📐 A megoldás vázlata lépésről lépésre

A feladat az alábbi elegáns lépésekkel oldható meg, elkerülve a felesleges számításokat:

- **Az $x = y$ eset (A triviális egyenes):** Ha $x = y$, akkor az $(x - y)$ tényező miatt mindkét egyenlet mindkét oldala azonnal 0 lesz. Ez azt jelenti, hogy az összes (t, t) alakú számpár megoldás (ahol $t \in \mathbb{R}$). Geometriailag ez az $y = x$ egyenest jelenti.
- **Kiemelés és szorzatbontás ($x \neq y$ esetén):** Ha feltételezzük, hogy $x \neq y$, akkor $(x - y) \neq 0$, vagyis a rendezett egyenleteket eloszthatjuk $(x - y)$-nal. A második egyenlet bal oldala a négyzetek különbsége mintájára felbontható:

$$x^{20} - y^{20} = (x^{10} - y^{10})(x^{10} + y^{10})$$

- **A rendszer leegyszerűsítése:** Az első egyenlet értékét ($x^{10} - y^{10} = 2027^9(x - y)$) behelyettesítve a második egyenlet kibontott alakjába, a konstansok és a változók gyönyörűen kiesnek, és egy rendkívül tiszta összefüggéshez vezetnek:

$$x^{10} + y^{10} = 2027^{10}$$

- **Az elszigetelt pontok meghatározása:** Az új egyenletet összevetve az eredeti rendszer feltételeivel látható, hogy valós megoldást $x \neq y$ mellett csak a határesetek adnak, amikor az egyik változó értéke 0. Ez megadja a két tengelypontot: $(2027, 0)$ és $(0, 2027)$.

Végeredmény: A megoldáshalmaz az $y = x$ egyenes pontjainak és a két elszigetelt tengelypontnak az uniója.