

Matematik och Fysik – provet 2025

MatematikDELEN , första delen

1. Givet att $x = (\sqrt[5]{3})^2 \cdot \sqrt{2}$, så gäller att x är lika med

- (a) $6^{\frac{9}{10}}$; (b) $6^{\frac{1}{5}}$; (c) $5^{\frac{1}{5}}$; (d) inget av (a)-(c).

$(\sqrt[5]{3})^2 = (3^{\frac{1}{5}})^2 = 3^{\frac{2}{5}}$ och $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, så $(\sqrt[5]{3})^2 \cdot \sqrt{2} = 3^{\frac{2}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}$ och de har ej gemensam exponent och kan ej förenklas till a) eller b) eller c) , alltså är svaret d)

2. Om $a = \sqrt{3}$ och $b = 5$ så är $U = \frac{(a+b)^3 + (a-b)^3}{(a+b)^2 - (a-b)^2}$ lika med

- (a) $\frac{3\sqrt{3}}{25}$; (b) $\frac{17}{5}$; (c) $\frac{39}{5}$; (d) inget av (a)-(c).

Vi ska se om vi kan förenkla uttrycket:

$$U = \frac{(a+b)^3 + (a-b)^3}{(a+b)^2 - (a-b)^2} = \frac{(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) + (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)}{(a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab - b^2)} =$$

$$= \frac{2a^3 + 6ab^2}{4ab} = \frac{a^2 + 3b^2}{2b}$$

Vilket med $a = \sqrt{3}$ och $b = 5$ blir $\frac{a^2 + 3b^2}{2b} = \frac{3 + 3 \cdot 25}{2 \cdot 5} = \frac{78}{10} = \frac{39}{5}$ alltså svar (c) .

3. Polynomet $P(x) = 6x^4 + x^3 - 25x^2 - 4x + 4$ är delbart (utan rest) med

- (a) $x - 1$; (b) $2x - 1$; (c) $3x - 1$; (d) inget av (a)-(c).

Provar med polynomdivision ”liggande stolen” eller ”trappan” för fallen (a) (b) (c) :

$x-1$	$6x^3 + 7x^2 - 18x - 22$	$2x-1$	$3x^3 + 2x^2 - 11.5x - 7.75$	$3x-1$	$2x^3 + x^2 - 8x - 4$
	$\begin{array}{r} 6x^4 + x^3 - 25x^2 - 4x + 4 \\ 6x^3(x-1) \\ \hline 7x^3 - 25x^2 - 4x + 4 \\ 7x^2(x-1) \\ \hline -18x^2 - 4x + 4 \\ -18x(x-1) \\ \hline -22x + 4 \\ -22x + 22 \\ \hline -18 \end{array}$		$\begin{array}{r} 6x^4 + x^3 - 25x^2 - 4x + 4 \\ 6x^4 - 3x^3 \\ \hline 4x^3 - 25x^2 - 4x + 4 \\ 4x^3 - 2x^2 \\ \hline -23x^2 - 4x + 4 \\ -23x^2 + \frac{23}{2}x \\ \hline -\frac{31}{2}x + 4 \\ -\frac{31}{2}x + \frac{31}{4} \\ \hline -\frac{15}{4} \end{array}$		$\begin{array}{r} 6x^4 + x^3 - 25x^2 - 4x + 4 \\ 6x^4 - 2x^3 \\ \hline 3x^3 - 25x^2 - 4x + 4 \\ 3x^3 - x^2 \\ \hline -24x^2 - 4x + 4 \\ -24x^2 + 8x \\ \hline -12x + 4 \\ -12x + 4 \\ \hline 0 \end{array}$

Här ser man delning med (c) , alltså $3x - 1$, ger ingen rest , alltså är rätt svar (c)

4. Talet $\sqrt{8 + 2\sqrt{7}} - \sqrt{8 - 2\sqrt{7}}$ är lika med

- (a) 2; (b) $2\sqrt[4]{7}$; (c) $4\sqrt{7}$; (d) inget av (a)-(c).

Om vi kvadrerar uttrycket :

$$\left(\sqrt{8 + 2 \cdot \sqrt{7}} - \sqrt{8 - 2 \cdot \sqrt{7}} \right)^2 = 8 + 2 \cdot \sqrt{7} - 2 \cdot \sqrt{8 + 2 \cdot \sqrt{7}} \cdot \sqrt{8 - 2 \cdot \sqrt{7}} + 8 - 2 \cdot \sqrt{7}$$

$$\text{Och } \sqrt{8 + 2 \cdot \sqrt{7}} \cdot \sqrt{8 - 2 \cdot \sqrt{7}} = \sqrt{(8 + 2 \cdot \sqrt{7}) \cdot (8 - 2 \cdot \sqrt{7})} = \sqrt{64 - 4 \cdot 7} = \sqrt{64 - 28} = \sqrt{36} = 6$$

$$\text{Alltså } \left(\sqrt{8 + 2 \cdot \sqrt{7}} - \sqrt{8 - 2 \cdot \sqrt{7}} \right)^2 = 16 - 2 \cdot 6 = 16 - 12 = 4$$

Om uttryckets kvadrat är = 4 , så är uttrycket ± 2 , och eftersom alla rotuttryck måste vara positiva här och $\sqrt{8 + 2 \cdot \sqrt{7}} > \sqrt{8 - 2 \cdot \sqrt{7}}$, så är svaret 2 giltigt, alltså svar (a) .

5. Uttrycket $U = \sqrt{(\sin x - 1)^2} + \sqrt{(\sin x + 1)^2}$ är för alla reella x lika med

- (a) 0; (b) $2 \sin x$; (c) 2; (d) inget av (a)-(c).

$\sin x$ kan variera från -1 till 1 enligt enhetscirkeln.

för $x = 0$ ges $\sin x = 0$, vilket ger $U = 2$ (vilket utesluter (a))

För $x = \pi/2$ ges $\sin x = 1$ vilket ger $U = 2$ vilket utesluter (b)

Återstår att se om U kan visas att alltid bli = 2 för alla x :

Då $\sqrt{(\sin x - 1)^2} = |\sin x - 1|$ och $\sqrt{(\sin x + 1)^2} = |\sin x + 1|$

Så är $U = |\sin x - 1| + |\sin x + 1|$

Eftersom $-1 \leq \sin x \leq 1$, så gäller följande:

$\sin x - 1 \leq 0$, så $|\sin x - 1| = 1 - \sin x$:

$\sin x + 1 \geq 0$, så $|\sin x + 1| = \sin x + 1$

Alltså $|\sin x - 1| + |\sin x + 1| = 1 - \sin x + \sin x + 1 = 2$, svar (c)

6. Om $x \boxplus y = \log_x y$ för alla positiva reella tal $x \neq 1$ och $y \neq 1$, så gäller för alla sådana x, y att

- (a) $x \boxplus y = y \boxplus x$; (b) $x \boxplus y = -y \boxplus x$;
 (c) $x \boxplus y = \frac{1}{y \boxplus x}$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

Exempel är 10-logaritmerna, då är basen $x = 10$ och t ex $\log_{10} 1000 = 3$

Eftersom $\log_{10} 1000 = 3$, men $\log_{1000} 10 \neq 3$, så gäller inte (a)

Eftersom $\log_{10} 1000 = 3$, men $\log_{1000} 10 \neq -3$, så gäller inte (b)

Vad är då $\log_{1000} 10 = ?$, jo då $1000^{1/3} = 10$ så är $\log_{1000} 10 = 1/3$, alltså stämmer (c) i ett fall.

Gäller då (c) generellt?, ja eftersom logaritmer är exponenter och exponentlagen $(a^p)^{\frac{1}{p}} = a$

7. Alla lösningar till olikheten $\log_x \frac{1}{2} > 1$ ges av alla x som uppfyller

- (a) $0 < x < \frac{1}{2}$; (b) $\frac{1}{2} < x < 1$; (c) $x > 1$; (d) inget av (a)-(c).

$\log_x \frac{1}{2} = 1$ ger $x^1 = \frac{1}{2}$ som innebär $x = \frac{1}{2}$.

Alla större x , ($x > \frac{1}{2}$), t ex $x = 0,75$ ger $\log_{0,75} \frac{1}{2} = p \dots 0,75^p = \frac{1}{2}$ med $p = 2,41$ (för stort)

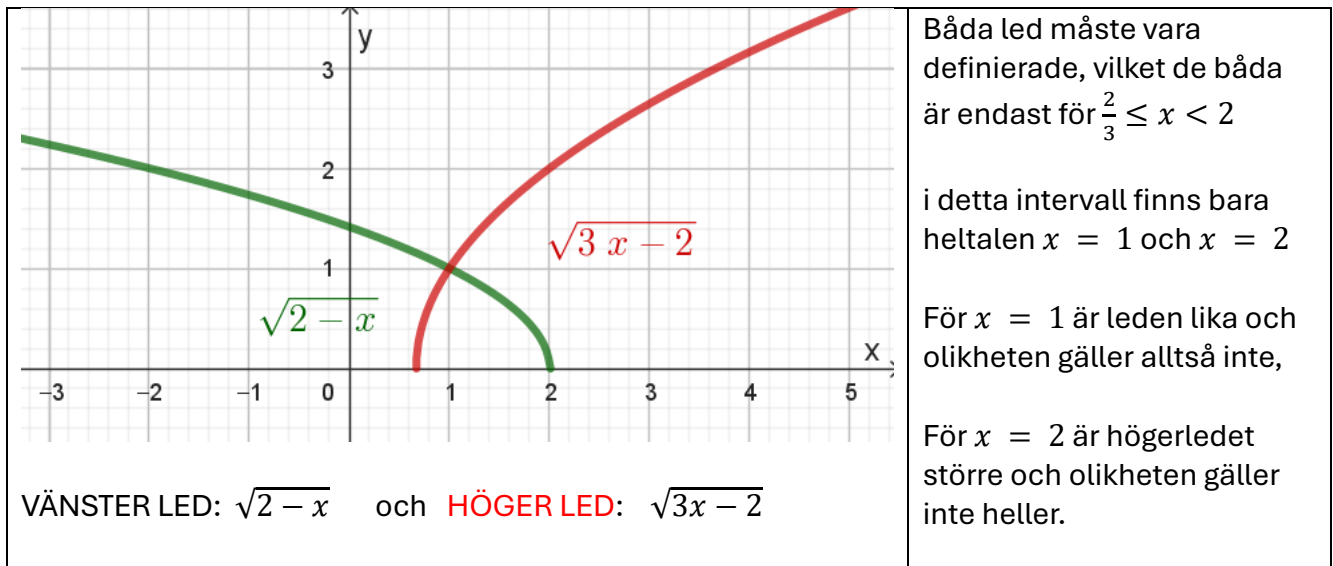
Alltså: $x < \frac{1}{2}$

Men kom ihåg att vi måste fortfarande ha $0 < x < 1$ för att logaritmen ska vara definierad och verklig (eftersom $\frac{1}{2} < 1$).

Detta ger sammantaget intervallet i (a): $0 < x < \frac{1}{2}$

8. Antalet heltalslösningar till olikheten $\sqrt{2-x} > \sqrt{3x-2}$ är

- (a) 0; (b) 1; (c) ändligt, skilt från 0 och 1; (d) oändligt.



Detta ger alternativ (a): det finns 0 heltalslösningar till olikheten $\sqrt{2-x} < \sqrt{3x-2}$

9. Vi söker det minsta av alla reella tal a , för vilka ekvationssystemet $x + y = a$; $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$ endast har lösningar där både x och y är positiva. Då gäller

- (a) det finns inga tal a med den egenskapen;
- (b) det finns sådana tal, men det finns inget minsta bland dem;
- (c) det finns ett minsta bland dessa tal, men det går inte att bestämma;
- (d) inget av (a)-(c).

$$\begin{cases} x + y = a \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \end{cases} \text{ vill vi undersöka}$$

$y = a - x$ substitueras in i $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$, då bildas $\frac{1}{x} + \frac{1}{a-x} = 2$.

Med multiplikation av minsta gemensamma faktor, $x \cdot (a - x)$, fås

$$x \cdot (a - x) \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a - x} \right) = x \cdot (a - x) \cdot 2$$

$$(a - x) + x = 2x \cdot (a - x)$$

$a = 2xa - 2x^2$, vilket kan skrivas om till en andragradsekvation:

$$x^2 - a \cdot x + \frac{a}{2} = 0 \quad \text{med rötterna } x_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a}{2}}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a}{2} \geq 0 \text{ och då är även } a^2 - 2a \geq 0 \Rightarrow a(a - 2) \geq 0 \Rightarrow a \leq 0 \text{ eller } a \geq 2$$

$a \leq 0$ tillsammans med villkoret $x + y = a$ omöjliggör att x och y båda ska hållas positiva, så det minsta möjliga värdet på a är lika med 2.

$$x^2 - a \cdot x + \frac{a}{2} = 0 \text{ med } a = 2 \text{ ger } x^2 - 2 \cdot x + \frac{2}{2} = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{Då blir även } y = a - x = 2 - 1 = 1$$

Vi får alltså lösningen $x = 1$, $y = 1$, och båda är reella och positiva.

Detta ger alternativ (d) då talet det minsta talet a går att bestämma (och det är $a = 2$)

10. För alla positiva tal x och alla reella tal y gäller att

- (a) $e^{x^y} = e^{xy}$; (b) $e^{x^y} = (e^x)^y$;
 (c) $e^{x^y} = e^{(x^y)}$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

Tolkningen av parenteser är att de inre utvärderas först, (c) är alltså korrekt . Ett mot-exempel på (b) med basen 10 är →	$10^{2^{-1}} \neq (10^2)^{-1}$ $10^{1/2} \neq 100^{-1}$ $3,1622.. \neq 0,01$
Ett mot-exempel på (a) med basen 10 är →	$10^{2^3} \neq 10^{2 \cdot 3}$ $10^8 \neq 10^6$ $100000000 \neq 1000000$

Svar: (c) : $e^{x^y} = e^{(x^y)}$

11. Antalet heltalslösningar till olikheten $e^x + \sqrt{e^x - 1} \leq 13$ är

- (a) oändligt; (b) 2; (c) 3; (d) inget av (a)-(c).

För tillräckligt stort x (exempelvis $x = 5$) är $2,72^5 \gg 13$, så det rör sig om mindre heltal , samtidigt kan inte x vara negativt , för då blir uttrycket under rottecknet odefinierat.

Vi kan pröva heltal 0 , 1 , 2 , 3 :

$e^0 + \sqrt{e^0 - 1} = 1 + \sqrt{1 - 1} = 1 + 0 = 1$	heltalet 0 är en lösning
$e^1 + \sqrt{e^1 - 1} \approx 2,72 + \sqrt{2,72 - 1} = 2,72 + \sqrt{1,72} > 2,72 + 1,72 < 13$	heltalet 1 är en lösning
$e^2 + \sqrt{e^2 - 1} \approx 7,29 + \sqrt{7,29 - 1} = 7,29 + \sqrt{6,29} > 7,29 + 3 < 13$	$2,7 \cdot 2,7 = 7,29$ heltalet 2 är en lösning
$e^3 + \sqrt{e^3 - 1} \approx 19,21 + \sqrt{19,21 - 1} = 19,21 + \sqrt{18,21} > 19 > 13$	$7,3 \cdot 2,7 = 19,21$ heltalet 3 är inte en lösning

Det finns 3 heltalslösningar till $e^x + \sqrt{e^x - 1} \leq 13$. (Dessa är $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$)

12. För alla positiva reella tal x och y gäller att

- (a) $\ln x + \ln \frac{y}{x} = \ln y$; (b) $\ln x \cdot \ln y = \ln(x + y)$;
 (c) $\ln \frac{x}{y} + \ln \frac{y}{x} = 1$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

(a) $\ln x + \ln \frac{y}{x} = \ln y$ undersöks, vi utvecklar VänsterLedet:

$$\ln x + \ln y - \ln x = \ln y$$

$\ln y = \ln y$, det här stämmer, och för $\frac{y}{x}$ sker ingen otillåten division, båda är positiva reella tal.

(b) $\ln x \cdot \ln y = \ln(x + y)$ undersöks med parallellt exempel från lg ($\log_{10}$),

vi använder denna parallell i båda led:

$$\lg 100 \cdot \lg 1000 \neq \lg(100 + 1000)$$

$$2 \cdot 3 \neq 3,04 \dots$$

$$6 \neq 3,04 \dots$$

(c) $\ln \frac{x}{y} + \ln \frac{y}{x} \neq 1$ undersöks, vi utvecklar VänsterLedet:

$$\ln x - \ln y + \ln y - \ln x \neq 1$$

$$0 \neq 1$$

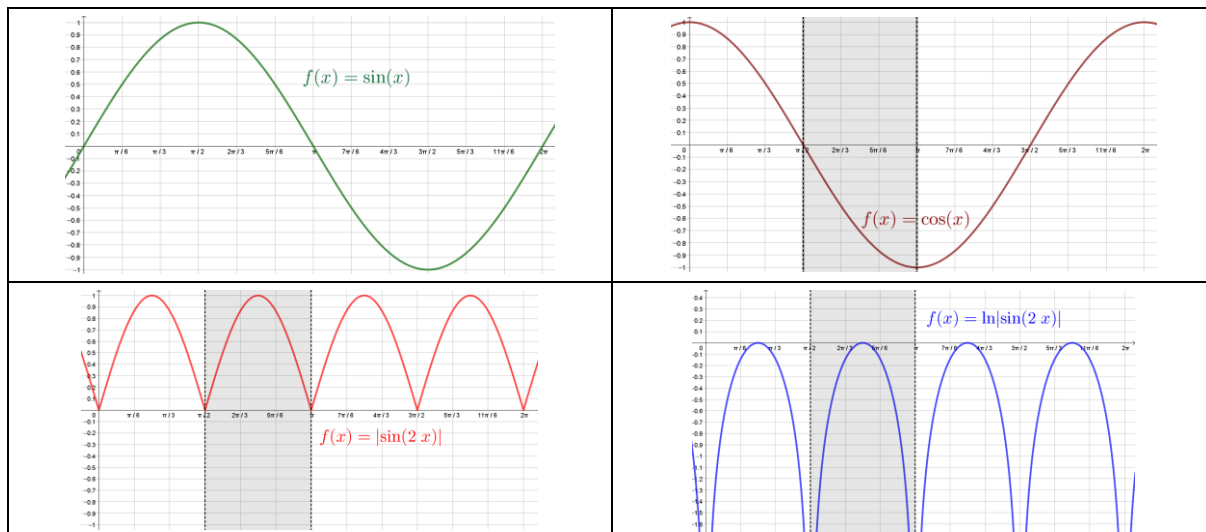
alla termer i Vänster Led tar ut varandra till 0, 0 är inte lika med 1

Alltså är alternativ (a) korrekt



13. För alla x som uppfyller $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ är $\ln|\sin 2x|$ identiskt lika med

- (a) $\ln 2 + \ln(\sin(\pi + x)) + \ln(-\cos x)$; (b) $\ln 2 + \ln(\sin x) + \ln(\cos(\pi - x))$;
 (c) $\ln 2 + \ln(-\sin x) + \ln(|\cos x|)$; (d) inget av (a)-(c).

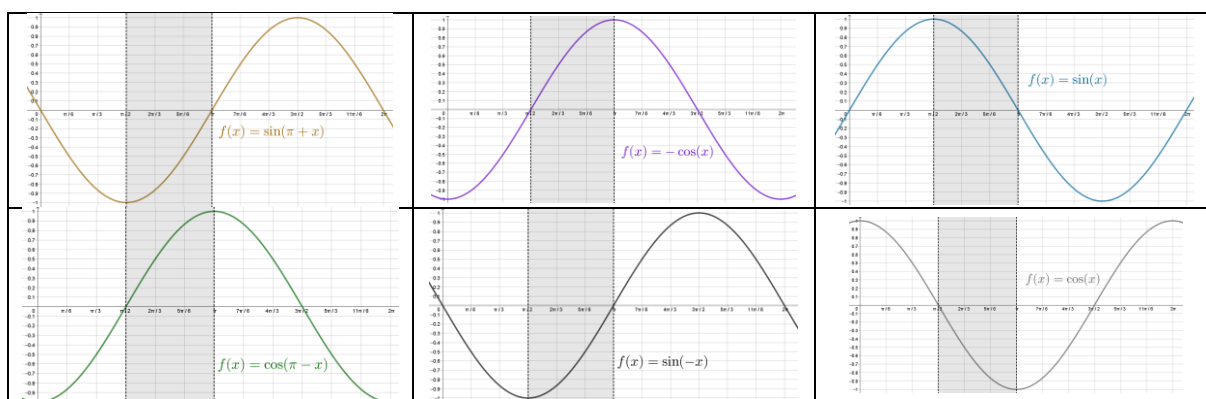


funktionen $f(x) = \ln|\sin 2x|$ antar värden från $-\infty$ till 0 i intervallet $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

$\sin 2x$ kan omvandlas till $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ och $\ln|2 \cdot \sin x \cdot \cos x|$ kan

med logaritmlagarna omvandlas till $\ln|2| + \ln|\sin x| + \ln|\cos x|$ eftersom absolutbelopp tas av hela produkten, men alternativen (a) och (b) och (c) är

$\ln \sin 2x = \ln 2 + \ln(\sin(\pi + x)) + \ln(-\cos x)$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$
$\ln \sin 2x = \ln 2 + \ln(\sin x) + \ln(\cos(\pi - x))$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$
$\ln \sin 2x = \ln 2 + \ln(-\sin x) + \ln \cos x $	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$



Eftersom i (a) finns en term som blir negativ och i (c) finns en term som blir negativ för intervallet $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, (man kan ej ta logaritmer av negativa tal) så kan de uteslutas, men (b) är, tillåter att uttrycken är identiskt lika. Svar (b)



14. Om k är ett heltal och likheten $\sin(k\pi - x) = \sin x$ gäller för alla reella x , så kan man dra slutsatsen att talet k är

- (a) positivt; (b) jämnt; (c) udda; (d) inget av (a)-(c).

Heltal som k kan anta: $k = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots$

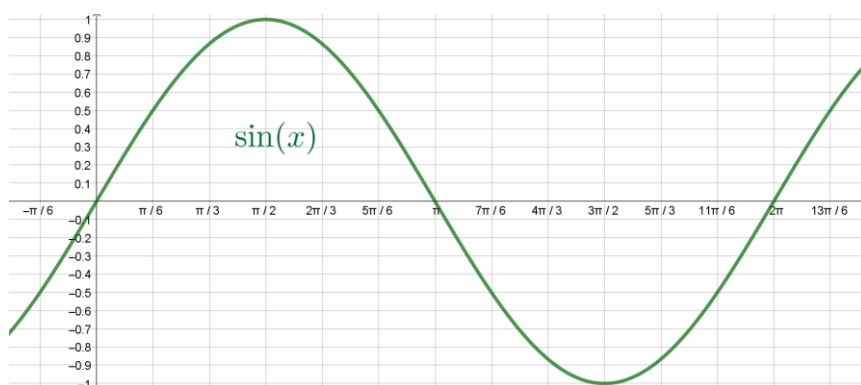
regler för $\sin x$: $\sin x = \sin(\pi - x)$ och $\sin x = \sin(n \cdot 2\pi + x)$ (n är ett heltal)

och $\sin x = \sin(n \cdot 2\pi + \pi - x)$ (n är ett heltal)

eftersom sinus är dels följer regeln $\sin x = \sin(\pi - x)$, dels är periodisk med perioden 2π ,

så är $\sin x = \sin(k\pi - x)$ för udda tal k , så att $k \cdot \pi = (2n + 1) \cdot \pi$, alltså k är ett udda heltal. $k = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots$

Korrekt svar är (c)



15. För alla udda heltal k och alla reella x gäller att

- (a) $\sin x = \cos \left(k \frac{\pi}{2} - x \right);$ (b) $\sin x = \cos \left(k \frac{\pi}{2} + x \right);$
 (c) $\sin x = -\cos \left(k \frac{\pi}{2} - x \right);$ (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

Heltal som k kan anta: $k = \dots, -3, -1, 1, 3, \dots$

regel: $\sin x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$ och båda periodiska med perioden 2π ,

$$\sin x = \cos \left(n \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2} - x \right) \text{ så } \sin x = \cos \left(\pi \cdot \left(2n + \frac{1}{2} \right) - x \right) \text{ (} n \text{ är ett heltal)}$$

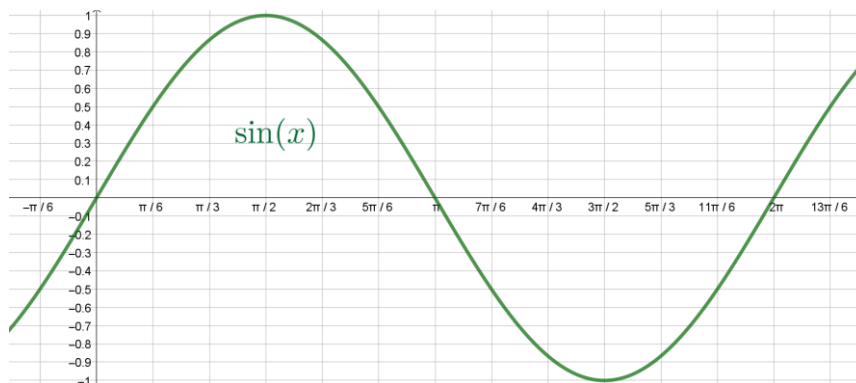
om $\frac{k}{2} = 2n + \frac{1}{2}$ och alltså $k = 4n + 1$ så gäller att $k = \dots, -3, 1, 5, 9, \dots$

alltså gäller inte (a)

(b) gäller ej för $k = 1$ (som ju är ett udda tal): $\sin x \neq \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right)$ utan $\sin x = -\cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right)$

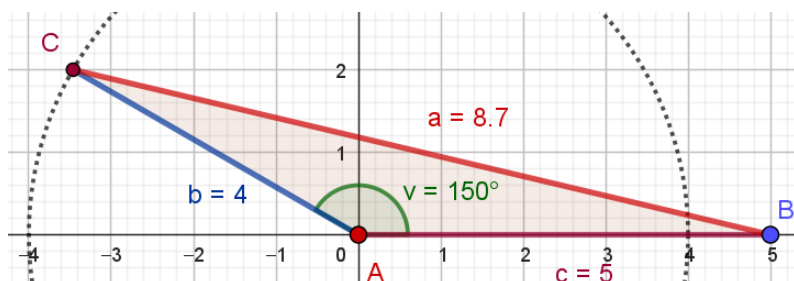
(c) gäller ej för $k = 1$ (som ju är ett udda tal): $\sin x \neq -\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$ utan $\sin x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$

korrekt svar är (d), varken (a) eller (b) eller (c) är sant



16. För triangeln ABC gäller att $|AB| = 5$ längdenheter, $|AC| = 4$ längdenheter samt att vinkeln vid hörnet A är 150° . Då gäller att sidan BC har längden

- (a) $\sqrt{21}$ l.e.; (b) $\sqrt{61}$ l.e.; (c) $\sqrt{41 + 20\sqrt{3}}$ l.e.; (d) inget av (a)-(c).



Enligt cosinussatsen är $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos A$ vilket här är

$$a^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos 150^\circ \quad \text{och} \quad \cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ så}$$

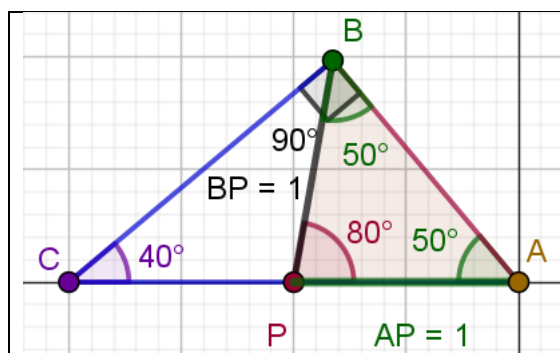
$$a^2 = 16 + 25 - 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^2 = 41 - 20 \cdot \sqrt{3}$$

$$a = \sqrt{41 - 20 \cdot \sqrt{3}} \quad , \text{ alltså alternativ (c) är korrekt}$$

17. Vinkeln vid hörnet C i triangeln ABC är 40° . Punkten P på sidan AC är sådan att $AP = BP$. Om vinkeln APB är 80° , så gäller att

- (a) vinkeln $\angle ABC$ är 90° ; (b) vinkeln $\angle ABC$ är 80° ;
(c) det går inte att avgöra; (d) det finns ingen sådan triangel.



En likbent triangel med toppvinkeln 80° har två 50° -vinklar, eftersom $\frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ$ så $\angle PAB = 50^\circ$ och $\angle PBA = 50^\circ$.

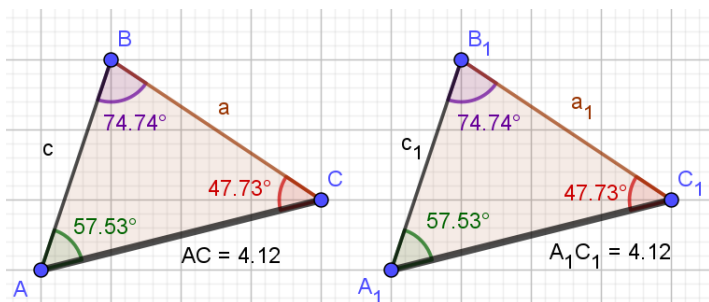
Och för stora triangeln blir då
 $\angle B = 180^\circ - \angle C - \angle A$
 $= 180^\circ - 40^\circ - 50^\circ = 90^\circ$

$\angle ABC = \angle B = 90^\circ$ alltså (b) är korrekt



18. För trianglarna ABC och $A_1B_1C_1$ gäller att $|AC| = |A_1C_1|$, $|AB| \neq |A_1B_1|$, att vinklarna vid A respektive A_1 är lika, samt att vinklarna vid B respektive B_1 är lika. Då gäller att

- (a) $|AC| \leq |BC|$; (b) $|AC| > |BC|$;
(c) det går inte att avgöra; (d) det finns inga sådana trianglar.



Om vinklarna vid A och A_1 är lika och även vinklarna vid B och B_1 är lika

Så följer av att vinkelsumman i en triangel alltid är 180° att även vinklarna vid C och C_1 är lika.

Två likformiga trianglar, som även har en motsvarande sträckas längd gemensam,

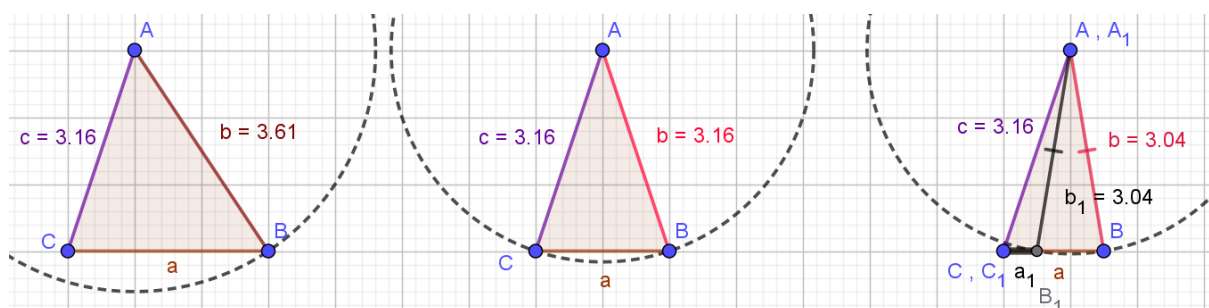
$|AC| = |A_1C_1|$ som står i beskrivningen,

har alla motsvarande sträckors längd samma, alltså är $|AB| = |A_1B_1|$ och $|BC| = |B_1C_1|$ och villkoret $|AB| \neq |A_1B_1|$ är ouppfyllbart.

Så (d) är korrekt: det finns inga sådana trianglar.

19. För trianglarna ABC och $A_1B_1C_1$ gäller att $|AC| = |A_1C_1|$, $|BC| = |B_1C_1|$, $|AB| \neq |A_1B_1|$, samt att vinklarna vid A respektive A_1 är lika. Då gäller att

- (a) $|AC| \leq |BC|$; (b) $|AC| > |BC|$;
(c) det går inte att avgöra; (d) det finns inga sådana trianglar.



Det kräver att BC är kortare än AC , för att två olika trianglar ska ha två sidor lika, men ändå den tredje sidan olika, alltså är (b) korrekt.





20. Betrakta följande **Sats**: *Diagonalerna i en romb skär varandra under rät vinkel.*
Av denna sats följer att

- (a) Om vinkeln mellan diagonalerna i en fyrhörning är rät, så är fyrhörningen en romb.
- (b) Om vinkeln mellan diagonalerna i en fyrhörning inte är rät, så är fyrhörningen inte en romb.
- (c) Om en fyrhörning inte är en romb, så är vinkeln mellan dess diagonaler inte rät.
- (d) Inget av (a)-(c).

Som synes i figurerna nedan så finns räta vinklar i diagonalerna även bland fyrhörningar som **inte** är romber (se mitten figuren).

Alltså gäller ej (a) .

Alltså gäller ej (c) .

Men – alla romber kommer att ha en rät vinkel mellan diagonalerna, vilket satsen ju säger , så om denna räta vinkel saknas, så är fyrhörningen inte en romb.

(b) gäller alltså.

