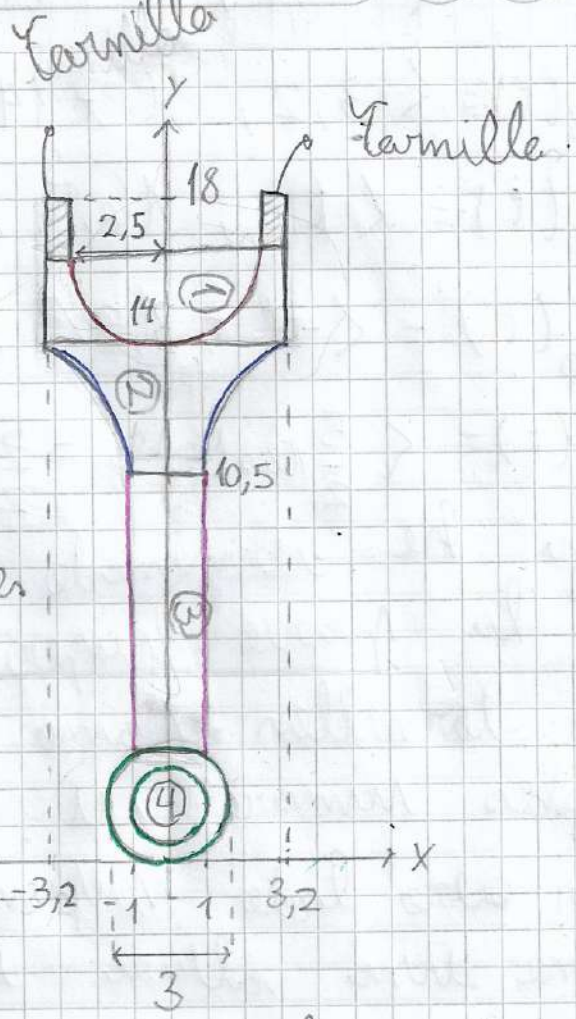
Actividad / Mate B



- Parametrización Objeto:

En 2D:

La forma de la biela se consiguió como una composición de funciones, para a dar las parametrizaciones

- $\vec{\Gamma}_1(t) = \langle \cos(t) + \frac{3}{2}, \operatorname{sen}(t) + \frac{3}{2} \rangle$
  $t \in [0, 2\pi)$
- $\vec{\Gamma}_2(t) = \langle \frac{3}{2}\cos(t), \frac{3}{2}\operatorname{sen}(t) + \frac{3}{2} \rangle$
  $t \in [0, 2\pi)$

He hecho la parametrización de las dos circunferencias inferiores.

- $\vec{\Gamma}_3(t) = \langle -1, t+3 \rangle, \quad t \in [0, 7,5]$
- $\vec{\Gamma}_4(t) = \langle 1, t+3 \rangle, \quad t \in [0, 7,5]$

Ahora, he parametrizado las dos rectas que conectan la parte inferior con la superior de la biela.

- $\vec{\Gamma}_5(t) = \langle t, -\frac{5}{|t|} + \frac{31}{2} \rangle \quad t \in [-3,2, -1]$
- $\vec{\Gamma}_6(t) = \langle t, -\frac{5}{|t|} + \frac{31}{2} \rangle \quad t \in [1, 3,2]$

En este punto he parametrizado la región curva de la biela.

- $\vec{r}_7(t) = \langle -3{,}2,\ t + 14 \rangle,\quad t \in [0,\ 2{,}5]$
- $\vec{r}_8(t) = \langle 3{,}2,\ t + 14 \rangle,\quad t \in [0,\ 2{,}5]$
- $\vec{r}_9(t) = \langle t,\ 16{,}5 \rangle,\quad t \in [-3{,}2,\ -2{,}5]$
- $\vec{r}_{10}(t) = \langle -t + 3{,}2,\ 16{,}5 \rangle,\quad t \in [0,\ 0{,}7]$
- $\vec{r}_{11}(t) = \langle \frac{5}{2}\cos(t),\ -\frac{5}{2}\operatorname{sen}(t) + 16{,}5 \rangle \quad t \in [0,\ \pi]$

Se ha realizado la parametrización de la vista superior de la tuerca, las tornillos serán consideradas cilindros de las cuales se sumará su volumen luego. Por otro lado suponemos que la tuerca tiene una altura uniforme de 2cm, por lo que su volumen total será el área superficial multiplicada por $h = 2$

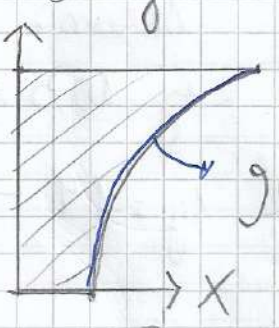
- Dividí la Biela en 4 regiones de las cuales iré estudiando el área:

- Región (1): Consideramos el área de está región como el área de un rectángulo menos el área de media circunferencia, donde la longitud de los lados del rectángulo es: 4,4cm y 2,5cm y el radio de la circunferencia es: 2,5cm

$$\text{Área} = (4{,}4\text{cm} \cdot 2{,}5\text{cm}) - \frac{\pi \cdot (2{,}5\text{cm})^2}{2} \approx 1{,}18\text{cm}^2$$

Actividad / Mate B

Región (2): Para esta región vamos a plantear:



Realizamos la integral de un lado ($x > 0$) y la multiplicamos por 2 ya que la pieza es simétrica.

- Resulta más sencillo plantear la región tipo 2, por lo que despejo X de $g(x)$:

$$y = -\frac{5}{x} + \frac{31}{2} \longrightarrow y - \frac{31}{2} = -\frac{5}{x}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{5}\left(y - \frac{31}{2}\right) = \frac{1}{x} \longrightarrow -\frac{y}{5} + \frac{31}{10} = \frac{1}{x}$$

$$x\left(-\frac{y}{5} + \frac{31}{10}\right) = 1 \longrightarrow h(Y) = \frac{1}{\left(-\frac{y}{5} + \frac{31}{10}\right)}$$

$$\boxed{h(y) = \frac{10}{-2y + 31}}$$

$$\text{Región tipo 2} = \left\{ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 10{,}5 \leq y \leq 14 \wedge 0 \leq x \leq \frac{10}{-2y+31} \right\}$$

$$\text{Área} = \left[\int_{10{,}5}^{14} \int_{0}^{\frac{10}{-2y+31}} 1 \, dx \, dy \right] \times 2 = 2 \int_{10{,}5}^{14} \frac{10}{-2y+31} \, dy$$

- Sustituya: $u = -2y + 31$

$du = -2\,dy$

$dy = \frac{du}{-2}$

y los límites de integración serán:

$y = 10{,}5 \rightarrow u = 10$

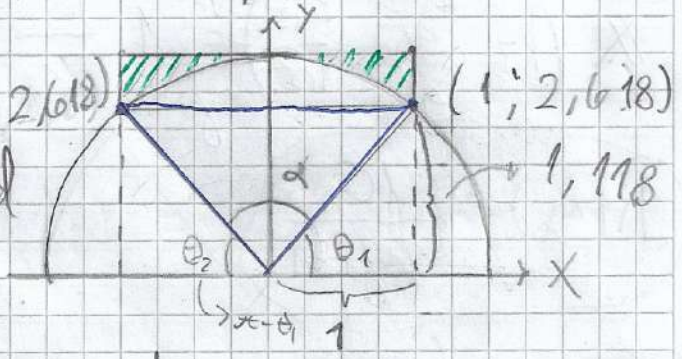
$y = 14 \rightarrow u = 3$

$$-2\int_3^{10} \frac{10}{u}\,\frac{du}{-2} = 10 \cdot \ln|u| \Big|_3^{10} \approx 12{,}04\ cm^2$$

Región (3): Tenemos un rectángulo de altura $(10{,}5 - 3)$ cm y ancho 2 cm

Área $\approx 7{,}5\ cm \times 2\ cm = 15\ cm^2$

- Realizo un zoom en las puntas de unión entre la circunferencia (inferior) y el rectángulo



$\theta = \arccos(1{,}118) \approx 0{,}841$ rad

Por la tanta

$0{,}841\ rad \leq \alpha \leq \pi - 0{,}841 \approx 2{,}3\ rad$

Utilizo Coordenadas Polares:

$x = r \cdot \cos(\alpha)$

$y = r \cdot \sin(\alpha) + 3/2$

$0{,}841 \leq \alpha \leq 2{,}3$

despeja ahora los límites de integración

Actividad / Mate B

de r: Sabemos que $r \leq \frac{3}{2}$ y. verá mayor si la recta $y = 2,618$

Entonces: $2,618 = r \cdot \operatorname{sen}(\alpha) + \frac{3}{2}$

$\rightarrow r \geq \frac{2,618 - 1,5}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{1,118}{\operatorname{sen}(\alpha)}$

$\therefore$ El área será: $\int_{\frac{21}{25}}^{2,3} \int_{\frac{1,118}{\operatorname{sen}(\alpha)}}^{3/2} r \, dr \, d\alpha$ ← Jacobiano

$$= \int_{21/25}^{2,3} \frac{r^2}{2} \Big|_{\frac{1,118}{\operatorname{sen}(\alpha)}}^{3/2} d\alpha \rightarrow \int_{21/25}^{2,3} \frac{9}{8} - \frac{(1,118)^2}{2\operatorname{sen}(\alpha)} \, d\alpha$$

$$\frac{9}{8} \cdot [2,3 - 0,891] - (0,6249) \int_{21/25}^{2,3} \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\alpha)} \, d\alpha$$

$\frac{1}{\operatorname{sen}^2(\alpha)}$ → $-\operatorname{Cotan}(X)$

$$= 1,64138 - (0,6249) \cdot \left[-\frac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)} \right]_{21/25}^{2,3} \text{ cm}^2$$

$$= 1,64138 - (0,6249) \cdot [0,8934 + 0,8934]$$

$$= 1,64138 - (0,6249) \cdot (1,7869) = 0,5247 \text{ cm}^2$$

= Ahora que hallamos el área de la media circunferencia se la restamos al rectángulo grande para obtener el área de interés (sombreado en verde):

- Área rectangular = $2 \cdot (\frac{3}{2} - 1{,}118) \approx 0{,}764\,cm^2$

Entonces el área sombreada será:

- Área sombreada = $0{,}764\,cm^2 - 0{,}5247\,cm^2 = 0{,}24\,cm^2$

y le sumamos esta área a la perteneciente a la parte recta de la vela:

- Región (3): $15\,cm^2 + 0{,}24\,cm^2 = 15{,}24\,cm^2$

- Región (4): El área de esta región será el área de la circunferencia externa menos la interna.

- Área = $\pi \cdot (\frac{3}{2})^2 - \pi \cdot (1)^2 = 1{,}25\pi\,cm^2$.

Por lo que el área superficial total es la suma de el área de las 4 regiones.

$Área_T = 1{,}18\,cm^2 + 12{,}04\,cm^2 + 15{,}24\,cm^2 + 1{,}25\pi\,cm^2$

$Área_T = 32{,}387\,cm^2$

Actividad / Mate B

Nos queda conocer el Volumen total de la Biela, como supusimos hemos que la pieza tiene un grosor de 2 cm, por lo que el volumen de la misma será el área superficial por los 2 cm de grosor:

$$V = \underbrace{32,387\ cm^2}_{\text{Área}} \cdot \underbrace{2\ cm^2}_{h} = 64,774\ cm^3$$

Pero, falta agregar los dos tornillos de los cuales hemos calculado el volumen en Geogebra, superponiendolos cilindros:

$$V_F = 64,774\ cm^3 + 2 \cdot \underbrace{(0,58\ cm^3)}_{\text{Volumen de cada tornillo}} = 65,934 cm^3$$