UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

Vicente Pineda 9-746-1611

Antecedentes históricos

El conocimiento sobre la electricidad comenzó con los experimentos de los filósofos griegos, como **Tales de Mileto** (c. 600 a.C.), quien descubrió que, frotando un ámbar con piel o lana, este adquiría la capacidad de atraer objetos ligeros, como plumas. Sin embargo, no comprendían la naturaleza de este fenómeno.

El físico francés **Charles-Augustin de Coulomb** formuló una de las leyes fundamentales de la electrostática. Coulomb demostró que la fuerza entre dos cargas puntuales es directamente proporcional al producto de sus cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas:

$$F = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Este descubrimiento fue fundamental para el desarrollo de la teoría electrostática y sirvió como base para la ley de Gauss.

En el siglo XIX, el concepto de campo eléctrico se desarrolló para explicar cómo las cargas interactúan a distancia sin necesidad de contacto directo. Este concepto fue impulsado por Michael Faraday, quien utilizó la idea del "campo de fuerza" para describir las interacciones eléctricas.

Faraday también introdujo la noción de líneas de campo para visualizar las fuerzas que actúan entre cargas.

El físico alemán Carl Friedrich Gauss, en el contexto de la teoría del campo eléctrico, formuló la Ley de Gauss. Su trabajo se basó en los avances previos, como la ley de Coulomb y el campo eléctrico de Faraday.

Gauss observó que, al estudiar sistemas con simetría (por ejemplo, esferas o cilindros), el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga total contenida dentro de esa superficie. Su ley establece que el flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada es igual a la carga total dentro de la superficie dividida por la permitividad del vacío:

$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{Q_{neta}}{\epsilon_0}$$

Necesidad por la que Gauss creó la ley electrostática

Antes de la ley de Gauss, el estudio de los campos eléctricos estaba basado en la ley de Coulomb, que describe la interacción entre cargas puntuales. Si bien la ley de Coulomb era útil para sistemas simples, como dos cargas puntuales, se volvía muy complicada y difícil de aplicar en sistemas más complejos, especialmente aquellos con simetría (como esferas, cilindros, etc.)

Gauss quería encontrar una manera de simplificar los cálculos en estos casos y obtener resultados más fácilmente aplicables en situaciones de alta simetría.

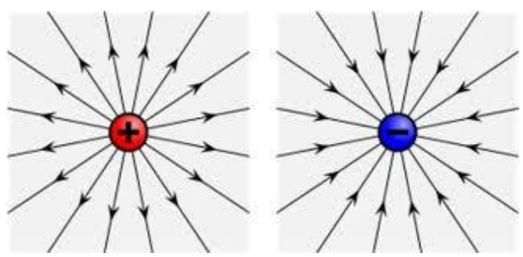
Gauss también estaba interesado en comprender cómo las cargas distribuidas (por ejemplo, una carga uniforme sobre una esfera o una línea de carga) generaban un campo eléctrico. La ley de Coulomb solo abordaba cargas puntuales, pero muchos sistemas físicos en la naturaleza y en la ingeniería involucran distribuciones continuas de carga. La ley de Gauss proporciona una forma de abordar este tipo de problemas de manera más directa, al centrarse en el flujo eléctrico a través de superficies cerradas.

Gauss se dio cuenta de que muchas configuraciones de carga tienen una simetría particular, y que el comportamiento del campo eléctrico podría describirse de manera mucho más sencilla en estos casos. En sistemas simétricos (como una esfera cargada, un cilindro o un plano), el campo eléctrico tiene una distribución que depende solo de la distancia desde el centro o de la orientación con respecto a la carga distribuida. Al usar una superficie cerrada adecuada (como una esfera para una carga puntual), Gauss pudo encontrar una forma de calcular el campo eléctrico sin tener que resolver las interacciones punto por punto, como ocurriría con la ley de Coulomb.

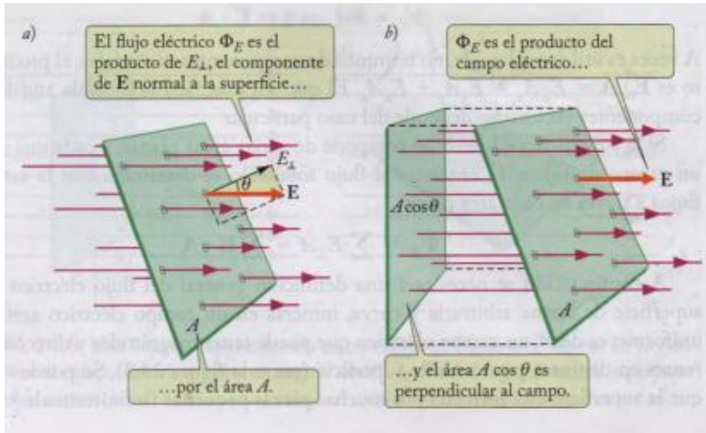
Gauss entendió que, al generalizar la ley de Coulomb a través de su teorema de Gauss, podía conectar la interacción de cargas con el flujo del campo eléctrico, y de esta forma lograr una unificación de las leyes de la electrostática. Su ley establece que el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada depende solo de la carga contenida dentro de la superficie, no de la distribución específica del campo fuera de esa superficie. Esto simplificó enormemente el cálculo y análisis de muchos problemas de electrostática.

Conceptos básicos

Campo eléctrico: es una propiedad intrínseca que se ve perturbada ante presencia de cargas eléctricas positivas o negativas. Cuando no hay carga en una región del espacio, se dice que el campo eléctrico es cero. Un campo eléctrico es una región del espacio en la que una carga eléctrica experimenta una fuerza. Este campo es generado por otras cargas eléctricas y puede afectar a otras cargas que estén presentes en la misma área. Cuando una carga positiva está presente, genera un campo eléctrico que se extiende hacia fuera de ella. Por el contrario, una carga negativa genera un campo que se extiende hacia ella. El campo eléctrico actúa sobre cualquier otra carga que se encuentre dentro de ese campo, ejerciendo una fuerza sobre ellas. Cuanto más cerca de la carga generadora estés, más fuerte será la fuerza que experimenta una carga de prueba.



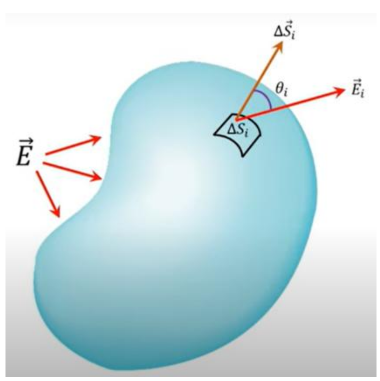
Flujo eléctrico Φ_E: que atraviesa la superficie se define como el producto del área A por el componente normal del campo eléctrico. Si la superficie es plana y el flujo es uniforme, a ese componente normal del campo eléctrico se le representa con $E \perp$, el flujo eléctrico es $\Phi_E = E \perp A$. $E \perp$ también se puede expresar con $E cos\ \theta$ donde θ es el ángulo entre E y una perpendicular a la superficie, así se tiene que $\Phi_E = EA cos\ \theta$, esto es para el caso particular de una superficie plana como se observa en la figura.



En el caso donde el campo eléctrico no es uniforme y la superficie tiene una forma general: Supongamos que se tiene una superficie general, la cual es atravesada por infinitas líneas de campo eléctrico, se debe dividir la superficie S en pequeñas áreas superficiales a los que llamaremos ΔS_i, por lo que el flujo eléctrico es la suma de todos los productos ΔS_i por el campo eléctrico que atraviesa cada una de esas áreas, es decir:

$$\Phi_E = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \overrightarrow{E_i}$$

Donde $\Delta\overrightarrow{S_i}$ es un vector perpendicular a la superficie con magnitud ΔS_i.



También esta sumatoria se puede expresar mediante la integral

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \, . \, d\vec{S}$$

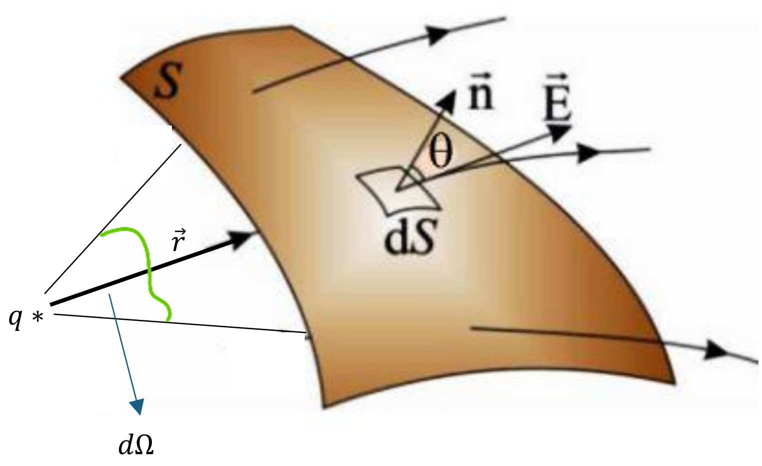
Superficie Gaussiana: Esta superficie en cuestión, denominada superficie gaussiana, es una construcción matemática que puede tener cualquier forma, siempre que esté cerrada, y se elige de manera que facilite los cálculos del flujo eléctrico.

Superficie cerrada: En el contexto de la ley de Gauss, la superficie considerada debe ser cerrada. Esto significa que no tiene que ser necesariamente una esfera, puede ser cualquier superficie cerrada. Por ejemplo, una esfera, un cilindro cerrado, un cubo, etc.

Carga eléctrica encerrada: Es la cantidad total de carga que está dentro de la superficie cerrada que se está considerando. La carga puede ser positiva, negativa o nula.

La ley de Gauss

Supongamos que se tiene una carga puntual q^* que crea un campo eléctrico que atraviesa una superficie infinitesimal ds, donde n es el vector n normal a la superficie, θ es el ángulo entre el vector superficie $\vec{n}$ y el campo $\vec{E}$. El vector superficie $d\vec{s} = ds.d\overrightarrow{\ }$



El diferencial de flujo a través de la superficie es $d\Phi = \vec{E}d\vec{s} = E.ds.\cos\theta$

Sea . $\vec{r}$ la distancia entre la carga y la superficie tenemos entonces

$d\Phi = E.ds.\cos\theta$

Por la ley de Coulomb $E = k\frac{q*}{r^2}$

$$d\Phi = \frac{kq^*}{r^2}\ ds.\cos\theta$$

Donde $\frac{ds.\cos\theta}{r^2}$ ángulo sólido con que se ve la superficie ds desde el punto donde se encuentra la carga.

Sea $d\Omega$ el ángulo sólido con que se la superficie

$$d\Phi = kq^* d\Omega$$

Para calcular el flujo completo en toda la superficie S, tenemos

$$\Phi = \oint_S\ d\Phi = kq^* \oint_S\ d\Omega$$

$$\Phi = kq^* \mathit{\Omega}$$

Ahora supongamos que tenemos una superficie S cerrada y envuelve a toda la carga, el ángulo sólido es 4π, además, $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, así el flujo es

$$\Phi = kq^* \mathit{\Omega}$$

$$\Phi = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right) q^*(4\pi)$$

$$\Phi = \frac{q^*}{\epsilon_0} = constante$$

Si se tiene un sistema de cargas puntuales $q_1, q_2,\ \dots, q_n$, de acuerdo con el principio de la superposición el campo E es igual a

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{E_i} \qquad (\blacksquare)$$

Principio de superposición de campos vectoriales: El principio de superposición de campos eléctricos establece que el campo eléctrico total en un punto debido a varias cargas es igual a la suma vectorial de los campos eléctricos creados por cada carga individualmente. Es decir, si tienes múltiples cargas, el campo eléctrico en un punto es la suma de los campos eléctricos producidos por cada una de esas cargas, teniendo en cuenta tanto la magnitud como la dirección de cada campo.

Si a la expresión ■ se multiplicamos por $d\vec{s}$ e integramos

$$\int_S \vec{E}\, d\vec{s} = \int_S \sum_{i=1}^{n} \vec{E_i} . d\vec{S}$$

$$\int_S \vec{E}\, d\vec{s} = \sum_{i=1}^{n} \int_S \vec{E_i}\, d\vec{S}$$

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i$$

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} k q_i^* \Omega_i$$

En el caso de que la superficie S es cerrada, es decir, encierra a todas las cargas q_i, desde cada punto de donde se encuentra la carga veremos a la superficie con el mismo ángulo sólido con que se ve una esfera desde su interior, por tanto $\Omega_i = 4\pi\ st$

Así

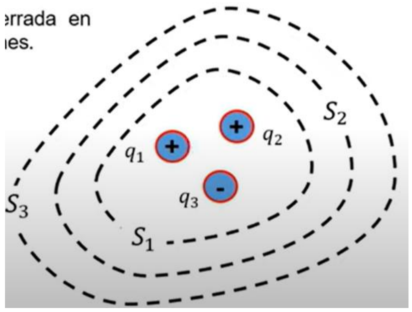
$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} k q_i^* \Omega_i$$

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right) q_i^* (4\pi)$$

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i^*$$

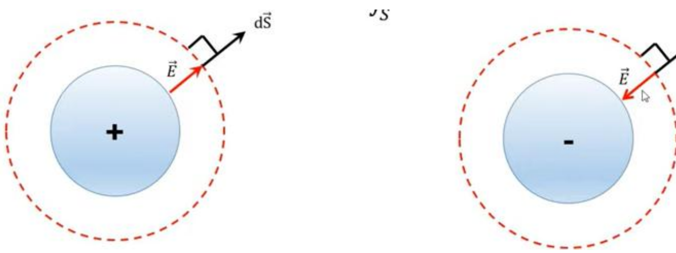
En términos generales, La ley de Gauss establece que el flujo eléctrico total a través de cualquier superficie cerrada (una superficie que encierra un volumen definido) es proporcional a la carga eléctrica total (neta) dentro de la superficie entre la constante de permitividad ϵ_0. $Q\ neta = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$ y $\epsilon_0 = 8{,}8542 \times 10^{-12} C^2/Nm^2$.

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} . d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i^* = \frac{Qneta}{\epsilon_0}$$



Nota importante:

El vector normal $d\vec{S}$ apunta hacia afuera del volumen encerrado por la superficie gaussiana, en cambio el vector del campo eléctrico apunta hacia afuera si la carga es positiva y apunta hacia adentro si la carga es negativa.



Para el caso de la ley de Gauss en su forma diferencial, podemos partir de su forma integral.

$$\oint_S \vec{E} \, . \, d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Por el teorema de la divergencia que establece que

$$\int_s \vec{E} d\vec{s} = \int_v \vec{\nabla}\vec{E} \, dv$$

Supongamos que se tiene una región con cierto volumen y que se tiene una carga neta, caracterizada por una distribución volumétrica ρ, de modo que para la carga neta q se puede expresar como

$$q = \int_V \rho \, dv$$

$$q = \rho \int_v dv$$

Así

$$\int_v \vec{\nabla}\vec{E} \, dv = \rho \int_v dv$$

$$\int_v \vec{\nabla}\vec{E}\, dv - \rho \int_v \, dv = 0$$

$$\int_v \left(\vec{\nabla}\vec{E} - \rho\right) dv = 0$$

Como el volumen es distinto de cero, entonces

$$\nabla\vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

$$\nabla\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \; forma\ diferencial\ de\ la\ ley\ de\ Gauss$$

Donde $\nabla\vec{E}$ es la divergencia del campo eléctrico, ρ es la densidad de carga volumétrica en el punto en el que se evalúa la divergencia del campo eléctrico, ϵ_0 permitividad del vacío.

Ley de Guss para dieléctricos o aislantes

Definición: Los aislantes son volúmenes sin cargas libres. El vacío es, por tanto, aislante. El vidrio, la mica y ciertos plásticos se encuentran entre los mejores aislantes. Los cuerpos aislantes se llaman dieléctricos.

Los materiales dieléctricos son materiales aislantes que pueden polarizarse mediante un campo eléctrico externo. Cuando un material dieléctrico se coloca en un campo eléctrico, las cargas positivas y negativas dentro del material se desplazan, creando superficies de carga ligadas. Estas cargas ligadas dan lugar a un campo eléctrico inducido, que se opone al campo eléctrico externo. El campo eléctrico neto en el dieléctrico es la suma vectorial de los campos externo e inducido.

Definición: Dipolo eléctrico es cada conjunto de dos cargas puntuales opuestas separadas.

La polarización ***P*** de un material aislante se refiere al fenómeno por el cual los dipolos eléctricos dentro de dicho material se alinean parcialmente bajo la influencia de un campo eléctrico externo. Un material aislante, o dieléctrico, está formado por átomos o moléculas que, en ausencia de un campo eléctrico, no tienen una distribución neta de carga (es decir, no tienen dipolos permanentes).

Cuando se aplica un campo eléctrico externo, las cargas positivas y negativas dentro de los átomos o moléculas del material se desplazan ligeramente, generando dipolos inducidos. La alineación de estos dipolos con el campo externo es lo que se conoce como polarización.
El campo eléctrico E en cada punto de un dieléctrico está creado solo por cargas eléctricas, incluidas las de polarización, la ley de Gauss para cada punto de un dieléctrico se escribe

$$\nabla E = \frac{\rho_t}{\epsilon_0}$$

Donde $\rho_t = \rho + \rho_p$ es la densidad volúmica de carga total.
y ρ la densidad de carga debida a otras cargas añadidas distintas de las de los dipolos o densidad volúmica de carga adicional, ρ_p es la densidad volumétrica de carga de polarización, sustituyendo $\rho_p = -\nabla P$, tenemos:

$$\nabla E = \frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0}$$

$$\nabla E = \frac{\rho - \nabla P}{\epsilon_0}$$

$$\nabla(\epsilon_0 E) + \nabla P = \rho$$

$$\nabla(\epsilon_0 E + P) = \rho$$

Sea

$$D = \epsilon_0 E + P$$

Donde D se llama vector desplazamiento eléctrico o, simplemente, vector desplazamiento, tiene la misma unidad que P C/m^2, $P = X_e \epsilon_0 E$ donde X_e es la susceptibilidad eléctrica del material. En materiales dieléctricos lineales, isótropos y homogéneos, la polarización es proporcional al campo eléctrico.
De modo que

$$D = \epsilon_0 E + P \quad (*)$$

$$D = \epsilon_0 E + (X_e \epsilon_0 E\ )$$
$$D = \epsilon_0 E(1 + X_e)$$

De aquí $1 + X_e = \epsilon_r$ que representa la permitividad relativa del material (un número adimensional que depende del material). En un aislante, el valor de ϵ_r puede ser mayor que 1, lo que reduce la intensidad del campo eléctrico en comparación con el vacío.

Así $D = \epsilon_0 \epsilon_r E$.

La Ley de Gauss modificada para aisladores, dada por la ecuación (*), incorpora los efectos de las cargas ligadas y la polarización del material, proporcionando una descripción completa de los campos eléctricos en presencia de materiales dieléctricos.

Resulta que la expresión $\nabla D = \rho$ es una forma muy sencilla de la ley de Gauss, válida si el medio es material aislante.

$$D = \epsilon_0 \epsilon_r E$$
$$\nabla D = \epsilon_0 \epsilon_r \nabla E$$
$$\rho = \epsilon_0 \epsilon_r \nabla E$$
$$\nabla E = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

Como en el vacío no hay moléculas polarizadas ni no polarizadas, la polarización P vale cero, así en la ecuación (*) $D = \epsilon_0 E$.

Como

$$\nabla D = \rho$$

y

$$\nabla E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Longrightarrow \rho = \epsilon_0 \nabla E$$

Así,

$$\nabla D = \epsilon_0 \nabla E = \rho$$
$$\nabla E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

que es la relación encontrada para el vacío. No es que la ley de Gauss para los dieléctricos añada algo que la misma ley para el vacío no contuviera, ya que se ha deducido de la ley para el vacío. Y, recíprocamente, de la ley de Gauss para los dieléctricos acabamos de deducir la ley para el vacío. Como a su vez la ley de Gauss para el vacío es equivalente a la ley de Coulomb, resulta que también la ley de Gauss para los dieléctricos es equivalente a la ley de Coulomb: cualquiera de las tres puede tomarse como axioma, como punto de partida para construir la Electrostática.

Nota: Si una carga puntual q está situada en un dieléctrico, aplicando la ley de Gauss a una superficie esférica de radio R y centro en la carga, como, por simetría, D es perpendicular a la superficie esférica, se tiene:

$$4\pi r^2 D = q$$

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}$$

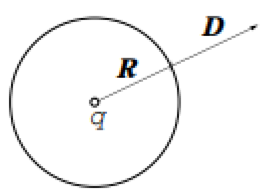
Como $\nabla D = \epsilon_0 \epsilon_R \nabla E$

$$D = \epsilon_0 \epsilon_r E$$

Así

$$E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{q}{4\pi r^2}$$

Es decir, la fórmula del campo que crea una carga puntual situada en un dieléctrico es la misma que en el vacío excepto que la permitividad es la del dieléctrico.



Campo de una carga en un medio dieléctrico.

Ejemplo:

Supongamos que tenemos un material dieléctrico con una densidad de carga libre uniforme ρ en su interior. La permitividad del material dieléctrico es ϵ. Calcular el campo eléctrico E en el interior de este material utilizando la ley de Gauss en su forma diferencial.

Solución: la lay de Gauss en forma diferencial es $\nabla D = \rho$, sabemos que D es el desplazamiento eléctrico que esta relacionado con el campo eléctrico E.

Por la fórmula integral de la ley de Gauss

$$\oint_S \vec{E}\,.\,d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Donde q es la carga libre encerrada dentro de la superficie gaussiana, considerando la superficie gaussiana una esfera de radio r por simetría radial del problema.

La carga libre encerrada dentro de una esfera es $q = \rho_f \frac{4\pi r^3}{3}$

La ley de Gauss en forma integral para una superficie esférica de radio r se convierte en:

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{\rho_f \frac{4\pi r^3}{3}}{\epsilon}$$

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{\rho_f 4\pi r^3}{3\epsilon}$$

$$E(r) = \frac{\rho_f 4\pi r^3}{3\epsilon 4\pi r^2}$$

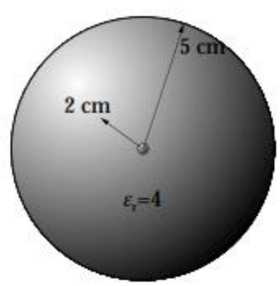
$$E(r) = \frac{\rho_f r}{3\epsilon}$$

El campo eléctrico aumenta de manera **lineal** con la distancia r desde el centro del material dieléctrico. Este comportamiento es característico de un campo generado por una distribución de carga uniforme en un volumen.

Ejemplo 2:

Una esfera de dieléctrico de 5 cm de diámetro y permitividad relativa 4, rodeada de aire, tiene en su centro una carga esférica de 10 μC de radio despreciable. Hallar el campo eléctrico, la polarización y el desplazamiento en un punto que dista 2 cm del centro.

Solución: como se trata de una sola carga puntual, aplicamos la fórmula



Solución: Como el dieléctrico es isótropo y la carga es positiva, el campo eléctrico, la polarización y el desplazamiento tienen la dirección del radio y sentido hacia fuera de la esfera

$$E = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{q}{4\pi r^2}$$

$$E = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)\left(\frac{1}{\epsilon_r}\right)\left(\frac{q}{r^2}\right)$$

como el radio está en centímetros, debemos transformarlo a metros así $r = 2 \times 10^{-2} m$

$$E = \left[\frac{1}{4\pi(8.8542 \times 10^{-12}\ C^2/Nm^2)}\right]\left(\frac{1}{4}\right)\left[\frac{10 \times 10^{-6}}{(2 \times 10^{-2})^2}\right]$$

$$E = \left(\frac{8.9875 \times 10^9\ Nm^2}{4}\right)\left[\frac{10 \times 10^{-6}}{(2 \times 10^{-2} m)^2}\right]$$

$$E = 5.6172 \times 10^7 N/C$$

Polarización: $x = \epsilon_r - 1 = 4 - 1 = 3$

$P = X_e \epsilon_0 E = 3(8.8542 \times 10^{-12}\ C^2 N/m^2)(5.6172 \times 10^7\ N/C)$

$$P = 1.49207 \times 10^{-3} \frac{C}{m^2}$$

$$P = 1.49207\ \ mC/m^2$$

Desplazamiento:

$$D = \epsilon_0 \epsilon_r E$$

$$D = \left(8.8542 \times 10^{-12} \frac{C^2 N}{m^2}\right)(4)\left(5.6172 \times \frac{10^7 N}{C}\right)$$

$$D = 1.9894 \times 10^{-3} \frac{C}{m^2} = 1.9894\, mC/m^2$$