ESPACIO EUCLIDEO

Índice:

1. Espacio euclídeo E_3

Sea el vector $\vec{v}$ de A_3, cuyas coordenadas cartesianas son (x, y, z), llamamos **módulo o norma del vector** $\vec{v}$, y lo expresamos por $|\vec{v}|$, al número positivo:

$$|\vec{v}|=+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Además, la norma cumple las siguientes propiedades:

$$|\vec{v}|\geq 0\ \forall\ \vec{v}\in A_3\ \ y\ \ |\vec{v}|=0 \Leftrightarrow \vec{v}=\vec{0}$$

$$|k.\vec{v}|=|k|.|\vec{v}|\ \forall\ k\in \mathbb{R}\ y\ \forall\ \vec{v}\in A_3$$

$$|\vec{u}+\vec{v}|\leq|\vec{u}|+|\vec{v}|\ \forall\ \vec{u},\vec{v}\in A_3$$

 # Ejemplo.- El vector $\vec{u}=(-3, 0, 4)$ *tiene como módulo* $|\vec{u}|=\sqrt{(-3)^2+0^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

Diremos que el vector $\vec{u}$ es **unitario** cuando cumpla $|\vec{u}|=1$.

 # Ejemplo.- El vector $\vec{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ *es unitario, ya que*

$$|\vec{u}|=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+0^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{1}=1$$

Si disponemos de un vector $\vec{u}$ no unitario, siempre podemos obtener un vector unitario $\vec{v}$ en la misma dirección y sentido, siendo

$$\vec{v}=\frac{\vec{1}}{|\vec{u}|}.\vec{u}$$

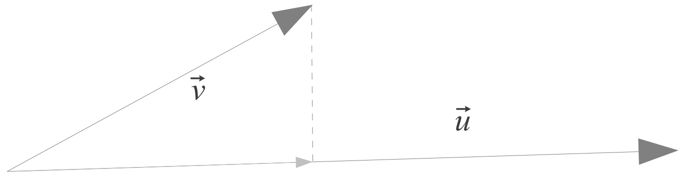
 # Ejemplo.- Dado el vector no unitario $\vec{u}=(1,2,2)$ *, podemos hallar el vector unitario en el mismo sentido y dirección*

$$\vec{v}=\frac{\vec{1}}{|\vec{u}|}.\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{9}}.(1, 2, 2)=\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

El proceso de encontrar un vector unitario en la misma dirección y sentido que el vector $\vec{v}$, se denomina **normalizar** el vector $\vec{v}$

Sean los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de A_3, denominaremos **producto escalar** de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ y representaremos $\vec{u}\bullet\vec{v}$, al número real

$$\vec{u}\bullet\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{u}|.\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$$



Geométricamente, el producto escalar de dos vectores es igual al producto del módulo de uno de ellos por el módulo de la proyección del otro vector sobre él.

Las propiedades que cumple el producto escalar son las siguientes:

- Propiedad conmutativa:

$$\vec{u}\bullet\vec{v}=\vec{v}\bullet\vec{u},\ \forall\vec{u},\vec{v}\in A_3$$

- Propiedad asociativa:

$$(k.\vec{u})\bullet\vec{v}=k.(\vec{u}\bullet\vec{v}),\ \forall\vec{u},\vec{v}\in A_3,\ \forall k\in\mathbb{R}$$

- Propiedad distributiva respecto de la suma de vectores:

$$\vec{u}\bullet(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\bullet\vec{v}+\vec{u}\bullet\vec{w},\ \forall\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in A_3$$

Además, como consecuencia del producto escalar de dos vectores, extraemos las siguientes conclusiones:

- $\vec{u}^2=\vec{u}\bullet\vec{u}=|\vec{u}|.|\vec{u}|.\cos 0^{o}=|\vec{u}|^2$
- Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores unitarios, $\vec{u}\bullet\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

 # Ejemplo.- El producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *, que forman un ángulo de 60º y cuyos módulos son* $|\vec{u}|=5$ *y* $|\vec{v}|=4$ *, será*

$$\vec{u}\bullet\vec{u}=5.4.\cos(60^{o})=\frac{5.4.1}{2}=10$$

Si (u_1, u_2, u_3) y (v_1, v_2, v_3) son las coordenadas (*respecto de la base* $\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$) de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, teniendo en cuenta que $\vec{i}\bullet\vec{j}=\vec{i}\bullet\vec{k}=\vec{j}\bullet\vec{k}=0$ se cumplirá

$$\vec{u}\bullet\vec{v}=(u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k})\bullet(v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k})=u_1v_1(\vec{i}\bullet\vec{i})+u_2v_2(\vec{j}\bullet\vec{j})+u_3v_3(\vec{k}\bullet\vec{k})=$$
$$=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$$

Llamamos **espacio euclídeo** al **espacio afín** en el que se ha definido el producto escalar.

2. Ángulo entre dos vectores

Dados dos vectores $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2 v_3)$, se verifica:

$$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}=\frac{u_1.v_1+u_2.v_2+u_3.v_3}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}.\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$$

 # Ejemplo.- El ángulo α que forman los vectores $\vec{u}=(1,0,1)$ y $\vec{v}=(0,0,2)$ será

$$\alpha=\arccos\left(\frac{1.0+0.0+1.2}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}.\sqrt{0^2+0^2+2^2}}\right)=\arccos\left(\frac{2}{2\sqrt{2}}\right)=\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=45^o$$

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son **ortogonales** ($\perp$) si son perpendiculares, que equivale a:

$\vec{u}\perp\vec{v}$ si y solo si $\vec{u}\bullet\vec{v}=0$

Un sistema de referencia $S=\{0;\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ es **ortogonal** si los vectores de la base son ortogonales dos a dos. Si además, los vectores tiene módulo 1, diremos que es un sistema de referencia **ortonormal**.

Si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son **ortogonales** se verifica

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2=(\vec{u}+\vec{v})\bullet(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\bullet\vec{u}+2.\vec{u}\bullet\vec{v}+\vec{v}\bullet\vec{v}=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2$$

3. Desigualdad de Schwarz y desigualdad triángular

Desigualdad de Schwarz.- Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se cumple $|\vec{u}\bullet\vec{v}|\leq|\vec{u}|.|\vec{v}|$

La demostración se basa en la acotación de la función coseno en la igualdad

$$\vec{u}\bullet\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{u}|.\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$$

Como

$$-1\leq\cos(\vec{u},\vec{v})\leq 1$$

Se cumplirá

$$-|\vec{u}|.|\vec{u}|\leq\vec{u}\bullet\vec{v}\leq|\vec{u}|.|\vec{u}|$$

Y aplicando la definición de valor absoluto a esta expresión, obtenemos:

$$|\vec{u}\bullet\vec{v}|\leq|\vec{u}|.|\vec{u}|$$

Desigualdad triangular.- Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se cumple $|\vec{u}\bullet\vec{v}|\leq|\vec{u}|+|\vec{v}|$

La demostración se basa también en la acotación de la función coseno. Como

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2=(\vec{u}+\vec{v})\bullet(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\bullet\vec{u}+2.\vec{u}\bullet\vec{v}+\vec{v}\bullet\vec{v}=|\vec{u}|^2+2.\vec{u}\bullet\vec{v}+|\vec{v}|^2 =$$
$$=|\vec{u}|^2+2.|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})+|\vec{v}|^2\leq|\vec{u}|^2+2.|\vec{u}|.|\vec{v}|+|\vec{v}|^2=$$
$$=(|\vec{u}|+|\vec{v}|)^2$$

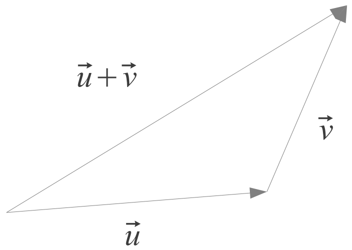
Luego

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2\leq(|\vec{u}|+|\vec{v}|)^2$$

Es decir

$$|\vec{u}+\vec{v}|\leq|\vec{u}|+|\vec{v}|$$

Geométricamente, la desigualdad triangular nos permite obtener la condición para que tres segmentos dados formen un triángulo: resultando que las suma de dos de sus lados es mayor o igual que la del tercero



4. Ángulo entre dos rectas

Dadas dos rectas r y r' de vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, como se verificará

$$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$$

Teniendo en cuenta que dos rectas pueden forma dos posibles ángulos de vectores $-\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{u},\vec{v}$, tomamos el ángulo menor, es decir el ángulo que cumple

$$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\left|\frac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}\right|$$

 # Ejemplo.- Las rectas r y s dadas por las ecuaciones

$$r:\frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{-2} \qquad s:\frac{x-3}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+2}{2}$$

forman un ángulo

$$\alpha=\arccos\left(\frac{|2.1+1.(-2)+(-2).2|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}.\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}\right)=\arccos\left(\frac{4}{9}\right)=63^{\circ}\,36'\,44''$$

Dos rectas r y s son perpendiculares si sus vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, es decir: $r \perp s \Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = 0$

 # Ejemplo.- Dada la recta de ecuaciones

$$r: \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-2}$$

Para hallar las ecuaciones de la recta s perpendicular a r, que pase por el punto $A(1,0,-5)$.

Teniendo en cuenta que los puntos de la recta r, serán de la forma $P(-2+2t, 2+t, -3-2t)$ *, con* $t \in \mathbb{R}$ *, para que el vector* $\overrightarrow{AP} = (-3+2t, 2+t, 2-2t)$ *sea perpendicular a la recta, se tiene que cumplir:*

$$(2,1,-2) \bullet (-3+2t, 2+t, 2-2t) = 0 \Rightarrow t = \frac{8}{9}$$

Luego, $\overrightarrow{AP} = \left(\frac{-11}{9}, \frac{26}{9}, \frac{2}{9} \right)$ *y un vector director* $\vec{v}$ *de la recta s será* $\vec{v} = (-11, 26, 2)$.

Por tanto:

$$s: \frac{x-1}{11} = \frac{y}{26} = \frac{z+5}{2}$$

Dadas dos rectas r y s que se cortan, se define bisectriz al lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas r y s

Si $O(0,0,0)$ es el origen de coordenadas, $X = (x, y, z)$ un punto cualquiera del espacio, P el punto de intersección de r y s, y $\vec{u}$ y $\vec{v}$ los vectores directores de r y s con el mismo módulo (*que es siempre posible de hallar*). Es decir:

$$r: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda . \vec{u} \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$s: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \mu . \vec{v} \ ; \ \mu \in \mathbb{R}$$

Teniendo en cuenta que los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son las diagonales del cuadrado formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Las bisectrices de la rectas r y s, vendrán dadas por la rectas:

$$r: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda . (\vec{u} + \vec{v})$$

$$s: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \mu . (\vec{u} - \vec{v})$$

 # Ejemplo.- Para hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2} \qquad s: (x, y, z) = (2,2,1) + \lambda . (0,3,-4); \; \lambda \in \mathbb{R}$$

Como estas dos rectas no son paralelas y se cortan en el punto $P(2,2,1)$ *, ya que pertenece a ambas rectas. Si normalizamos los vectores directores* $\vec{u} = (2,1,2)$ *y* $\vec{v} = (0,3,-4)$ *de las rectas r y s, obtenemos los vectores*

$$\vec{u}\,' = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \qquad \vec{v}\,' = \left(0, \frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

Y teniendo en cuenta que

$$\vec{u}\,' + \vec{v}\,' = \left(\frac{2}{3}, \frac{14}{15}, -\frac{2}{15}\right) \qquad \vec{u}\,' - \vec{v}\,' = \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{15}, \frac{22}{15}\right)$$

Por tanto las ecuaciones de las bisectrices serán

$$(x, y, z) = (2,2,1) + \lambda . \left(\frac{2}{3}, \frac{14}{15}, -\frac{2}{15}\right); \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) = (2,2,1) + \mu . \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{15}, \frac{22}{15}\right); \mu \in \mathbb{R}$$

5. Vector director, normal o característico de un plano. Diedro de dos planos

Dado un el plano de ecuación $A x + B y + C z + D = 0$, llamamos **vector director, normal o característico** del plano al vector $\vec{d} = (A, B, C)$

Denominamos. **ángulo diedro** de dos planos al ángulo que forman dos semiplanos que tiene una recta en común denominada arista. Además el ángulo de dos planos secantes es el menor de los diedros que determinan.

El **ángulo rectilíneo de un diedro** es el ángulo formado por dos rectas perpendiculares a la arista en el mismo punto, de forma que dada una de las rectas esté contenida en uno de los planos. Además, la medida del ángulo diedro coincide con la medida del ángulo rectilíneo de dos planos.

 # Ejemplo.- Dados los planos no paralelos $\pi_1 : x - 2y + z - 1 = 0$ *y* $\pi_2 : 2x - y + z = 0$ *, como sus vectores normales son respectivamente,* $d_1 = (1, -2, 1)$ *y* $d_2 = (2, -1, 1)$ *, el ángulo diedro que originan al cortarse las dos rectas, es:*

$$\alpha = \arccos\left(\frac{|\vec{d}_1 \bullet \vec{d}_2|}{|\vec{d}_1| . |\vec{d}_2|}\right) = \arccos\left(\frac{|1.2 + (-2).(-1) + 1.1|}{\sqrt{6} . \sqrt{6}}\right) = \arccos\left(\frac{5}{6}\right) = 33^{\circ}\, 33'\, 26{,}32''$$

Llamamos **plano bisector** del ángulo diedro de dos planos al lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los dos planos.

Teniendo en cuenta que el ángulo diedro mide lo mismo que su correspondiente rectilíneo, y este coincide con el ángulo formado por los vectores característicos de los planos, el plano bisector tendrá como vector característico el vector director de la bisectriz del ángulo que forman los vectores característicos del plano bisector del ángulo de dos planos. Es decir, si $\vec{d}_1{}'$ y $\vec{d}_2{}'$ son los vectores característico de norma 1, los dos planos bisectores tendrán como vector característico $(\vec{d}_1{}'+\vec{d}_2{}')$ y $(\vec{d}_1{}'-\vec{d}_2{}')$ respectivamente. Y para determinar los planos bisectores, bastará con tomar un punto de la arista de la intersección de los dos planos, y los vectores directores determinados.

Ejemplo.- Sean los planos $\pi_1: x-2y+2z=2$ y $\pi_2: 3x+4y=12$.

La arista de estos dos planos será la recta de ecuación $:\begin{cases} x-2y+2z=2 \\ 3x+4y=12 \end{cases}$.

Tomando un punto de dicha arista, por ejemplo, tomando $x=0$, obtenemos $A(0,3,4)$, y teniendo en cuenta que los vectores característicos normalizados de los planos son respectivamente

$$\vec{d}_1{}'=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) \qquad \text{y} \qquad \vec{d}_2{}'=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5},0\right)$$

Los vectores directores o normales de los planos bisectores son

$$\vec{d}_1{}'+\vec{d}_2{}'=\left(\frac{14}{15,},\frac{2}{15},\frac{2}{3}\right) \qquad \text{y} \qquad \vec{d}_1{}'-\vec{d}_2{}'=\left(-\frac{4}{15},-\frac{22}{15},\frac{2}{3}\right)$$

Tomando dos vectores proporcionales,obtenemos los vectores directores o normales de los planos bisectores

$$n_1{}'=(14,2,10) \qquad \text{y} \qquad n_2{}'=(-4,-22,10)$$

Y los planos bisectores serán:

$$\pi_1{}'=14.(x-0)+2.(y-3)+10.(z-4)=0\Rightarrow 14x+2y+10z-46=0$$

$$\pi_1{}'=-4.(x-0)-22.(y-3)+10.(z-4)=0\Rightarrow -4x-22y+10z+26=0$$

6. Proyecciones ortogonales

La proyección ortogonal de un punto A sobre el plano π es el punto de intersección de dicho plano con la recta perpendicular a π que pasa por el punto A.

Sea $A(a,b,c)$ un punto en el espacio y $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ un plano, como la recta perpendicular a π, que pasa por A, tiene por ecuaciones paramétricas

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=a+At \\ y=b+Bt \\ z=c+Ct \end{array}\right\}$$

Para hallar la intersección de la recta r con el plano π, utilizamos la ecuación

$$A.(a+At)+B.(b+Bt)+C.(c+Ct)+D=(A^2+B^2+C^2).T+(Aa+Bb+Cc+D)=0$$

Despejando t de esta ecuación, y sustituyendo en la ecuación de la recta de r, obtenemos la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π.

 # Ejemplo.- Sea $A(1,3,-1)$ *un punto en el espacio y* $\pi: x-y+z=0$ *una plano en el espacio, como la recta perpendicular a* π *, que pasa por A, tiene por ecuaciones paramétricas*

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=1+t \\ y=3-t \\ z=-1+t \end{array}\right\}$$

Para hallar la intersección de la recta r con el plano π *, utilizamos la ecuación*

$$(1+t)-(3-t)+(-1+t)=0 \Rightarrow -3+3t=0 \Rightarrow t=1$$

Luego, sustituyendo t = 1 en la ecuación r, tenemos que la proyección del punto A sobre el plano π *será A'(2,2,0).*

La proyección ortogonal de un punto A sobre una recta r es el punto de intersección de la recta r con la recta perpendicular a r que pasa por el punto A y se apoya en r.

Sea $A(a,b,c)$ un punto en el espacio y $r:\left\{\begin{array}{l} x=u+At \\ y=v+Bt \\ z=w+Ct \end{array}\right\}$ una recta en el espacio, como el plano perpendicular a r, que pasa por A, tendrá como vector característico el vector director de la recta, es decir $\vec{d}=(A,B,C)$, su ecuación general es:

$$A.(x-a)+B.(y-b)+C.(z-c)=0 \Rightarrow Ax+By+Cz-(Aa+Bb+Cc)=0$$

Y la intersección del plano con la recta será:

$$A.(u+At)+B.(v+Bt)+C.(w+Ct)-(Aa+Bb+Cc)=0$$

Que despejando t, y sustituyendo en la ecuación de la recta r, obtenemos el punto A', proyección del punto A, sobre la recta r.

 # Ejemplo.- Sea $A(1,0,1)$ *un punto en el espacio y* $r:\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=t \end{cases}$ *una recta en el espacio, como el plano perpendicular a r, que pasa por A, tendrá como vector característico el vector director de la recta, es decir* $\vec{d}=(1,-1,1)$ *, su ecuación general es:*

$$1.(x-1)+(-1).(y-0)+1.(z-1)=0 \Rightarrow x-y+z-2=0$$

Y la intersección del plano con la recta será:

$$(1+t)-(2-t)+t-2=0 \Rightarrow 1+t-2+t+t-2=0 \Rightarrow 3t-3=0 \Rightarrow t=1$$

Sustituyendo t en la ecuación de la recta r, tenemos que la proyección de A sobre r es el punto $A'(2,1,1)$.

Utilizando la proyección de un punto sobre un plano o una recta, también podemos hallar la proyección de un segmento o una recta.

 # Ejemplo.- Para calcular la proyección de la recta $r:\frac{x}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ *sobre el plano de ecuación* $\pi : x+2y+z=0$ *. Como se puede comprobar resolviendo el sistema de ecuaciones correspondiente que* $r\cap\pi=(0,0,0)$.

Proyectando otro punto cualquiera de la recta r, por ejemplo el punto $P(-1,2,3)$.

Como la recta perpendicular a π *que pasa por P, tiene por ecuaciones paramétricas*

$$s:\begin{cases} x=-1+t \\ y=2+2t \\ z=3+t \end{cases}$$

Y la intersección de s con el plano π *, cumplirá la ecuación*

$$(-1+t)+2.(2+2t)+(3+t)=0 \Rightarrow 6+6t=0 \Rightarrow t=-1$$

Sustituyendo t en la ecuación de la recta s, obtenemos que $P'(-2,0,2)$ *es la proyección de P sobre* π .

Luego la proyección de r sobre π *, como pasa por* $O(0,0,0)$ *y por* $P'(-2,0,2)$ *tendrá por ecuación*

$$r':(x,y,z)=(0,0,0)+(-2,0,2).\lambda ; \lambda\in\mathbb{R}$$

7. Ángulo entre una recta y un plano

El **ángulo entre una recta r y un plano** π es el ángulo que forman la recta r con otra recta r ' que es la proyección de r sobre el plano π ,

Si denominamos por α dicho ángulo, como la proyección r' de la recta r está contenida en el plano π , y será perpendicular al vector normal del plano $\vec{d}$.

Si $\vec{u}$ es el vector director de la recta r, el ángulo que forman r y r ' es complementario del que forman $\vec{d}$ y $\vec{u}$. Como los dos ángulos son complementarios, se tiene que

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=sen\,\alpha=\frac{|\vec{u}\bullet\vec{d}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}\Rightarrow\alpha=arcsen\left(\frac{|\vec{u}\bullet\vec{d}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}\right)$$

Si r y π tienen de ecuaciones $r:\frac{x-a}{u_1}=\frac{y-b}{u_2}=\frac{z-c}{u_3}$ y $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ respectivamente, la expresión analítica será

$$\alpha=arcsen\left(\frac{|A.u_1+B.u_2+C.u_3|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)$$

 # Ejemplo.- Sea la recta $r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{0}=\frac{z}{0}$ *y el plano* $\pi: 2x-y+2z=0$ *. El ángulo que forman la recta r y el plano* π *es:*

$$\alpha=arcsen\left(\frac{2.2+(-1).0+2.0}{\sqrt{2^2+0^2+0^2}.\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}\right)=\frac{2}{3}=41,81^o=41^o\,48'37,13''$$

8. Puntos simétricos

Dados un punto A y un plano π , denominamos **punto simétrico de A respecto de** π al punto A' del espacio, tal que la proyección de A sobre el plano π (*el punto M*) es el punto medio del segmento $[A, A']$. Al plano π se le denomina **base de la simetría** o **plano de la simetría**.

Dados un punto A y una recta r, denominamos **punto simétrico de A respecto de r** al punto A' del espacio, tal que la proyección de A sobre la recta r (*el punto M*) es el punto medio del segmento $[A, A']$. A la recta r se le denomina **eje de simetría**.

 # Ejemplo.- Para hallar el punto simétrico de $A(1,3,-1)$ *respecto del plano* $\pi: x-y+z=0$ *, como* $M(2,2,0)$ *es la proyección ortogonal de A sobre* π *(calculada en un ejemplo anterior) y es el punto medio entre* $A(1,3,-1)$ *y su simétrico* $A'(x,y,z)$ *, se*

cumplirá

$$(2,2,0)=\frac{1}{2}.((1,-3,-1)+(x,y,z))\Rightarrow(x,y,z)=(3,7,1)=A'$$

 # Ejemplo.- Para hallar el punto simétrico de $A(1,0,1)$ *respecto de la recta* $r:\left\{\begin{array}{c}x=1+t\\ y=2-t\\ z=t\end{array}\right\}$ *, como* $M(2,1,1)$ *es la proyección ortogonal de A respecto de la recta r (calculada en un ejemplo anterior) y es el punto medio entre y* $A(1,0,1)$ *su simétrico* $A'(x,y,z)$ *, se cumplirá*

$$(2,1,1)=\frac{1}{2}.((1,0,1)+(x,y,z))\Rightarrow(x,y,z)=(3,2,1)=A'$$