Índice

1 Ángulos

Para medir ángulos se utilizan dos sistemas. El primero de ellos se basa en el sistema sexagesimal, en el que un ángulo recto tiene 90º y por tanto un giro a una circunferencia tiene 60º. El segundo de ellos usa **radianes.**

Radián: Un radian (rad) es la amplitud del ángulo central de una circunferencia en el que el arco mide lo mismo que el radio.

Dado que la longitud de una circunferencia es $L = 2 \cdot \pi \cdot R$, un giro completo a la misma tiene 2π radianes. Por tanto, pasar de º a radianes o viceversa se puede realizar como una simple regla de 3 o un factor de conversión

Grados (º)	Radianes (rad)
360	2π
x	y

$$y = \frac{360}{2\pi} x \leftrightarrow y = \frac{180}{\pi} x$$

2 Razones trigonométricas

Consideremos el siguiente triángulo, cuyo vértice C tiene un ángulo recto

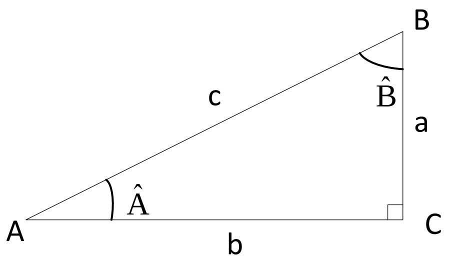


Fig 1. Triángulo rectángulo

definimos las siguientes relaciones trigonométricas:

$$sen(\hat{A}) = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c} \tag{1}$$

$$cos(\hat{A}) = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} = \frac{b}{c} \tag{2}$$

$$tan(\hat{A}) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \frac{a}{b} \tag{3}$$

$cosec(\hat{A}) = \frac{1}{sen(\hat{A})} = \frac{c}{a}$	(4)
$sec(\hat{A}) = \frac{1}{cos(\hat{A})} = \frac{c}{b}$	(5)
$cotan(\hat{A}) = \frac{1}{tan(\hat{A})} = \frac{b}{a}$	(6)

2.1 Relaciones entre las razones trigonométricas

Teniendo en cuenta que el triángulo de la Fig 1 es rectángulo, se cumple el teorema de Pitágoras, por tanto

$$a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \rightarrow \boxed{sen^2(\hat{A}) + \cos^2(\hat{A}) = 1}$$

$$\tan(\hat{A}) = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{sen(\hat{A})}{cos(\hat{A})}$$

Por tanto, dos relaciones fundamentales en la trigonometría son:

$$sen^2(\hat{A}) + \cos^2(\hat{A}) = 1 \tag{7}$$

$$\tan(\hat{A}) = \frac{sen(\hat{A})}{cos(\hat{A})} \tag{8}$$

Si dividimos los dos términos de la ecuación (7) por $\cos^2(\hat{A})$ podemos obtener otra relación trigonométrica fundamental

$$1 + \tan^2(\hat{A}) = \frac{1}{\cos^2(\hat{A})} \tag{9}$$

2.2 Razones trigonométricas de 30º, 45º, 60º

2.2.1 Razones trigonométricas de 45º

En un triángulo rectángulo isósceles (Fig 2) sus ángulos agudos miden 45 º. Podemos demostrar usando el teorema de Pitágoras que la hipotenusa es $c = \sqrt{2}l$

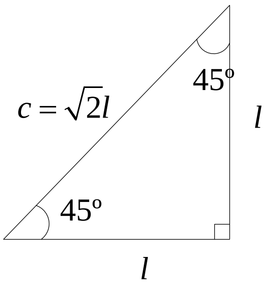


Fig 2. Triángulo rectángulo isósceles

Aplicando las definiciones de las razones trigonométricas, podemos demostrar que:

$$sen(45º) = \frac{l}{\sqrt{2}l} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos(45º) = \frac{l}{\sqrt{2}l} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(45º) = \frac{sen(45º)}{\cos(45º)} = 1$$

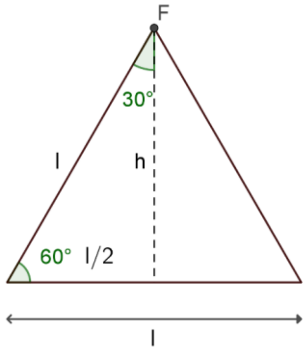


Fig 3. Triángulo equilátero

2.2.2 Razones trigonométricas de 30º y 60º

Consideremos el triángulo equilátero de la Fig 3. En dicho triángulo, podemos calcular la altura (h) aplicando el teorema de Pitágoras

$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2 \rightarrow h^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow h^2 = \frac{3l^2}{4}$$

$$\rightarrow \boxed{h = \frac{\sqrt{3}}{2}l}$$

Aplicando las definiciones trigonométricas de las ecuaciones (1)-(3), podemos calcular las razones trigonométricas de los ángulos de 30º y 60º

$sen(30º) = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$	$sen(60º) = \frac{h}{l} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos(30º) = \frac{h}{l} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos(60º) = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$
$\tan(30º) = \frac{\frac{l}{2}}{h} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}l} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\tan(60º) = \frac{h}{\frac{l}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}l}{\frac{l}{2}} = \sqrt{3}$

Podemos hacer un resumen para las relaciones trigonométricas de los ángulos fundamentales. Dicho resumen se muestra en la tabla 2.1

2.1. Razones trigonométricas de ángulos fundamentales en º

	$\mathbf{0^o = 0\,rad}$	$\mathbf{30^o = \frac{\pi}{6}\,rad}$	$\mathbf{45º = \frac{\pi}{4}\,rad}$	$\mathbf{60^o = \frac{\pi}{3}\,rad}$	$\mathbf{90^o = \frac{\pi}{2}\,rad}$
$\boldsymbol{sen}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\boldsymbol{cos}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\boldsymbol{tan}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

2.3 Ejercicios de ejemplo:

2.3.1 Calcular sin usar la calculadora las siguientes relaciones

a) $sen(45º) - \cos(30º) + \tan(60º) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

3 Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

Hay otra manera de determinar las razones trigonométricas de un ángulo.

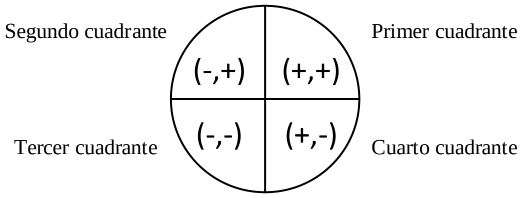
- Sobre unos ejes de coordenadas se traza una circunferencia de radio 1 y centro en el origen de coordenadas. Esta circunferencia recibe el nombre de **circunferencia goniométrica.**
- Para representar un ángulo se sitúa su vértice sobre el origen de coordenadas y uno de sus lados sobre el eje X.
- El ángulo se mide siempre desde el eje X. Consideramos "positivo" el movimiento que se realiza en sentido contrario a las agujas del reloj. Cada ángulo α queda determinado con un punto de coordenadas (a, b) que cumple la siguiente condición:

$$(a, b) = (sen(\alpha), \cos(\alpha)) \qquad (10)$$

Teniendo en cuenta esa manera de determinar las razones trigonométricas, nos encontramos con que dichas razones tienen los siguientes signos

Punto(a,b)	$1^{er} cuadrante$	$2^0\ cuadrante$	$3^{er} cuadrante$	$4^0 cuadrante$
Ángulo (α)	(0,90º)	(90º,180º)	(180º,270º)	(270º,360º)

$sen(\alpha)$	+	+	-	-
$cos(\alpha)$	+	-	-	+
$tan(\alpha)$	+	-	+	-



En es siguiente enlace se puede ver una aplicación que muestra lo expuesto anteriormente.

https://www.geogebra.org/m/TtdsEdrx

3.1 Reducción de ángulos al primer cuadrante

- Si β es un ángulo del 2º cuadrante, existen un ángulo α del primer cuadrante tal que $\beta = 180 - \alpha$

$$sen(180-\alpha) = sen(\alpha) \quad cos(180-\alpha) = -cos(\alpha) \quad tan(180-\alpha) = -tan(\alpha)$$

- Si β es un ángulo del 3er cuadrante, existen un ángulo α del primer cuadrante tal que $\beta = 180 + \alpha$

$$sen(180+\alpha) = -sen(\alpha) \quad cos(180+\alpha) = -cos(\alpha) \quad tan(180+\alpha) = tan(\alpha)$$

- Si β es un ángulo del 4º cuadrante, existen un ángulo α del primer cuadrante tal que $\beta = 360 - \alpha$

$$sen(360-\alpha) = -sen(\alpha) \quad cos(360-\alpha) = cos(\alpha) \quad tan(360-\alpha) = -tan(\alpha)$$

3.2 Ángulos mayores que 360º

Si el ángulo es mayor que 360º, se divide entre 360º y se analiza el resto.

Calcular el seno y el coseno de un ángulo de 870º

$$\begin{array}{l|l} 870 & 360 \\ \cline{2-2} 150 & 2 \end{array}$$

$$870º = 2 \cdot 360º + 150º$$

$$sen(870º) = sen(150º) = sen(180-30º) = sen(30º) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(870º) = \cos(150º) = \cos(180º-30º) = -\cos(30º) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

4 Fórmulas trigonométricas

4.1 Razones trigonométricas de ángulos complementarios

Los ángulos α y β son complementarios si cumplen la siguiente condición $\alpha + \beta = 90º$. En este caso, se puede demostrar que

$$sen(90-\alpha) = \cos(\alpha) \tag{11}$$

$$cos(90-\alpha) = sen\ (\alpha) \quad (12)$$

$$\tan(90-\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} \quad (13)$$

4.2 Razones trigonométricas de ángulos suplementarios

Los ángulos α y β son suplementarios si cumplen la siguiente condición: $\alpha + \beta = 180º$. En este caso, se puede demostrar

$$sen(180-\alpha) = sen\ (\alpha) \quad (14)$$

$$cos(180-\alpha) = -\cos\ (\alpha) \quad (15)$$

$$\tan(180-\alpha) = -\tan(\alpha) \quad (16)$$

4.3 Razones trigonométricas del ángulo opuesto

El ángulo $-\alpha$ es el opuesto al ángulo α coincide también con el ángulo $360º - \alpha$, por tanto, cumple:

$$sen(360-\alpha) = -sen\ (\alpha) \quad (17)$$

$$cos(360-\alpha) = \cos\ (\alpha) \quad (18)$$

$$\tan(360-\alpha) = -\tan(\alpha) \quad (19)$$

4.4 Razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos

4.4.1 Razones trigonométricas de la suma de ángulos

En el siguiente enlace tienes un enlace dónde se demuestran las fórmulas de la suma de ángulos https://www.geogebra.org/m/bftndmhk

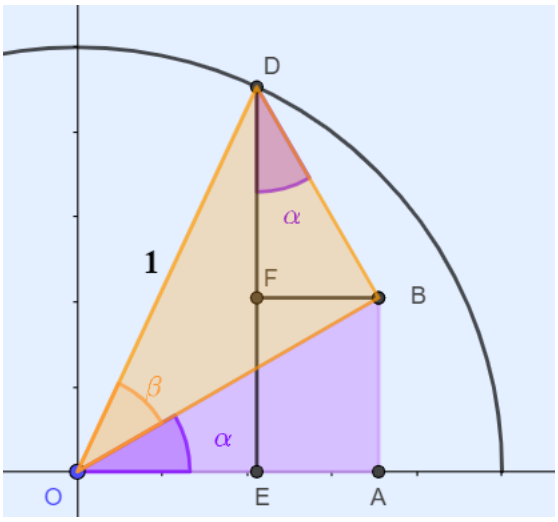


Fig 4. Construcción de suma de ángulos

Para realizar las demostraciones se parte de la construcción de la Fig 4.

- En el triángulo rectángulo OBD, dado que la hipotenusa mide 1. Se puede demostrar que:

$$\overline{OB} = \cos\ (\beta) \quad (20)$$
$$\overline{BD} = sen(\alpha)$$

- El triángulo de vértices FDB tiene ángu-.lo α en su vértice D porque $\overline{BD}$ es perpendicular a $\overline{OB}$ y $\overline{FD}$ es perpendicular a $\overline{OA}$
- $sen(\alpha+\beta)=\frac{\overline{ED}}{1}=\overline{EF}+\overline{FD}$ (21)
- $\overline{EF}=\overline{AB}=\overline{OB}\cdot\cos(\alpha)$ (22)
- $\overline{FD}=\overline{BD}\cdot\cos(\alpha)$

Teniendo en cuenta los valores de $\overline{OB}$ y $\overline{BD}$ de la ecuación (20), la ecuación (22) se transforma en

$$\overline{AB}=\mathrm{sen}(\beta)\cdot\cos(\alpha) \qquad (23)$$
$$\overline{FD}=sen(\beta)\cdot\cos(\alpha)$$

Por tanto, la ecuación (21), se transforma en

$$\boxed{sen(\alpha+\beta)=sen(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\,sen(\,\beta)} \qquad (24)$$

De la misma forma, con el esquema de la Fig 4,

$$\cos(\alpha+\beta)=\overline{OA}-\overline{EA} \qquad (25)$$

$$\overline{OA}=\overline{OB}\cdot cos(\alpha)=\cos(\alpha)\cdot cos(\alpha) \qquad (26)$$
$$\overline{EA}=\overline{FB}=\overline{BD}\cdot sen(\alpha)=sen(\beta)\cdot sen(\alpha)$$

Sustituyendo los valores de la ecuación (26) en la ecuación (25) obtenemos la fórmula del coseno de la suma de dos ángulos.

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-sen(\alpha)sen(\beta)} \qquad (27)$$

Si dividimos la ecuación (24) entre la ecuación (27), obtenemos

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{sen(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\,sen(\,\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)-sen(\alpha)sen(\beta)}=\frac{\tan(\alpha)+\tan\,(\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan\,(\beta)} \qquad (28)$$

4.4.2 *Razones trigonométricas de la diferencia de ángulos*

Teniendo en cuenta las fórmulas de las razones trigonométricas de la suma de ángulos vistas en el apartado anterior, podemos calcular las razones trigonométricas de la diferencia de ángulos usando las relaciones trigonométricas del ángulo opuestos expuestas en la sección 4.3.

$$sen(\alpha-\beta)=sen\big((\alpha+(-\beta)\big)=\ sen(\alpha)\cos(-\beta)+\cos(\alpha)\,sen(\,-\beta)$$
$$=sen(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\,sen(\,\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha+(-\beta))=\cos(\alpha)\cos(-\beta)-sen(\alpha)sen(-\beta)$$
$$=\cos(\alpha)\cos(\beta)+sen(\alpha)sen(\beta)$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\tan(\alpha+(-\beta))=\frac{\tan(\alpha)+\tan(-\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(-\beta)}=\frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$$

Con todas las demostraciones realizadas en esta sección, podemos hacer un resumen de todas las fórmulas de las razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos

4.1 Resumen de las razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos

$\boxed{sen(\alpha+\beta) = sen(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\,sen(\beta)}$ $\boxed{sen(\alpha-\beta) = sen(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\,sen(\beta)}$	(29)
$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta)}$ $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + sen(\alpha)sen(\beta)$	(30)
$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$ $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$	(31)

4.4.3 Resuelve los siguientes ejercicios.

a) Calcular sin usar la calculadora las razones trigonométricas de los siguientes ángulos

	Solución
$sen(105º)$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
$\cos(75º)$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
$\tan(15º)$	$2-\sqrt{3}$
$\tan(75º)$	$2+\sqrt{3}$
$\cos(\frac{7\pi}{12})$	$\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
$sen(-\frac{\pi}{12}º)$	$\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

4.5 Razones trigonométricas del ángulo doble y ángulo mitad.

4.5.1 Razones trigonométricas del ángulo doble

$$sen(2\alpha) = sen(\alpha+\alpha) = sen(\alpha)\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\,sen(\alpha) \rightarrow$$

$$sen(2\alpha) = 2sen(\alpha)\cos(\alpha) \tag{32}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha+\alpha) = \cos(\alpha)\cos(\alpha) - sen(\alpha)sen(\alpha) \rightarrow$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha) \tag{33}$$

$$\tan(2\alpha) = \tan(\alpha+\alpha) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\alpha)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(\alpha)} = \frac{2\cdot\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)} \rightarrow$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\cdot\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)} \tag{34}$$

4.5.2 *Razones trigonométricas del ángulo mitad*

$$sen(\alpha) = sen\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = 2sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Como una de las identidades trigonométricas fundamentales es

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 \rightarrow \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{cases}$$

$$\cos(\alpha) = 1 - sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - 2sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \rightarrow sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos(\alpha)}{2} \rightarrow$$

$$\boxed{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}} \qquad (35)$$

$$\cos(\alpha) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \left(1 - cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \rightarrow \cos(\alpha) = 2cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 \rightarrow cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos(\alpha)}{2} \rightarrow$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}} \qquad (36)$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{\cancel{2}}}}{\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{\cancel{2}}}} \rightarrow$$

$$\boxed{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}}} \qquad (37)$$

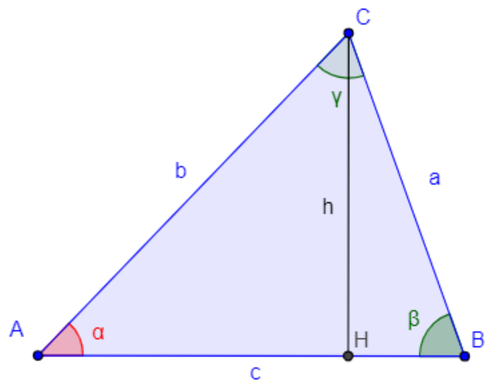
En las razones trigonométricas del ángulo mitad hay que tener mucho cuidado con los signos.

5 Teorema del seno

El siguiente enlace muestra una demostración del teorema del seno

https://www.geogebra.org/m/zjDCeAmv

La demostración está basada en la siguiente construcción geométrica



5.1 Construcción para la demostración del teorema del seno

$$\frac{a}{sen(\hat{A})} = \frac{b}{sen(\hat{B})} = \frac{c}{sen(\hat{C})}$$

6 Teorema del coseno

En el siguiente enlace se muestra una demostración del teorema del coseno.

https://www.geogebra.org/m/e882eKAC

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos(\hat{A})$$

7 Ejercicios

1. Resolver los siguientes triángulos rectángulos

https://www.geogebra.org/m/ajsmfvaj

2. Completa la siguiente tabla (razona utilizando la circunferencia goniométrica):

	0º	90º	180º	270º	360º
sen					
cos					
tg					

1. Utilizando la circunferencia goniométrica y las razones de 30º, 45º y 60º calcular razonadamente las razones de: 120º, 135º, 150º, 210º, 225º, 240º, 300º, 315º, 330º.

3. Averigua las razones trigonométricas de 718º, 516º y 342º, utilizando sólo la calculadora para hallar razones trigonométricas de ángulos comprendidos entre 0º y 90º.

4. Averigua las razones trigonométricas de a. 1575; b. -1575; c. 3540; d. -3540; e. 1230; f. -1230 sin usar la calculadora

5. Dado un ángulo α, calcula el valor exacto de su seno, coseno y tangente, sin usar las razones trigonométricas inversas, sabiendo que:

   a) $\cos(\alpha) = 0.59 \quad -90º \leq \alpha \leq 0º$
   b) $\text{sen}(\alpha) = -0.7 \quad -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq 0$
   c) $\text{sen}(\alpha) = 0.48 \quad 0 \leq \alpha \leq 90º$
   d) $\text{sen}(A) = -0.5 \quad \pi \leq A \leq \frac{3\pi}{2}$
   e) $\cos(x) = -0.8 \quad 180º \leq x \leq 270º$
   f) $\text{sen}(A) = -0.5 \quad \pi \leq A \leq \frac{3\pi}{2}$
   g) $\tan(B) = 0.47 \quad \pi \leq B \leq \frac{3\pi}{2}$
   h) $\tan(B) = 0.47 \quad \pi \leq B \leq \frac{3\pi}{2}$

   En el siguiente enlace tienes ejercicios auto-corregibles
   https://www.geogebra.org/m/CKBWch2D

6. Para los ejercicios del apartado anterior calcular el ángulo tanto en grados como en radianes

7. Si $\cos\boldsymbol{\alpha} = -\frac{1}{4}$ y $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\pi}$, ($\pi$=180^{O}):

   a) Calcular senα, sin calcular el ángulo α. (**sol.** $\frac{\sqrt{15}}{4}$**)**

   b) Calcular α (**sol. 1,8235 rad=104º28’39,04”**)

8. Si tg**α=-4/3** y 90º<**α**<180º

   a. Calcular las restantes razones trigonométricas

   b. Calcula el ángulo **α**

9. Sabiendo que **tgα=2** y **cosα>0**, hallar las restantes razones trigonométricas (sin utilizar el valor de α, utilizar fórmulas).

10. Sabiendo que **cosα=2/3** y **tgα<0**, hallar las restantes razones trigonométricas.

11. Calcula las siguientes razones trigonométricas y sus razones inversas sin usar la calculadora

https://www.geogebra.org/m/jryxjuge

https://www.geogebra.org/m/xyset5v9

https://www.geogebra.org/m/z8b9ptde

https://www.geogebra.org/m/ypnzsmkk

12. Sabiendo que tg 20º = 0´36, halla las tangentes de los ángulos: 70º, 160º, 250º, 340º

13. - Calcula el valor numérico de las expresiones:

a) $\frac{1}{2}$ sen 90º – $\frac{2}{3}$ cos 180º + $\frac{3}{2}$ cosec 270º + 2 tg 0º

b) 3 cos 90º + 2 sen 270º + cos 180º – 3 cosec 270º

c) $\dfrac{2\cos 0^{o} - 3\cos 180^{o}}{3\,sen\,90^{o} - 2\,sen\,270^{o}}$

14. Simplificar las expresiones:

a) $\dfrac{\cos^2 a - sen^2 a}{\cos a + sen\,a}$ b) $\dfrac{\cos^2 a - sen^2 a}{sen^4 a - \cos^4 a}$

15. Calcula las razones de 15º, a partir de las de 45º y 30º.

16. Sabiendo que sen $\alpha = 0.3$ y que α es agudo ; y que sen β = 0.6 y β es obtuso, calcular las razones trigonométricas de: a) $\alpha + \beta$ b) $\alpha - \beta$ c) 2α d) $\dfrac{\beta}{2}$

17. Sabiendo que el sen18º = 0.30, halla: a) sen 72ª b) tag162º

18. Calcula, sin usar la calculadora y en función de las razones de ángulos del primer cuadrante:

a) sen(105º) b) cos (120º) c) tag(15º)

19. Si cos α = -0.6 y α es del segundo cuadrante, calcula el seno y el coseno del ángulo doble. ***Sol. Sen2*** α ***=-0.96, cos2*** α ***=-0.28***

20. Calcula el sen (2α) sabiendo que α es un ángulo del tercer cuadrante y que sen $\alpha = \frac{-12}{13}$ ***sol: 0´71***

21. Calcula el cos 46º, sabiendo que el sen 23º = *0.39.*

Sol:0.6958

22. . Resolver los siguientes triángulos:

Datos	Â	B̂	Ĉ	a	b	c
a.	55º	98º		7,5 cm		
b.		47º	63º	100 m		
c.				37 cm	42 cm	68 cm

d.				100 m	185 m	150 m
e.	35º				20 cm	14 cm
f.		65º		85cm		57cm
g.		105º		18 cm	30 cm	
h.	130º			15 cm	9 cm	
i.			57º		6	8
j.		30º		15	11	
k.	25º			3	8	
l.	28º, 4’			82,6	115	

Solución:

Datos	Â	B̂	Ĉ	a	b	c
a.	55º	98º	**27º**	7,5 cm	**9,1 cm**	**4,2 cm**
b.	**70º**	47º	63º	100 m	**77,83 m**	**94,82 m**
c.	**28º 31’**	**32º48’55”**	**118º40’5”**	37 cm	42 cm	68 cm
d.	**32º39’34,4”**	**93º17’46,7”**	**54º2’38,9”**	100 m	185 m	150 m
e.	35º	**101º39’35”**	**43º20’25”**	**11,7cm**	20 cm	14 cm
f.	**74º41’55”**	65º	**74º41’55”**	85cm	**79,87 cm**	57cm
g.	**35º25’9”**	105º	**39º34’51”**	18 cm	30 cm	**11,67 cm**
h.	130º	**27º21’46,8”**	**22º38’13,2”**	15 cm	9 cm	**7,54 cm**
i.	**84º1’24,3”**	**38º58’35,7”**	57º	**9,5**	6	8
j.	**42º59’9”** **137º0’51”**	30º	**107º0’51”** **12º59’9”**	15	11	**21,04** **4.96**
k.	25º	**No tiene**	**No tiene**	3	8	**No tiene**
l.	28º, 4’	**40º55’25”** **139º4’35”**	**101º35”** **12º51’25”**	82,6	115	**163,9** **39,1**

23. En lo alto de un edificio en construcción hay una grúa de 4 m. Desde un punto del suelo se ve el punto más alto de la grúa bajo un ángulo de 50° con respecto a

la horizontal y el punto más alto del edificio bajo un ángulo de 40° con la horizontal. Calcula la altura del edificio. (**Sol 9,52 m**)

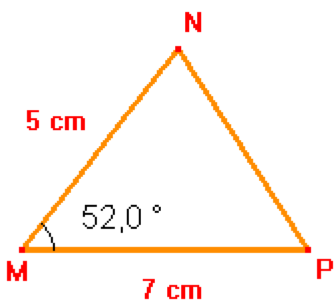
24. Dos amigos están en una playa a 150 m de distancia y en el mismo plano vertical que una cometa que se encuentra volando entre ambos. En un momento dado, uno la ve con un ángulo de elevación de 50° y el otro con un ángulo de 38°. ¿Qué distancia hay de cada uno de ellos a la cometa? (**sol: 114,98 y 92,41 metros respectivamente**)

25. Los lados de un paralelogramo miden 18 cm y 32 cm y forman un ángulo de 52°. Halla la longitud de la diagonal mayor (**sol. 45,36 cm**)

26. En un entrenamiento de fútbol se coloca el balón en un punto situado a 5m y 8 m de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 7 m. ¿Bajo qué ángulo se ve la portería desde ese punto?

27. Un barco B pide socorro y se reciben sus señales en dos estaciones de radio, A y C, que distan entre sí 50 Km. Desde las estaciones se miden los siguientes ángulos: BAC =46º y BCA =53º. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?

28. Considera el siguiente triángulo:

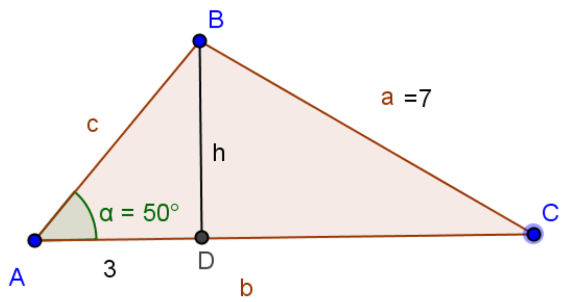


a. Calcula la proyección de MN sobre MP.
b. Hallar la altura correspondiente a la base MP.
c. Calcula el área del triángulo.

(Sol. a. 3,08 cm. b. 3,94 cm. c. 13,79 cm^2).

29. Dada la situación:

Calcula sus lados, ángulos y área



30. Jaime está volando una cometa. Ha soltado 9m de cuerda, y esta forma un ángulo de 55º con el suelo. ¿A qué altura se encuentra? (Sol. 7,37 m.).

31. Para hallar el ancho de un río procedemos así: Nos situamos en un punto A, en una orilla del río, y medimos el ángulo (53º) bajo el cual se ve un árbol que está frente a nosotros, en la otra orilla. Nos alejamos 20 m. de la orilla en dirección perpendicular a ella y volvemos a medir el ángulo bajo el cual se ve el árbol, 32º. ¿Cuánto mide el ancho del río?

32. Calcula el área y las longitudes de los lados y de la otra diagonal: