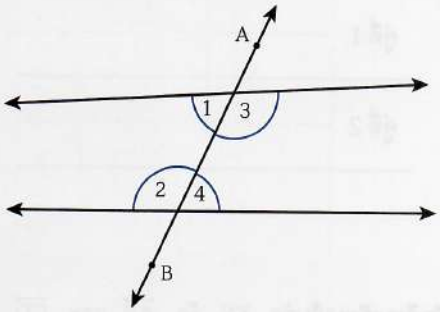
3.2 เส้นขนานและมุมแย้ง

พิจารณารูปต่อไปนี้

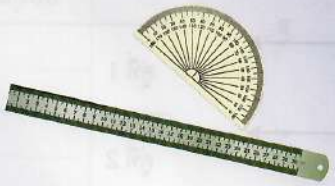


จากรูป เรียก $\hat{1}$ และ $\hat{4}$ ว่าเป็น**มุมแย้งกัน**
และ เรียก $\hat{2}$ และ $\hat{3}$ ว่าเป็น**มุมแย้งกัน**

กิจกรรม : สำรวจมุมแย้ง

อุปกรณ์

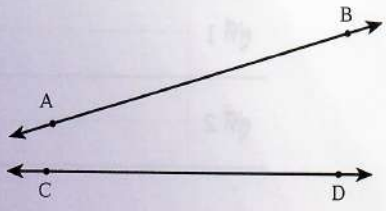
- ไม้บรรทัด
- โพรแทรกเตอร์



ขั้นตอนการทำกิจกรรม

1. ในแต่ละข้อกำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ **ไม่ขนานกัน** ให้นักเรียนเขียนเส้นตัด XY ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ โดยให้ จุด M และจุด N เป็นจุดตัดบน $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ตามลำดับ จากนั้นให้ระบุว่า มุมคู่ใดบ้างที่เป็นมุมแย้งกัน พร้อมทั้งวัดขนาดของมุมเหล่านั้น แล้วเติมลงในตารางให้สมบูรณ์

1)

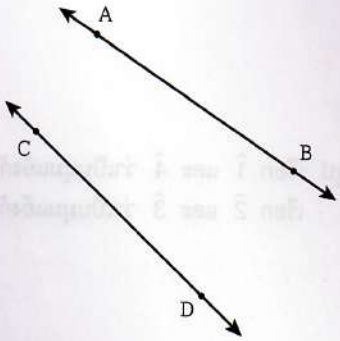


	ชื่อมุม	ขนาดของมุม
คู่ที่ 1		
คู่ที่ 2		

มุมเทคโนโลยี

นักเรียนสามารถดาวน์โหลดไฟล์ GSP เพื่อสำรวจเพิ่มเติมเกี่ยวกับมุมแย้ง ได้ที่ http://ipst.me/9150

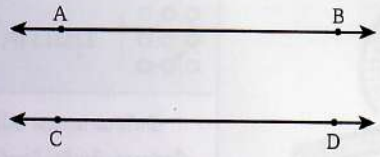
2)



	ชื่อมุม	ขนาดของมุม
คู่ที่ 1		
คู่ที่ 2		

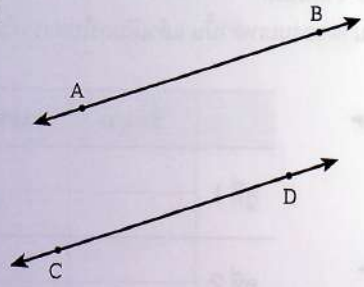
2. ในแต่ละข้อกำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ขนานกัน ให้นักเรียนเขียนเส้นตัด XY ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ โดยให้ จุด M และจุด N เป็นจุดตัดบน $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ตามลำดับ จากนั้นให้ระบุว่า มุมคู่ใดบ้างที่เป็นมุมแย้งกัน พร้อมทั้งวัดขนาดของมุมเหล่านั้น แล้วเติมลงในตารางให้สมบูรณ์

1)



	ชื่อมุม	ขนาดของมุม
คู่ที่ 1		
คู่ที่ 2		

2)

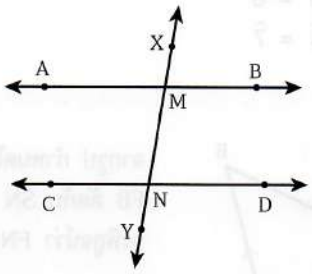


	ชื่อมุม	ขนาดของมุม
คู่ที่ 1		
คู่ที่ 2		

3. จากตารางในข้อ 1 และข้อ 2 ให้นักเรียนสังเกตและสร้างข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับขนาดของมุมแย้งกับการขนานกันของเส้นตรงคู่นั้น

จากกิจกรรม : สำรวจมุมแย้ง ข้างต้น จะเห็นว่า สิ่งที่สำรวจได้คือ "ถ้า $\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$ และมี $\overleftrightarrow{XY}$ เป็นเส้นตัด แล้ว มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน" ซึ่งเป็นข้อสรุปที่เป็นไปตามทฤษฎีบท ที่สามารถแสดงการพิสูจน์ได้ ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน



กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{XY}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด M และ N ตามลำดับ

ต้องการพิสูจน์ว่า $A\hat{M}N = D\hat{N}M$ และ $B\hat{M}N = C\hat{N}M$

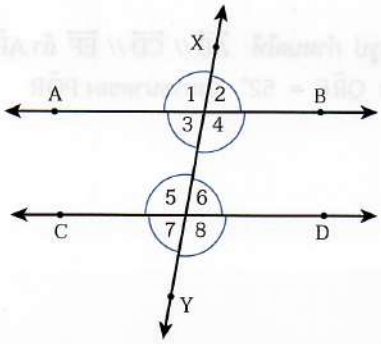
พิสูจน์

	$\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$	(กำหนดให้)
	$B\hat{M}N + D\hat{N}M = 180^\circ$	(ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดที่ตัดเส้นขนานรวมกันเท่ากับ 180°)
	$B\hat{M}N + A\hat{M}N = 180^\circ$	(ขนาดของมุมตรง)
ดังนั้น	$B\hat{M}N + A\hat{M}N = B\hat{M}N + D\hat{N}M$	(สมบัติของการเท่ากัน)
จะได้	$A\hat{M}N = D\hat{N}M$	(สมบัติของการเท่ากัน)

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $B\hat{M}N = C\hat{N}M$

นักเรียนสามารถนำผลจากทฤษฎีบทนี้ ไปใช้อ้างอิงในการพิสูจน์และแก้ปัญหาได้

ตัวอย่างที่ 1

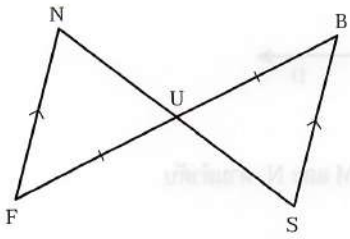


กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$ และมี $\overleftrightarrow{XY}$ เป็นเส้นตัด ดังรูป จงอธิบายว่ามุมคู่ใดมีขนาดเท่ากันบ้าง

วิธีทำ เนื่องจาก $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{XY}$ เป็นเส้นตัด
จะได้มุมแย้งมีขนาดเท่ากันคือ $\hat{3} = \hat{6}$ และ $\hat{4} = \hat{5}$
เนื่องจาก $\overleftrightarrow{XY}$ ตัดกับ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$
จะได้มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากันคือ $\hat{1} = \hat{4}$, $\hat{2} = \hat{3}$, $\hat{5} = \hat{8}$ และ $\hat{6} = \hat{7}$
โดยสมบัติของการเท่ากัน สรุปได้ว่ามีมุมที่มีขนาดเท่ากันอยู่ 2 ชุด ดังนี้

1) $\hat{1} = \hat{4} = \hat{5} = \hat{8}$
2) $\hat{2} = \hat{3} = \hat{6} = \hat{7}$

ตัวอย่างที่ 2

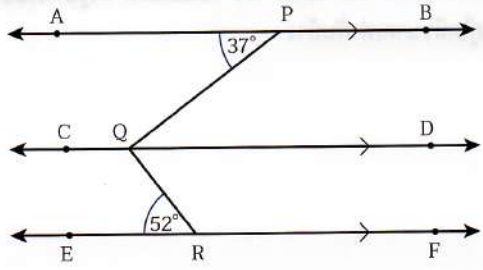


จากรูป กำหนดให้ $\overline{FN} // \overline{SB}$, $\overline{FB}$ ตัดกับ $\overline{SN}$ ที่จุด U และ FU = BU
จงพิสูจน์ว่า FN = BS

กำหนดให้ $\overline{FN} // \overline{SB}$, $\overline{FB}$ ตัดกับ $\overline{SN}$ ที่จุด U และ FU = BU
ต้องการพิสูจน์ว่า FN = BS
พิสูจน์ พิจารณา ΔFUN และ ΔBUS
$\overline{FN} // \overline{SB}$ และมี $\overline{FB}$ เป็นเส้นตัด

$N\hat{F}U = S\hat{B}U$		(ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)
FU = BU		(กำหนดให้)
$F\hat{U}N = B\hat{U}S$		(ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน)
ดังนั้น $\Delta FUN \cong \Delta BUS$		(ม.ด.ม.)
จะได้ FN = BS		(ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน)

ตัวอย่างที่ 3



จากรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{EF}$ ถ้า $A\hat{P}Q = 37^\circ$ และ $Q\hat{R}E = 52^\circ$ จงหาขนาดของ $P\hat{Q}R$

วิธีทำ เนื่องจาก $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

จะได้ $P\hat{Q}D = 37^\circ$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)

เนื่องจาก $\overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{EF}$

จะได้ $D\hat{Q}R = 52^\circ$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)

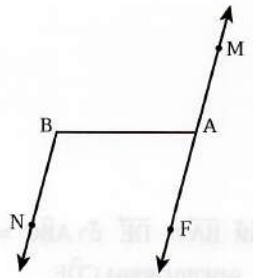
เนื่องจาก $P\hat{Q}R = P\hat{Q}D + D\hat{Q}R$

จะได้ $P\hat{Q}R = 37 + 52 = 89^\circ$

ตอบ 89°

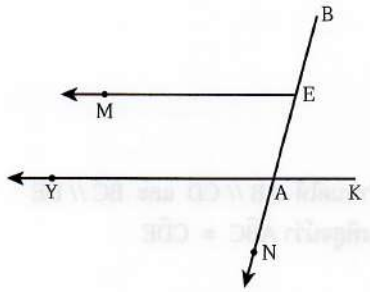
แบบฝึกหัด 3.2 ก

1.



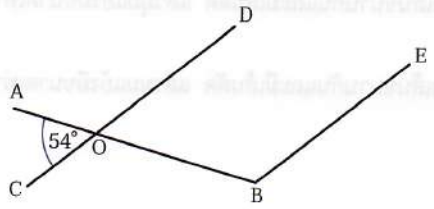
จากรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{BN} // \overleftrightarrow{MF}$ จงหาว่า $M\hat{A}B$ มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมใด เพราะเหตุใด

2.



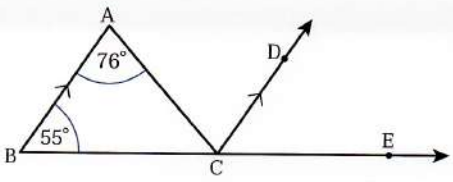
จากรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{EM} // \overleftrightarrow{KY}$ จงหาว่า $M\hat{E}A$ มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมใด เพราะเหตุใด

3.



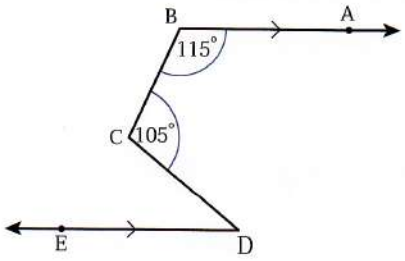
จากรูป กำหนดให้ $\overline{CD} // \overline{BE}$ และ $A\hat{O}C = 54°$ จงหาขนาดของ $O\hat{B}E$

4.



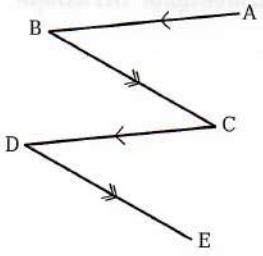
จากรูป กำหนดให้ $\overrightarrow{BA} // \overrightarrow{CD}$ ถ้า $A\hat{B}E = 55°$ และ $B\hat{A}C = 76°$ จงหาขนาดของ $A\hat{C}E$

5.



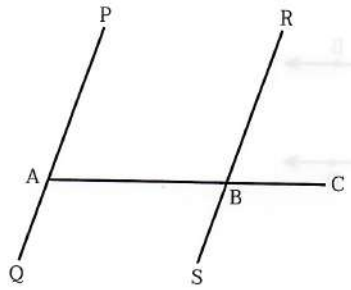
จากรูป กำหนดให้ $\overrightarrow{BA} // \overrightarrow{DE}$ ถ้า $A\hat{B}C = 115°$ และ $B\hat{C}D = 105°$ จงหาขนาดของ $C\hat{D}E$

6.



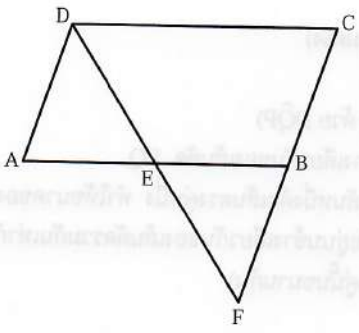
กำหนดให้ $\overline{AB} // \overline{CD}$ และ $\overline{BC} // \overline{DE}$ จงพิสูจน์ว่า $A\hat{B}C = C\hat{D}E$

7.



จากรูป กำหนดให้ $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$
จงพิสูจน์ว่า $P\hat{A}C = R\hat{B}C$

8.

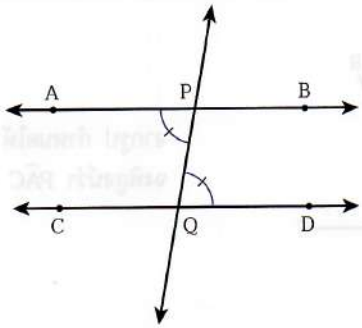


จากรูป กำหนดให้ □ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน E เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ ส่วนต่อของทั้ง $\overline{DE}$ และ $\overline{CB}$ ตัดกันที่จุด F จงพิสูจน์ว่า DE = FE

ในการตรวจสอบว่า เส้นตรงสองเส้นขนานกันหรือไม่ นอกจากจะพิจารณาจากขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดที่ตัดเส้นตรงทั้งสองแล้ว ยังสามารถพิจารณาจากขนาดของมุมแย้งได้ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน





กำหนดให้ $\overleftrightarrow{PQ}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ทำให้ $A\hat{P}Q$ และ $D\hat{Q}P$ เป็นมุมแย้งที่มีขนาดเท่ากัน

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

พิสูจน์

$A\hat{P}Q + B\hat{P}Q = 180^\circ$		(ขนาดของมุมตรง)
$A\hat{P}Q = D\hat{Q}P$		(กำหนดให้)
$D\hat{Q}P + B\hat{P}Q = 180^\circ$		(แทน $A\hat{P}Q$ ด้วย $D\hat{Q}P$)

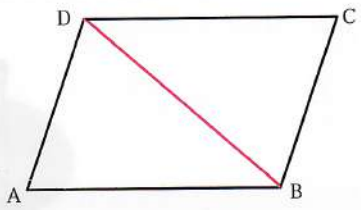
และเนื่องจาก $D\hat{Q}P$ และ $B\hat{P}Q$ เป็นมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด PQ

ดังนั้น $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180° แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน)

ทฤษฎีบทข้างต้นนี้เป็นบทกลับของทฤษฎีบทที่ว่า "ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน" เมื่อนำทฤษฎีบททั้งสองนี้มาเขียนใหม่โดยใช้ "ก็ต่อเมื่อ" จะได้ทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบท เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อ มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $\square ABCD$ มี $AB = CD$ และ $AD = CB$ จงพิสูจน์ว่า $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$



กำหนดให้ $\square ABCD$ มี $AB = CD$ และ $AD = CB$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{AB} // \overline{CD}$

พิสูจน์ ลาก $\overline{BD}$

พิจารณา ΔABD และ ΔCDB

$AB = CD$		(กำหนดให้)
$AD = CB$		(กำหนดให้)
$BD = DB$		($\overline{BD}$ เป็นด้านร่วม)
ดังนั้น	$\Delta ABD \cong \Delta CDB$	(ด.ด.ด.)
จะได้	$A\hat{B}D = C\hat{D}B$	(มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

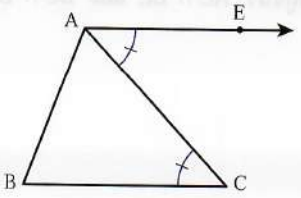
และเนื่องจาก $A\hat{B}D$ และ $C\hat{D}B$ เป็นมุมแย้งกัน

ดังนั้น $\overline{AB} // \overline{CD}$ (ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน)

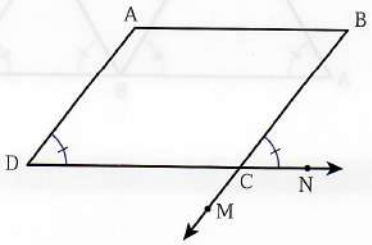
แบบฝึกหัด 3.2 ข

1. จากรูปที่กำหนดให้ จงหาว่าเส้นตรง รังสี หรือส่วนของเส้นตรงคู่ใดขนานกัน พร้อมทั้งให้เหตุผล

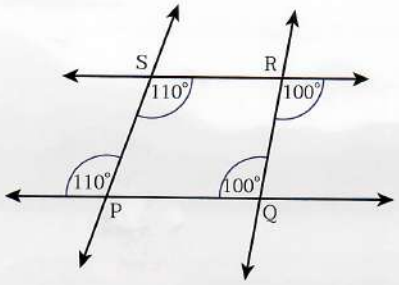
1)



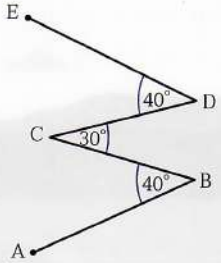
2)



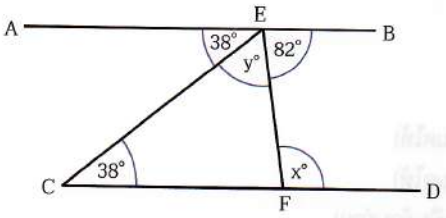
3)



4)

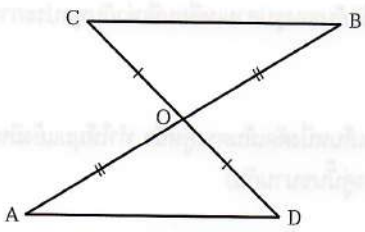


2.



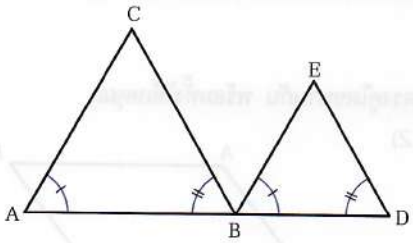
จากรูป จงหาค่าของ x และ y

3.



จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ แบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน ที่จุด O จงพิสูจน์ว่า AD = BC และ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

4.



จากรูป กำหนดให้ $C\hat{A}B = E\hat{B}D$ และ $A\hat{B}C = B\hat{D}E$ จงพิสูจน์ว่า $\overline{AC} \parallel \overline{BE}$ และ $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$

