1. Kérdés: Az $a(2027)$ konkrét értékének felírása

Helyettesítsünk $n = 2027$-et a sorozat általános képletébe. Ekkor a szumma $k = 1$-től 2027-ig fut:

$$a(2027) = \sum_{k=1}^{2027} \frac{1}{2027^2 + k} = \frac{1}{2027^2 + 1} + \frac{1}{2027^2 + 2} + \ldots + \frac{1}{2027^2 + 2027}$$

- **Numerikus közelítő érték:** $a(2027) \approx 0,0004932182$

2. Kérdés: Konvergencia és a határérték meghatározása

A sorozat konvergens. A határérték kiszámítására két különböző szemléletű matematikai módszert is bemutatunk.

A) Módszer: Átalakítás Riemann-összeggé (Integrálközelítés)

Emeljünk ki a nevezőből n-et, majd vigyük ki az így kapott $\frac{1}{n}$ tényezőt a szumma elé:

$$a(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n \cdot \left(2027 + \frac{k}{n}\right)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2027 + \frac{k}{n}}$$

Ha $n \to \infty$, ez a kifejezés formálisan megegyezik az $f(x) = \frac{1}{2027+x}$ függvény $[0, 1]$ intervallumon vett **jobboldali Riemann-féle integrálközelítő összegével**, ahol a felosztásköz $\Delta x = \frac{1}{n}$, az osztáspontok pedig $x_k = \frac{k}{n}$.

Mivel az $f(x)$ függvény a zárt $[0, 1]$ intervallumon folytonos, a Riemann-összegek határértéke megegyezik a határozott integrállal:

$$\lim_{n\to\infty} a(n) = \int_0^1 \frac{1}{2027 + x}\, dx = \Big[\ln|2027 + x| \Big]_0^1$$

$$\lim_{n\to\infty} a(n) = \ln(2028) - \ln(2027) = \ln\left(\frac{2028}{2027}\right)$$

- **A határérték közelítő értéke:** $\approx 0,0004932183$

B) Módszer: Közelítés Harmonikus számokkal (Aszimptotikus becslés)

A sorozat tagja felírható két harmonikus részletösszeg különbségeként is. Jelölje $H_m = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i}$ az m-edik harmonikus számot:

$$a(n) = H_{2028n} - H_{2027n}$$

Ismert, hogy a harmonikus számok aszimptotikus viselkedése nagy m esetén: $H_m \approx \ln(m) + \gamma$ (ahol γ az Euler–Mascheroni konstans). Ezt alkalmazva:

$$a(n) \approx \big(\ln(2028n) + \gamma\big) - \big(\ln(2027n) + \gamma\big) = \ln(2028n) - \ln(2027n) = \ln\left(\frac{2028n}{2027n}\right) =$$

Mivel a hibatagok $n \to \infty$ esetén 0-hoz tartanak, a sorozat határértéke valóban:

$$\lim_{n\to\infty} a(n) = \ln\left(\frac{2028}{2027}\right)$$