



MatematikOchFysik-Provet-2025-FYDEL2-V015-uppgifter-14till20-2pKortSvarOch5pStorUppgift . d o c x (eller . p d f)

14. Två bilar, A och B, kör på en rak väg. Låt x vara en linjär koordinat längs vägen. Vid en viss tidpunkt befinner sig A på $x = s > 0$ och rör sig med hastigheten u . B är samtidigt i $x = 0$ och har samma hastighet u . Därefter accelererar B med konstant acceleration $a > 0$, medan A har accelerationen $-a$. Var möts bilarna?

t = tidpunkt , sekunder är en variabel jag introducerar för att använda konventionella formler:

$$s_A(t) = s_0 + u \cdot t - \frac{a \cdot t^2}{2} \quad \text{här är } s_0 = s \text{ (”bara” } s \text{) i uppgiftsformuleringen 14 ovan.}$$

u och a är också från uppgiftsformuleringen 14 ovan.

$$s_A(t) = s + u \cdot t - \frac{a \cdot t^2}{2} \quad \text{Bil A startar alltså med försprånget } s, \text{ hastigheten minskar med tiden.}$$

$$s_B(t) = u \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} \quad \text{Bil B startar från } x = 0. \text{ Hastigheten ökar med tiden.}$$

Vid vilket $t = t_{\text{möte}}$ är då $s_A = s_B$ – det är ju då, vid den tiden, som bilarna möts

$$s_A = s_B$$

$$s + u \cdot t - \frac{a \cdot t^2}{2} = u \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$

$$s - \frac{a \cdot t^2}{2} = \frac{a \cdot t^2}{2}$$

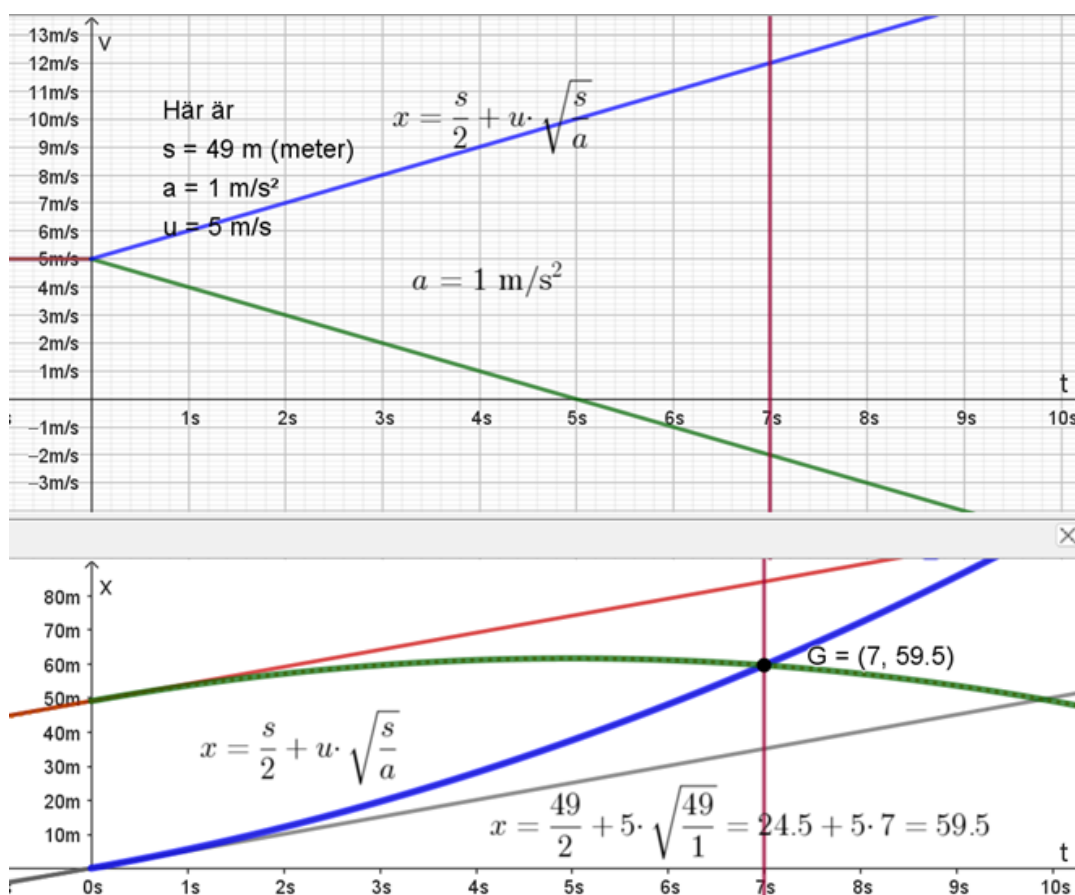
$$s = a \cdot t^2$$

$$t^2 = \frac{s}{a}$$

$$t_{\text{möte}} = t = \sqrt{\frac{s}{a}}$$

Vi utvärderar s_A och s_B för detta $t = t_{\text{möte}} = \sqrt{\frac{s}{a}}$:

$s_A(t) = s + u \cdot t - \frac{a \cdot t^2}{2}$	$s_B(t) = u \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$
$s_A(t_{\text{möte}}) = s + u \cdot \sqrt{\frac{s}{a}} - \frac{a \cdot \frac{s}{a}}{2}$	$s_B(t_{\text{möte}}) = u \cdot \sqrt{\frac{s}{a}} + \frac{a \cdot \frac{s}{a}}{2}$
$s_A(t_{\text{möte}}) = s + u \cdot \sqrt{\frac{s}{a}} - \frac{s}{2}$	$s_B(t_{\text{möte}}) = u \cdot \sqrt{\frac{s}{a}} + \frac{s}{2}$
$s_A(t_{\text{möte}}) = \frac{s}{2} + u \cdot \sqrt{\frac{s}{a}}$	$s_B(t_{\text{möte}}) = \frac{s}{2} + u \cdot \sqrt{\frac{s}{a}}$
Den sträcka/avstånd från $x = 0$ på i x-led som bilarna möts på är $x = \frac{s}{2} + u \cdot \sqrt{\frac{s}{a}}$	



i exemplet ovan är :

$s = 49 \text{ (meter)}$
 $u = 5 \text{ m/s}$
 $a = 1 \text{ m/s}^2 \text{ } (-a = -1 \text{ m/s}^2)$

vilket ger mötes-sträckan $x = \frac{s}{2} + u \cdot \sqrt{\frac{s}{a}}$

$$x = \frac{49}{2} + 5 \cdot \sqrt{\frac{49}{1}} = 24,5 + 5 \cdot 7 = 24,5 + 35 = 59,5 \text{ (m)}$$

vidare är tiden $t_{\text{möte}}$ då de möts =

$$t_{\text{möte}} = \sqrt{\frac{s}{a}} = \sqrt{\frac{49}{1}} = 7 \text{ (m/s)}$$

och då är hastigheterna

$$s'_A(t_{\text{möte}}) = u - a \cdot t_{\text{möte}} = 5 \text{ m/s} - 1 \cdot 7 = -2 \text{ m/s}$$

$$s'_B(t_{\text{möte}}) = u + a \cdot t_{\text{möte}} = 5 \text{ m/s} + 1 \cdot 7 = 12 \text{ m/s}$$

Svar på uppgift 14: bilarna möts vid $x = \frac{s}{2} + u \cdot \sqrt{\frac{s}{a}}$



15. Med hjälp av de tre naturkonstanterna $\hbar$, c och G kan man bilda en konstant med dimensionen massa. Detta är den s.k. Planckmassan, m_P , som är relevant för kvantgravitation. Ge ett uttryck för m_P i termer av de tre naturkonstanterna.

$\hbar$	c	G	m , massa	kg kilogram
J s	m/s	Nm ² kg ²	l , längd	m meter
		kg ⁻¹ m ³ s ⁻²	t , tid	s sekund
J = kg · m · s ⁻² · m	Från $E = F \cdot s$	från $F = m \cdot a$		
J s = kg ¹ · m ² · s ⁻¹	(och från $F = m \cdot a$)	N = kg ¹ · m ¹ · s ⁻²		

dimensionsanalys , enhetskontroll • $[G] = \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ från facit: $m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$

Plancks konstant $h \approx 6.63 \times 10^{-34} \text{ Js}$

Plancks konstant dividerad med 2π $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

Ljushastigheten $c = 299\,792\,458 \text{ m/s} \approx 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$

Newtons gravitationskonstant $G \approx 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$

	$\hbar$	c	G	m_P
kg kilogram	1	0	-1	1
m meter	2	1	3	0
s sekund	-1	-1	-2	0

Ekvationssystemet , där x motsvarar $\hbar$, y motsvarar c , z motsvarar G ger

$\begin{cases} x - z = 1 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ -x - y - 2z = 0 \end{cases}$ $x = z + 1$ och $\begin{cases} 2(z + 1) + y + 3z = 0 \\ -z - 1 - y - 2z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -5z - 2 \\ y = -3z - 1 \end{cases}$ $-5z - 2 = -3z - 1 \text{ ger } z = -\frac{1}{2}$ $5(z + 1) + z = -2 \text{ } 6z = -3 \text{ } z = -1/2$	$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$ alltså $\hbar^{1/2} \cdot c^{1/2} \cdot G^{-1/2}$
--	--

	$\hbar$			c			G				m_P
	1/2			1/2			-1/2			summering	
kg kilogram	1	blir	1/2	0	blir	0	-1	blir	1/2	$\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} =$	1
m meter	2	blir	1	1	blir	1/2	3	blir	-3/2	$1 + \frac{1}{2} - 3/2 =$	0
s sekund	-1	blir	-1/2	-1	blir	-1/2	-2	blir	1	$-1/2 - \frac{1}{2} + 1 =$	0

vilket innebär att dimensionen för m_P kommer från $m_P = \hbar^{1/2} \cdot c^{1/2} \cdot G^{-1/2}$



16. En kula med massan m som har farten u kolliderar elastiskt och linjärt med en kula med massan ξm som är i vila. Vad blir den andra kulans (den med massa ξm) fart efter stöten?

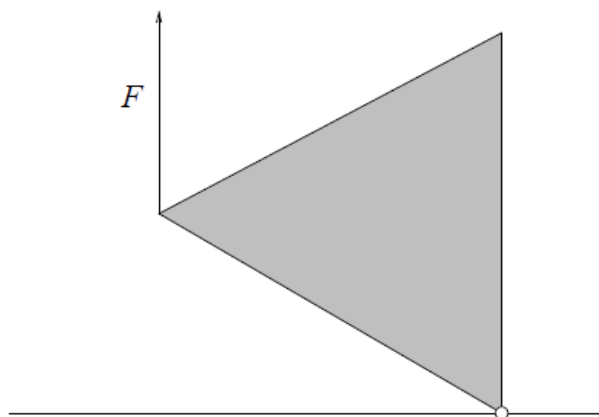
	elastiskt stöt ger ekvationssystem med bevarad rörelsemängd och bevarad rörelseenergi: $\begin{cases} p_{före} = p_{efter} \\ E_{före} = E_{efter} \end{cases}$ $\begin{cases} m \cdot u = m \cdot v + \xi \cdot m \cdot w \\ \frac{m \cdot u^2}{2} = \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{\xi \cdot m \cdot w^2}{2} \end{cases}$ med förkortningar av m och faktor 2 blir detta $\begin{cases} u = v + \xi \cdot w \\ u^2 = v^2 + \xi \cdot w^2 \end{cases}$ om vi löser ut v ur övre ekvationen $\dots v = u - \xi \cdot w \dots$ och substituerar i den andra/nedre ekvationen: $u^2 = v^2 + \xi \cdot w^2, \quad u^2 = (u - \xi \cdot w)^2 + \xi \cdot w^2$ $u^2 = u^2 - 2 \cdot u \cdot \xi \cdot w + \xi^2 \cdot w^2 + \xi \cdot w^2 \quad \text{ger}$ $0 = 0 - 2 \cdot u \cdot \xi \cdot w + \xi^2 \cdot w^2 + \xi \cdot w^2, \quad \text{kan förkortas med } w :$ $0 = -2 \cdot u \cdot \xi + \xi^2 \cdot w + \xi \cdot w, \quad \text{kan förkortas med } \xi$ $0 = -2 \cdot u + \xi \cdot w + w, \quad \text{kan}$ $2 \cdot u = (1 + \xi) \cdot w$ $w = \frac{2u}{1 + \xi}$ och detta ger, då om vi har en mycket liten mindre kula, alltså att $\xi \rightarrow 0$ att $w \rightarrow 2u$. (och att $v \rightarrow u$, det vill säga att den stora kulans hastighet ej förändras då den möter en liten kula)
--	---

Vad blir den andra kulans (den med massa ξm) fart efter stöten ?

Svar: $\frac{2u}{1+\xi}$



17. En skiva har formen av en liksidig triangel, och har massan m jämnt fördelad över sin yta. Den kan rotera (i ett vertikalt plan) kring sin kontaktpunkt med golvet, men inte glida. När en sida är vertikal (enligt figuren), hur stor vertikal kraft F behövs för att hålla skivan stilla?



Om vi kallar sidan på den liksidiga triangeln för a , så kan hävarmen för $F_g = mg$ beräknas till $a \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}}$ och hävarmen för F beräknas till $a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

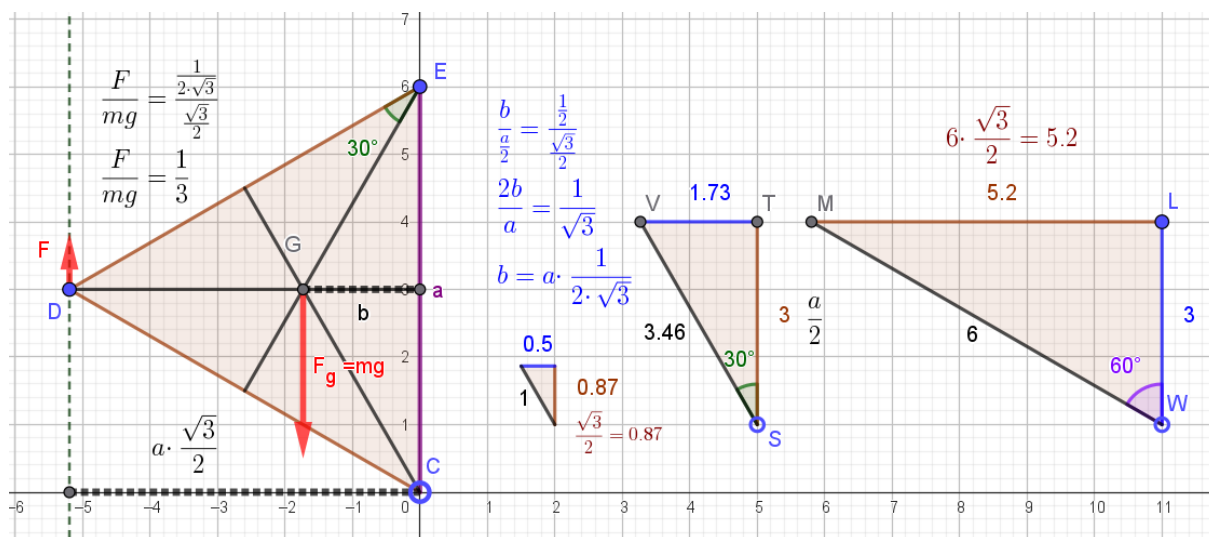
Svar: $F = \frac{mg}{3}$ behövs för att hålla skivan stilla

$$M = M$$

$$F \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = mg \cdot a \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}}$$

$$F \cdot \sqrt{3} = mg \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$F = mg \cdot \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = mg \cdot \frac{1}{3} = \frac{mg}{3}$$





18. En elektron rör sig i en cirkulär bana i ett magnetiskt fält. Dess fart är 1.6×10^6 m/s och banans radie är 1.0 m. Hur starkt är magnetfältet?

Från konstantsamlingen:

Elektronmassan

$$m_e \approx 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

Elektronladdningen

$$q_e = -1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C}$$

ElektroMagnetisk kraft (Lorentzkraft): $F = q \cdot v \cdot B$

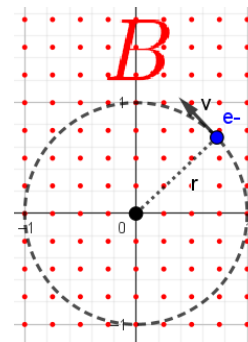
$$\text{Centripetalkraft : } F = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

Vi sätter dessa lika : $q \cdot v \cdot B = \frac{m \cdot v^2}{r}$ och radien är $r = 1,0 \text{ m}$ $v = 1,6 \cdot 10^6 \text{ m/s}$

$$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \quad q_e \approx -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\text{Vi får då } B = \frac{m_e \cdot v}{q_e \cdot r} = \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1,6 \cdot 10^6 \text{ m/s}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1,0 \text{ m}} = 9,11 \cdot 10^{-31+16-(-19)} \text{ T} = 9,11 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

Svar: $9,11 \cdot 10^{-6} \text{ T}$ (Tesla)



19. En heliumballong har volymen 10 m^3 . Hur stor massa kan den lyfta, ballongens egen massa inräknad? (Molekylmassan för luft är c:a 29 u, atommassan för helium är c:a 4.0 u.)

Från konstantsamlingen:

Luftens densitet vid havsnivån

$$\text{c:a } 1.2 \text{ kg/m}^3$$

Med densiteten från konstantsamlingen får vi den bortträngda luftens massa till

$$\text{Att vara } m = \rho \cdot V = 1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \text{ m}^3 = 12 \text{ kg}$$

Molekylmassan är proportionell mot densiteten (och båda gaserna lyder under allmänna gaslagen)

Då $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ (R konstant , T antas hållas konstant , inre trycket väldigt nära lufttrycket)

$$\text{Alltså är densiteten proportionell mot } n = \frac{m}{M}, \text{ och } \frac{m_{\text{He}}}{m_{\text{luft}}} = \frac{M_{\text{He}}}{M_{\text{luft}}} = \frac{4 \text{ g/mol}}{29 \text{ g/mol}}.$$

Men det som ska beräknas är lyftkraften och då är skillnaden $M_{\text{He}} - M_{\text{luft}} = 29 \text{ g/mol} - 4 \text{ g/mol} = 25 \text{ g/mol}$ intressant.

Det som kan lyftas med lyftkraften är då $\frac{29-4}{29}$ av 10 m^3 för luft

Och då $\frac{25}{29} \approx \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$ samt att massan på undanträngd luft är 12 kg fås

$$\text{Massa som kan lyftas i kg: } 12 \text{ kg} \cdot \frac{5}{6} = \frac{12}{1} \cdot \frac{5}{6} \text{ kg} = \frac{6 \cdot 2}{1} \cdot \frac{5}{6} \text{ kg} = \frac{5 \cdot 2}{1} \text{ kg} = 10 \text{ kg},$$

Svaret är 1/29 lägre , men med två gällande siffror kan 10 kg svaras.

Svar: Heliumballongen kan lyfta 10 kg , (dess egna massa inräknad)





20. Sex motstånd kopplas så att de bildar en tetraeder. De skall alla ha resistansen R , men ett av motstånden är trasigt, och har resistansen 0.

Beräkna resistansen mellan två av tetraederns hörn, för alla sätt att välja dem.

Är resistansen mellan två hörn alltid mindre än om alla motstånden hade varit hela?

FACITlösningen på matematik-och-fysikprovet.se :

20. Vi börjar med att rita kretsen. Varje prick är ett hörn, och varje linje är ett motstånd. När en av sidorna i tetraedern har "tagits bort", så att de två hörnen den knyter samman sammanfaller, ser kretsen ut som i figuren nedan.

Det finns sex sätt att välja två hörn:

- a) de två hörnen som kopplar till den trasiga sidan;
- b) ett hörn som kopplar till den trasiga sidan, ett som inte gör det (4 olika sätt);
- c) de två hörnen som inte kopplar till den trasiga sidan.

Motståndet räknas ut fall för fall:

a) Motståndet blir 0.

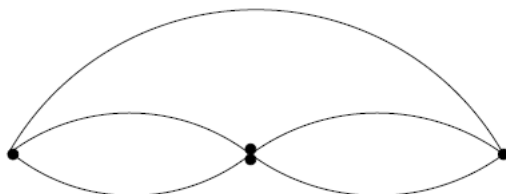
b) Parallellkoppling av (parallellkoppling av R med R) med (seriekoppling av R med (parallellkoppling av R med R)): Parallellkoppling av R med R ger $R/2$, så:

$$R \frac{1}{2 + \frac{2}{3}} = \frac{3}{8} R.$$

c) Parallellkoppling av R med (seriekoppling av (parallellkoppling av R med R) med (parallellkoppling av R med R)):

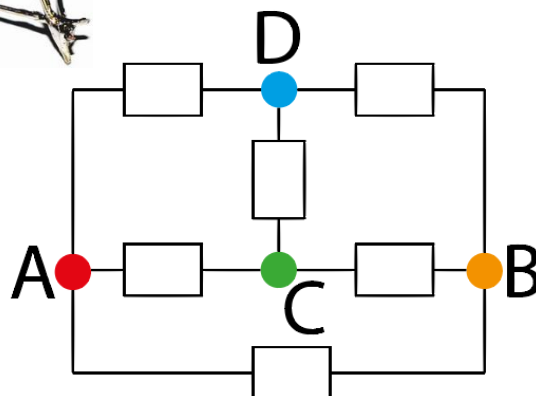
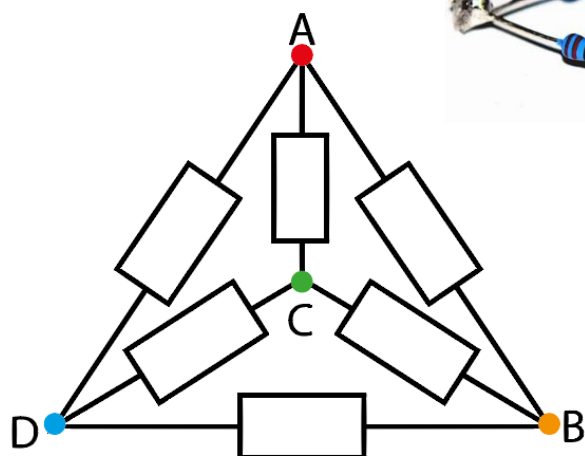
$$R \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} R.$$

I fallet c) spelar det ingen roll att motståndet är trasigt, det flyter ändå ingen ström i det, då dess två ändar har samma potential. I de övriga fallen blir resistansen lägre.

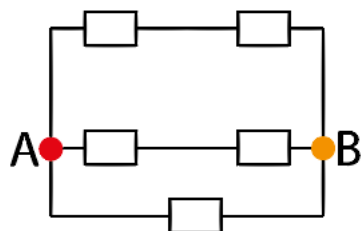
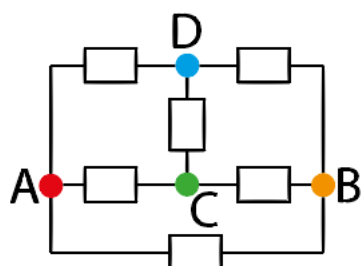




För en hel krets där inget motstånd är sönder är kopplingsschemat som nedan:



För varje hörn av tetraedern, till exempel från hörn A till hörn B, så är motståndet mellan C och D ointressant, då C och D har motsvarande positioner och därmed samma potential:



ersättningsresistansen mellan **A** och **B** beräknas då av parallellkoppling mellan tre vägar för strömmen:

Vi kallar resistansen för en resistor för R

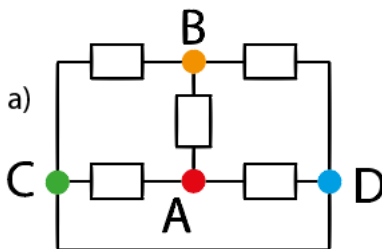
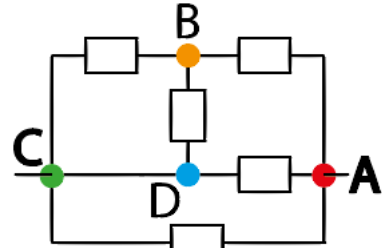
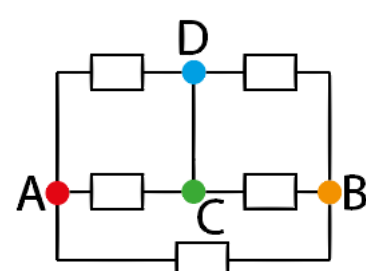
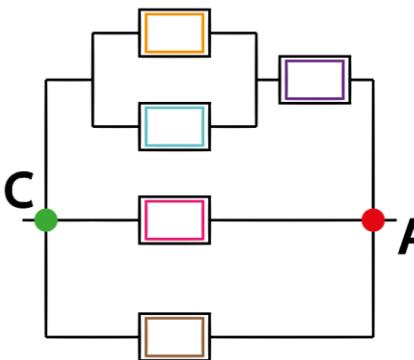
$$\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} = \frac{1}{R_{AB}}$$

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{R_{AB}}$$

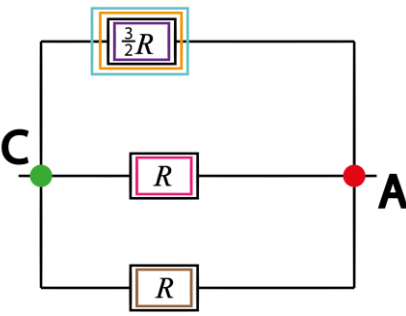
$$R_{AB} = \frac{1}{2} \cdot R$$



Om sedan en resistor går sönder så att resistansen blir noll, det vill säga den är att betrakta som en ledningstråd, låt oss säga resistorn mellan **C** och **D**, så kan det påverka på tre olika sätt beroende på vilka av **A B C D** som ersättningsresistansen ska beräknas mellan:

Fall a) : Båda punkterna/"hörnen-i-tetradern" är närliggande den trasiga resistorn resistansen mellan C och D är noll  $R_{\text{tot}} = 0$ pga kortslutning	Fall b) : Ena punkten/"hörn-i-tetradern" är närliggande den trasiga resistorn, och andra punkten är inte närliggande exempel här nedan: C och A (gäller på samma sätt även "C och B" samt "D och A" samt "D och B") 	Fall c) : ingen av punkterna/"hörnen-i-tetradern" är närliggande den trasiga resistorn detta gäller resistansen mellan A och B 
först en beräkning av orange och turkos parallellkoppling (överst i sista figuren, till vänster) $\frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{1}{R_{\text{OrangeTurkos}}}$ $R_{\text{OrangeTurkos}} = \frac{1}{2}R$ i serie med $R_{\text{Lila}} = R$ blir $R_{\text{OrangeTurkosLila}} = \frac{1}{2}R + R = \frac{3}{2}R$ nu har vi parallellkoppling OrangeTurkosLila med Cerise och Brun: $\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{3}{2}R} = \frac{1}{R_{CA}}$ $\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{2}{3R} = \frac{1}{R_{CA}}$	detta kopplingsschema kan skrivas om för att enklare se / göra en ersättningsresistansekvation:  Vi kallar resistansen för en resistor för R	Denna krets har samma resistans som då alla resistorerna är hela, eftersom i det fallet går ingen ström mellan C och D då det har samma potential, och så är det även här, jämför:  Vi kallar resistansen för en resistor för R $\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} = \frac{1}{R_{AB}}$ $\frac{2}{R} = \frac{1}{R_{AB}}$ $R_{AB} = \frac{1}{2} \cdot R$



$\frac{3}{3R} + \frac{3}{3R} + \frac{2}{3R} = \frac{1}{R_{CA}}$ $\frac{8}{3R} = \frac{1}{R_{CA}}$ $R_{CA} = \frac{3}{8}R$		
Fall a): $R_{CD} = 0R = 0$	Fall b): $R_{CA} = \frac{3}{8}R$ $R_{CB} = \frac{3}{8}R$ $R_{DA} = \frac{3}{8}R$ $R_{DB} = \frac{3}{8}R$	Fall c): $R_{AB} = \frac{1}{2} \cdot R$

Slutsats: totala resistansen, "ersättningsresistansen" blir densamma i ett fall (fall c)), och lägre i fem fall (fyra varianter av fall b) samt i fall a)) för den händelse att en resistor går sönder – (på ett sådant sätt att motståndet blir noll, "resistorn blir ledande utan motstånd") i tetraedern.