cotg\,(180^o-\alpha)=-cotg\,\alpha$$

Ángulos que difieren 180º: α **y** $180^o+\alpha$



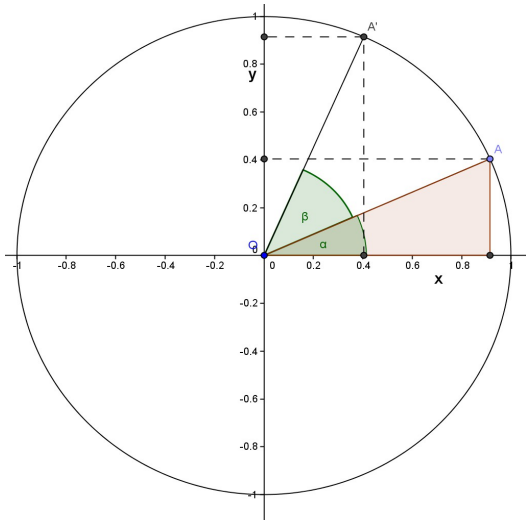
$$sen\,(180^o+\alpha)=-sen\,\alpha$$
$$\cos(180^o+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$tg\,(180^o+\alpha)=tg\,\alpha$$
$$cosec\,(180^o+\alpha)=-cosec\,\alpha$$
$$sec\,(180^o+\alpha)=-sec\,\alpha$$
$$cotg\,(180^o+\alpha)=cotg\,\alpha$$

Ángulos opuestos: α **y** $-\alpha$



$$sen(-\alpha)=sen\,\alpha$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$tg(-\alpha)=-tg\,\alpha$$
$$cosec(-\alpha)=-cosec\,\alpha$$
$$sec(-\alpha)=sec\,\alpha$$
$$cotg(-\alpha)=-cotg\,\alpha$$

Ángulos complementarios: α **y** $90^o-\alpha$



$$sen(90^o-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(90^o-\alpha)=sen\,\alpha$$
$$tg(90^o-\alpha)=cotg\,\alpha$$
$$cosec(90^o-\alpha)=sec\,\alpha$$
$$sec(90^o-\alpha)=cosec\,\alpha$$
$$cotg(90^o-\alpha)=tg\,\alpha$$

 # Ejemplo: Si α *es un ángulo del 1º cuadrante y* $sen\,\alpha=\frac{1}{2}$ *. Será*

$$\cos\alpha=1-sen^2\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad tg\,\alpha=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2}=\sqrt{3}/3$$

Y utilizando las relaciones anteriores, podemos también calcular las razones trigonométricas directas del ángulo $\beta=180^o-\alpha$ *, que serán*

$$sen\,\beta=sen(180^o-\alpha)=sen\,\alpha=\frac{1}{2}$$

$$\cos\beta=\cos(180^o-\alpha)=-\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\,\beta=tg(180^o-\alpha)=-tg\,\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos.

Otras fórmulas trigonométricas que se pueden demostrar mediante procesos geométricos (por ejemplo utilizando el producto escalar) obtenemos

Razones trigonométricas de la suma de los ángulos

$$sen(a+b)=sen\,a.\cos b+\cos a\,.sen\,b$$

$$\cos(a+b)=\cos a.\cos b-sen\,a\,.sen\,b$$

$$tg(a+b)=\frac{tg\,a+tg\,b}{1-tg\,a\,.tg\,b}$$

Razones trigonométricas de la diferencia de los ángulos

$$sen(a-b)=sen\,a.\cos b-\cos a\,.sen\,b$$

$$\cos(a-b)=\cos a.\cos b+sen\,a\,.sen\,b$$

$$tg(a-b)=\frac{tg\,a-tg\,b}{1+tg\,a\,.tg\,b}$$

 # Ejemplo: Sabiendo que $sen\,30º=\frac{1}{2}, \cos 30º=\frac{\sqrt{3}}{2}$ *y que* $sen\,45º=\cos 45º=\sqrt{2}$ *, para calcular el* $sen\,75º$ *, utilizamos*

$$sen\,75º=sen(45º+30º)=sen\,30º\,.\cos 45º+\cos 30º\,.sen\,45º=$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=(1+\sqrt{3}).\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Razones trigonométricas del ángulo doble y ángulo mitad.

De las fórmulas trigonométricas anteriores se deducen también las siguientes

Razones trigonométricas del ángulo doble

$$sen(2\,a)=2\,.sen\,a.\cos b$$

$$\cos(2\,a)=\cos^2 a-sen^2 b$$

$$tg(2\,a)=\frac{2\,tg\,a}{1-tg^2 a}$$

Razones trigonométricas del ángulo mitad

$$sen\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$$

$$\cos\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$$

$$tg\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$$

 # Ejemplo.- Sabiendo que $sen\,30^\circ=\frac{1}{2}$ *. el* $\cos 15^\circ$ *será*

$$\cos 15^\circ=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Ecuaciones trigonométricas y sistemas de ecuaciones trigonométricas.

Se denominan ecuaciones trigonométrica a las ecuaciones en las que aparecen una o varias razones trigonométricas como incógnitas.

 # Ejemplo.- Resolver la ecuación

$$\cos 2x+5\cos x+3=0$$

Como

$$\cos 2x=\cos^2 x-sen^2 x=\cos^2 x-(1-\cos^2 x)=2\cos^2 x-1$$

Sustituyendo se tiene

$$2\cos^2 x+5\cos x+2=0$$

Y haciendo cos x = y, obtenemos la ecuación de segundo grado en y, de la forma

$$2y^2+5y+2=0$$

Cuyas soluciones son

$$y=-\frac{1}{2}$$

$$y=-2$$

Obteniendo

1º) $\cos x=-\frac{1}{2}$ ⇨ $x=120^\circ+360^\circ.k$ *y* $x=240^\circ+360^\circ.k$ $(k\in\mathbb{Z})$

2º) $\cos x=-2$ ⇨ *No tiene solución*

Un sistema de ecuaciones trigonométricas es aquel que está formado por ecuaciones trigonométricas.

 # Ejemplo.- Resolver la ecuación

$$sen\,x\,.sen\,y=\frac{1}{4}$$

$$\cos x\,.\cos y=\frac{3}{4}$$

dando las soluciones correspondientes al primer cuadrante.

Sumando las dos ecuaciones:

$$sen\, x \,.\cos y + \cos x \,.\cos y = 1$$

Restando a la primera ecuación la segunda:

$$\cos x \,.\cos y - sen\, x \,.\cos y = \frac{1}{2}$$

Como

$$\cos 2x = \cos^2 x - sen^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$$

Por tanto se obtiene el siguiente sistema

$$\cos(x - y) = 1 \qquad \%implica \qquad x - y = 0$$

$$\cos(x + y) = \frac{1}{2} \qquad \%implica \qquad x + y = 60^{\circ}$$

Que resolviendo será $x = y = 30^{\circ}$