FUNÇÃO EXPONENCIAL

FUNÇÃO EXPONENCIAL

A **função exponencial** é utilizada para descrever e modelar o comportamento de várias situações no nosso dia a dia. Podemos observá-la, por exemplo, na matemática financeira, em situações que envolvem juros compostos, em reprodução de cultura de bactérias, e até mesmo o comportamento de novos casos da covid-19, durante a pandemia em 2020, aproxima-se muito de um comportamento exponencial.

FUNÇÃO EXPONENCIAL

A **lei de formação da função exponencial é f(x) = a^x**, podendo gerar um gráfico crescente ou decrescente, dependo do valor da base “a”. A função inversa da função exponencial é a função logarítmica.

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Definição da função exponencial

Definimos como função exponencial quando seu domínio é o conjunto dos números reais, e seu contradomínio é o conjunto dos números reais positivos diferentes de 0. Além disso, a sua lei de formação pode ser descrita por $f(x) = a^x$, em que ‘a’ é a base, cujo valor sempre será um número real positivo.

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Exemplos:

$f(x) = 2^x$
$f(x) = 0{,}3^x$

Podemos observar que f(x) é a variável dependente, podendo ser representada por y também, e x é a variável independente.

FUNÇÃO EXPONENCIAL

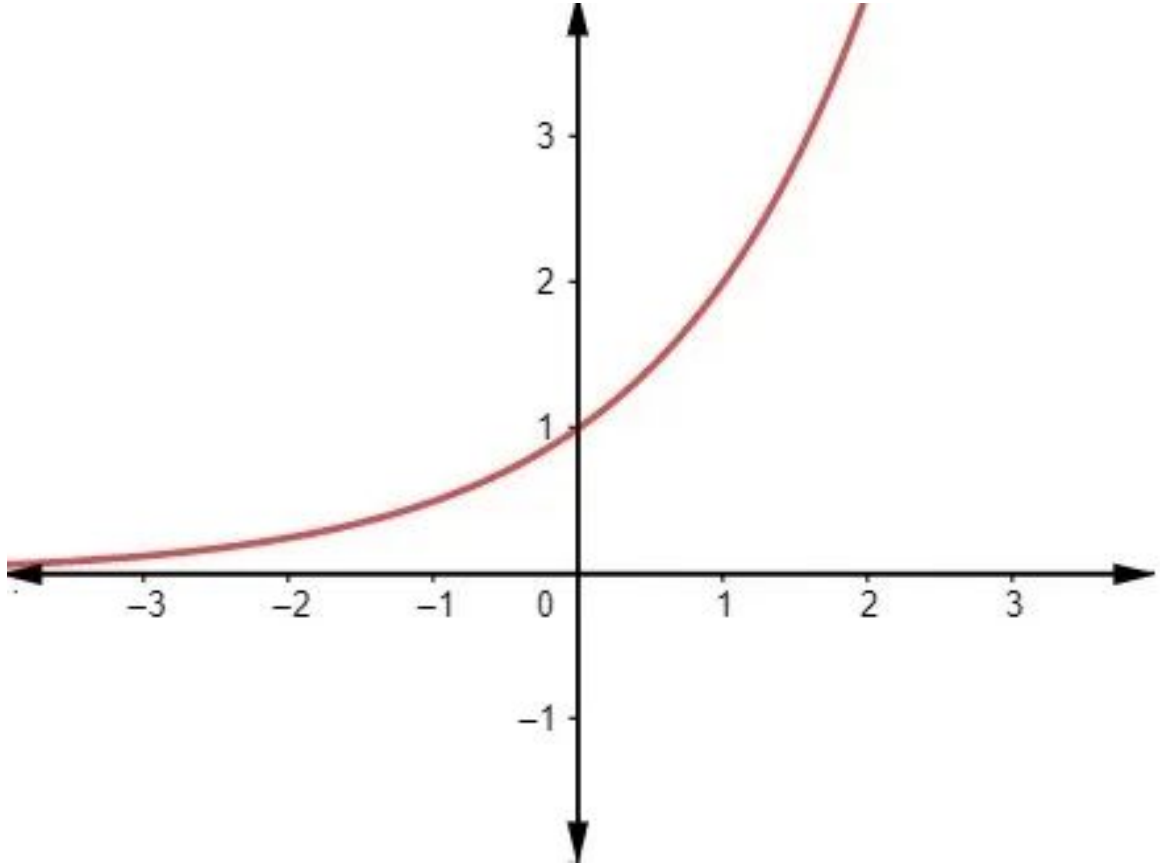
Tipos de função exponencial

Podemos dividir a função exponencial em dois casos: crescente ou decrescente.

O gráfico da função $f(x) = a^x$ é **crescente quando a base é um número maior do que 1**, ou seja, quando $a > 1$. Nesse caso, quanto maior o valor de x maior será o valor de y.

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Exemplo:



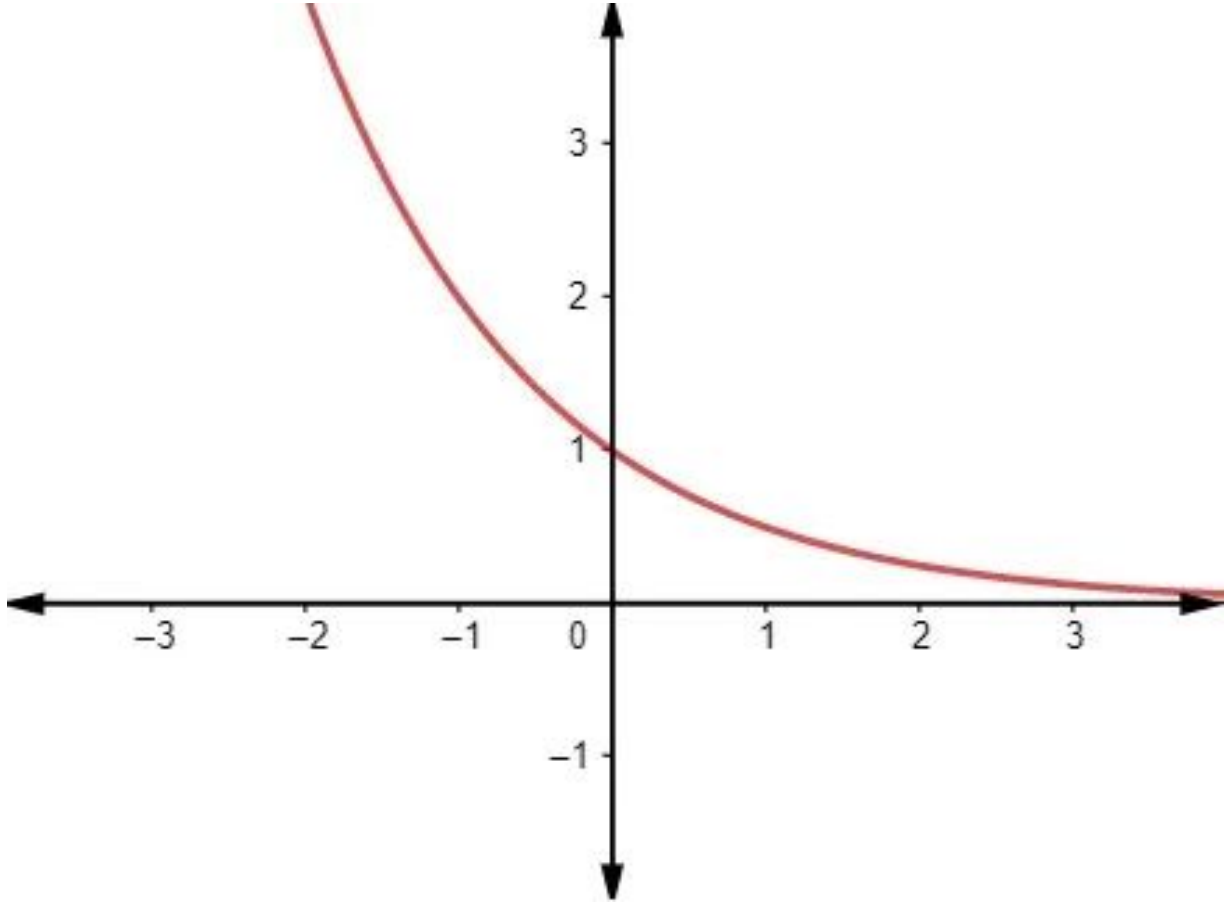
FUNÇÃO EXPONENCIAL

Tipos de função exponencial

A função exponencial é **decrescente quando a base é um número maior que 0 e menor que 1**, ou seja, quando 0<a<1. Caso ela seja decrescente, quanto maior o valor de x menor será o valor de y.

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Exemplo:



FUNÇÃO EXPONENCIAL

Propriedades de potência

Potência de uma fração

Como consequência da propriedade da potência de um quociente, lembrando que a fração é uma divisão, ao calcular uma potência de uma fração, podemos separar a potência desta forma:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Propriedades de potência

Potência de uma fração

Como consequência da propriedade da potência de um quociente, lembrando que a fração é uma divisão, ao calcular uma potência de uma fração, podemos separar a potência desta forma:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Propriedades de potência

Exemplos:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1^3}{4^3} = \frac{1}{64}$

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Propriedades de potência

Potência com um expoente negativo

Para calcular a potência de um expoente negativo, escrevemos o inverso da base e trocamos o sinal do expoente.

$$a^{-n}\left(\frac{1}{a}\right)^{n}$$

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Propriedades de potência

Potência com um expoente negativo

Quando a base da potência for um número inteiro, basta escrevermos um sobre a base.
Quando a base for um número decimal, é necessário realizar a sua representação como uma fração. Quando a base é uma fração, para encontrar o inverso de uma fração, invertemos o numerador com o denominador.

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Propriedades de potência

Exemplos:

$$a)\ 2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$b)\ 10^{-5} = \left(\frac{1}{10}\right)^{5} = \frac{1^5}{10^5} = \frac{1}{100.000}$$

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Propriedades da função exponencial

1ª propriedade

Em uma função exponencial, f(0) = 1. Essa propriedade não passa de uma **consequência das propriedades de potência**, já que a base de todo número diferente de 0 elevado a 0 é igual a 1.

$$f(0) = a^0 = 1$$

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Propriedades da função exponencial

2ª propriedade

A função exponencial é injetiva. Isso significa que, para **valores diferentes de x, a imagem também será diferente**, ou seja, $f(x_1) \neq f(x_2)$ com $x_1 \neq x_2$. Ser injetiva significa que, para valores diferentes de y, existirá um único valor de x que faz com que f(x) seja igual a y.

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Propriedades da função exponencial

3ª propriedade

Como vimos em um tópico anterior, o gráfico da função exponencial pode ser crescente, se a base for maior que 1 (a >1), e decrescente, caso a base seja um número menor que 1 e maior que 0 (0<a<1).

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Propriedades da função exponencial

4ª propriedade

O gráfico da função exponencial nunca corta o eixo x. Por menor que seja o valor da imagem, ele nunca chegará a ser 0. Dizemos que ele tende a 0, mas não existe valor de x que faça com que f(x) = 0.

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Gráfico da função exponencial

Para traçar o gráfico de uma função exponencial, é necessário **encontrar o valor numérico para alguns valores de x.** Existem duas possibilidades para o comportamento do gráfico, ele pode ser crescente ou decrescente. Quando o gráfico é crescente, a função exponencial é caracterizada por possuir um **crescimento muito rápido** em comparação, por exemplo, com a função afim.

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Gráfico da função exponencial

Podemos observar que **o gráfico não passa pelo 3º e 4º quadrante do plano cartesiano**, pois o contradomínio será, como vimos na definição, os reais positivos e maiores que 0. Por mais próximo que o gráfico chegue do eixo x, ele não o tocará, **não há valor algum no domínio que faça com que a^x seja igual a 0**, lembrando que, por definição, a base é sempre maior do que 0.

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Exemplo:

Construa os gráficos das funções

a) $f(x) = 3^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Exemplo:

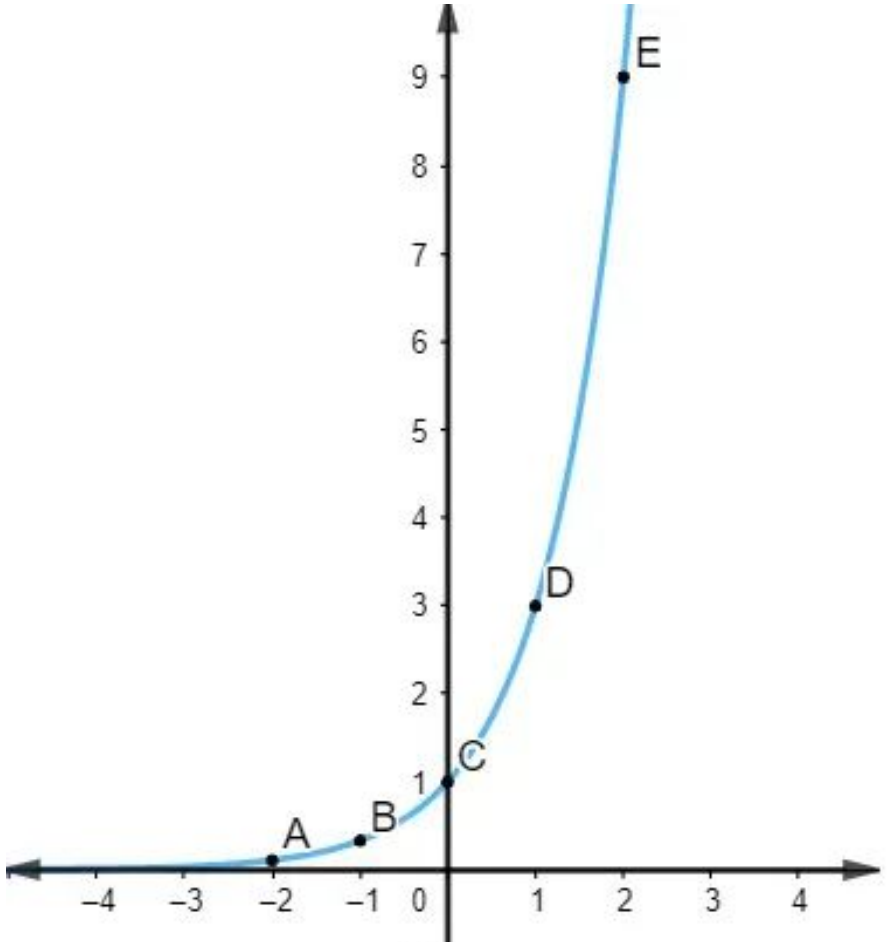
a) f(x) = 3^x

Como a >1, então essa função é crescente. Para construir o gráfico, vamos construir a tabela com alguns valores numéricos da função.

x	$f(x) = 3^x$	(x, y)
-2	$f(x) = 3^{-2} = \frac{1}{9}$	$A\left(-2, \frac{1}{9}\right)$
-1	$f(x) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$	$B\left(-1, \frac{1}{3}\right)$
0	$f(x) = 3^0 = 1$	$C\,(0, 1)$
1	$f(x) = 3^1 = 3$	$D\,(1, 3)$
2	$f(x) = 3^2 = 9$	$E\,(2, 9)$

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Após encontrar alguns valores numéricos, é possível representar no plano cartesiano gráfico da função:



FUNÇÃO EXPONENCIAL

b) f(x) = $\left(\frac{1}{2}\right)^x$

Nesse caso, a base é menor que 1, ou seja, 0<a<1, logo o gráfico será decrescente. O fato de ele ser decrescente não altera o método que utilizaremos para construí-lo, assim como foi feito no outro, encontraremos alguns valores numéricos.

x	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	(x, y)
-2	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$	$A(-2, 4)$
-1	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$	$B(-1, 2)$
0	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$	$C(0, 1)$
1	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$	$D\left(1, \frac{1}{2}\right)$
2	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$	$E\left(2, \frac{1}{4}\right)$

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Após encontrar alguns valores numéricos, é possível representar no plano cartesiano o gráfico da função:

