Actividad de modelización matemática en contexto con la ingeniería

Matemática B - 2025

Integrantes:

Saccani Ignacio 080429/1



Svec Boris 080108/5



<u>OBJETIVO</u>: Modelizar matemáticamente un objeto en el contexto de la ingeniería, calcular su volumen y área superficial, indicando su interés.

<u>Objeto a modelar</u>



Para nuestro proyecto nos decidimos por modelar la antena parabólica instalada en la estación terrena, construida en nuestra facultad el 20 de febrero del año pasado.

La estación terrena esta ubicada en la torre del Edificio Central y sirve tanto para la recepción como para el envío de información satelital.



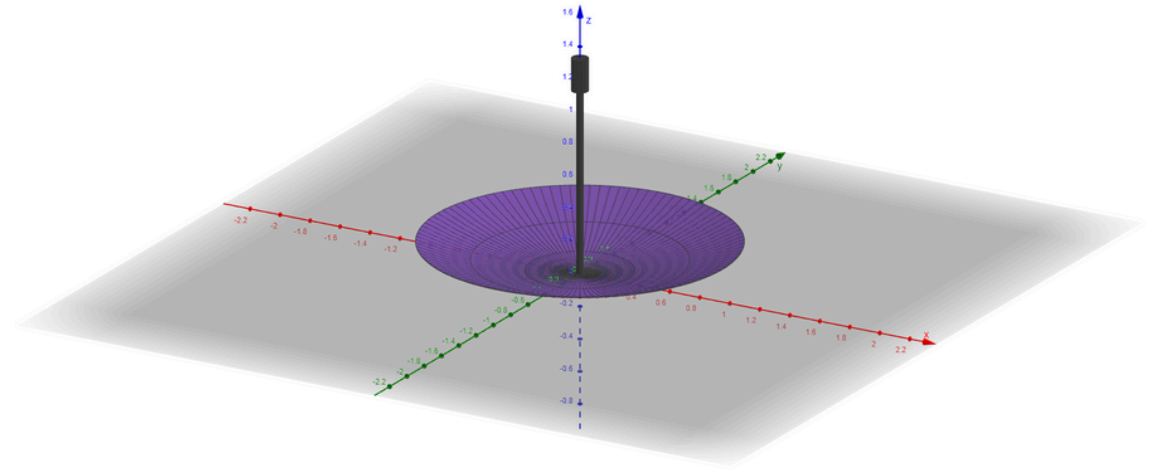
La función de la antena parabólica en la estación es utilizar su forma parabólica para enfocar las señales de baja intensidad provenientes del espacio en un único punto focal, donde se encuentran los receptores, y para dirigir una señal de alta potencia hacia el satélite.
El diámetro de la antena es de 1,90 metros

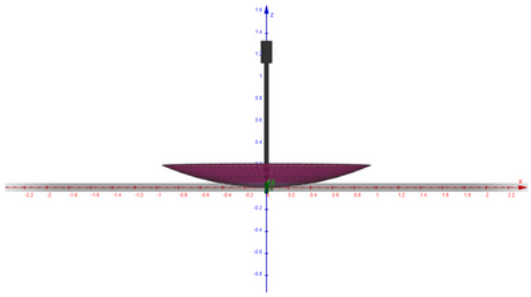
Modelización de superficies

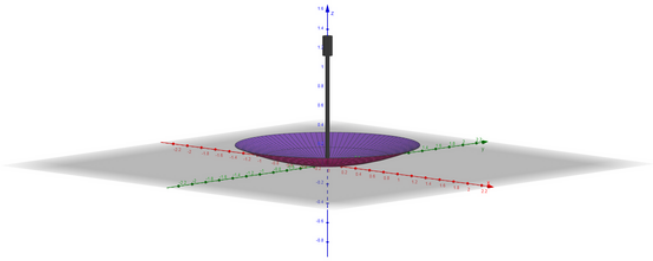
Para modelizar la antena tuvimos que modificarla a conveniencia para mayor facilidad de calculo y grafico, y asumir varios valores, ya que el único conocido es el radio del paraboloide.

- El grosor de la antena la fijamos en 0.002m porque nos pareció un grosor de malla o lámina posible o real.
- La altura del paraboloide es de 0.2m
- el receptor tiene un radio de 0.05m y su altura es de 0.2m
- Colocamos un soporte cilíndrico central de radio 0.02m (que emplean otras antenas), ya que modelizar cilindros inclinados y a su vez acotados entre superficies se nos dificultó demasiado.

Su construcción se basa en un cilindro de radio 0.95m y 0.002m de altura, entre dos paraboloides, uno centrado en el origen y otro desplazado 0.002m en el eje z positivo. A su vez, se calculo la posición del foco del paraboloide de arriba y a partir de ese punto se extendió hacia arriba 0.2m un cilindro de radio 0.05m. Por último se graficó otro cilindro de radio 0.02m que conecta el paraboloide superior, con el cilindro del receptor y se colocaron sus respectivas "tapas" al mismo.







https://www.geogebra.org/3d/jyt5yc5r

Superficies

Cilindro entre paraboloides

Queremos graficar un cilindro que tenga 1.90m de diámetro, este a 0.2m del origen y que tenga una altura de 0.002m. Utilizando coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} X = 0.95\cos(u) & 0 \leqslant u \leqslant 2\pi \\ y = 0.95\,\text{sen}(u) & 0.2 \leqslant Z \leqslant 0.202 \\ Z = Z \end{cases}$$

Paraboloide inferior

Para representar el paraboloide, necesitamos que este descripto hasta la curva inferior del cilindro, osea que coincida con su radio, entonces planteamos lo siguiente.

Forma del paraboloide: $Z = a\,(X^2 + Y^2)$

Necesitamos que coincida con la circunferencia $X^2 + Y^2 = (0.95)^2$ en $Z = 0.2$

Para averiguar "a" reemplazamos, $0.2 = a\,(0.95)^2 \rightarrow a = 0.2/0.9025$

Quedándonos $Z = 80/361\,(X^2 + Y^2)$

En coordenadas cilíndricas:
$$\begin{cases} X = r\cos(u) & 0 \leqslant r \leqslant 0.95 \\ Y = r\,\mathrm{sen}(u) & \\ Z = 80/361\,r^2 & 0 \leqslant u \leqslant 2\pi \end{cases}$$

Paraboloide superior

Para el paraboloide superior es muy similar, lo único que cambia es el desplazamiento que tiene en z, pero sigue siendo el mismo paraboloide.

Forma del paraboloide desplazado: $Z = a\,(X^2 + Y^2) + Zo$

Queda entonces: $Z = 80/361\,(X^2 + Y^2) + 0.002$

En coordenadas cilíndricas:
$$\begin{cases} X = r\cos(u) & 0 \leqslant r \leqslant 0.95 \\ Y = r\,\mathrm{sen}(u) & \\ Z = 80/361\,r^2 + 0.002 & 0 \leqslant u \leqslant 2\pi \end{cases}$$

Cilindro del receptor

Para poder describir el receptor, primero necesitamos calcular el foco del paraboloide superior. Sabiendo que "F" es la distancia del vértice al foco y el paraboloide también se puede representar como: $Z = \dfrac{(X^2 + Y^2)}{4F}$

Nos queda la relación $a = 1/4F$

despejando conseguimos $F = 1/4a \rightarrow F = 361/320$

Así nos queda el foco en el punto (0,0, 361/320+0.002)

Con eso tenemos la altura a la que empieza el cilindro. Como dijimos que el cilindro iba a tener un radio de 0.05m y una altura de 0.2m, en coordenadas cilíndricas nos queda:

$$\begin{cases} X = 0.05\cos(u) & 0 \leqslant u \leqslant 2\pi \\ Y = 0.05\,\mathrm{sen}(u) & \\ Z = Z & 1.130125 \leqslant Z \leqslant 1.330125 \end{cases}$$

Para las "tapas" tenemos las siguientes parametrizaciones:

$$\begin{cases} X = r\cos(u) & 0 \leqslant r \leqslant 0.05 \\ Y = r\,\mathrm{sen}(u) & 0 \leqslant u \leqslant 2\pi \\ Z = 1.130125 & \end{cases} \qquad \begin{cases} X = r\cos(u) & 0 \leqslant r \leqslant 0.05 \\ Y = r\,\mathrm{sen}(u) & 0 \leqslant u \leqslant 2\pi \\ Z = 1.330125 & \end{cases}$$

Cilindro de soporte

Por último, para describir el cilindro que une el receptor con la antena, hay que averiguar la intersección del cilindro con el paraboloide superior y la intersección con el plano sobre el cual esta descripto el receptor.

Para acotar la parte inferior del cilindro basta con igualar el radio del mismo en la función del paraboloide, quedando:

$$Z = 80/361\ (0.02)^2 + 0.002$$

$$Z = 0.0020887$$

Para la parte superior basta con utilizar el mismo plano que con el receptor, siendo:

$$Z = 1.130125$$

En coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} X = 0.02\cos(u) & 0 \leqslant u \leqslant 2 \\ Y = 0.02\,\mathrm{sen}(u) & \\ Z = Z & 0.0020887 \leqslant Z \leqslant 1.130125 \end{cases}$$

Cálculo del área y volumen

siendo el objeto de nuestro trabajo una antena parabólica, es de suma importancia el conocimiento de su área superficial, principalmente el del paraboloide que recibe y refleja las ondas, ya que te define cual va a ser la GANANCIA de la misma.

$$\text{Ganancia} = 10 \log \left[\frac{4\pi . A}{\lambda^2} \right]$$

La ganancia define la capacidad de redirigir paquetes de ondas que recibe o emita una antena, lo que se traduce a una mayor capacidad de recepción o envío de señales.

Se puede apreciar en la ecuación simplificada que el área aparece en la misma.

El volumen por otro lado no tiene una implicancia directa en la efectividad de una antena, sin embargo es esencial conocerla por motivos de espacio y a la hora de elegir el material en el que va a ser construida, ya que con el volumen total y la densidad de un material podemos saber el peso que va a tener la estructura dependiendo de la densidad del mismo.

Cálculo:

Volumen

VOLUMEN del Paraboloide = (0,002 m) · (Area del Paraboloide) m^3

Paraboloide: $z = \frac{80}{361} \cdot (x^2 + y^2)$ con $\sqrt{x^2+y^2} \in [0, 0,95]$

$$A = \iint_{Rxy} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\; dx\, dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{80}{361} \cdot 2x \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{80}{361} \cdot 2y$$

En polares:

$x = R\cos\theta$ $\quad R \in [0, 0,95]$ $\quad \theta \in [0, 2\pi]$
$y = R\,\mathrm{Sen}\,\theta$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{160}{361} \cdot R\cos\theta \;, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{160}{361} \cdot R\,\mathrm{Sen}\,\theta$$

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{0,95} \sqrt{\left(\frac{160\,R\cos\theta}{361}\right)^2 + \left(\frac{160\,R\,\mathrm{Sen}\,\theta}{361}\right)^2 + 1}\cdot R\, dR\, d\theta$$

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{0,95} \sqrt{\left(\frac{160}{361}\right)^2 \cdot (R^2\cdot\cos^2\theta + R^2\cdot\mathrm{Sen}^2\theta) + 1}\cdot R\, dR\, d\theta$$

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{0,95} \sqrt{\left(\frac{160}{361}\right)^2 \cdot R^2 + 1}\cdot R\, dR\, d\theta \qquad K = \frac{160}{361}$$

$u = K^2R^2 + 1$
$du = 2K^2 \cdot R\, dR \qquad \frac{du}{2K^2} = R\, dR$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{0,95} \sqrt{u}\cdot\frac{1}{2K^2}\, du = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}u^{3/2}\cdot\frac{1}{2K^2}\Big|_0^{0,95} d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{(K^2R^2+1)^{3/2}}{3\cdot K^2}\Big|_0^{0,95} d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{(K^2\cdot(0,95)^2+1)^{3/2}}{3K^2} - \frac{1}{3K^2}^{3/2}\right) d\theta \approx$$

$$\int_0^{2\pi} 2,167 - 1,696\, d\theta = 2\pi\cdot\frac{471}{100} \approx 2,96$$

Area Cara del Paraboloide $\approx 2,96\ m^2$ · Grosor uniforme = Vol Paraboloide

$2,96\ m^2 \cdot 0,002\ m = \boxed{0,00592\ M^3 = 5,92\ LT \text{ Vol Paraboloide}}$

Volumen del soporte

$$\begin{cases} x = 0{,}02 \cdot \cos(u) \\ y = 0{,}02 \cdot \operatorname{sen}(u) \\ z = v \end{cases} \quad \text{con } u \in \left[\frac{80}{361} \cdot (0{,}02)^2,\ 1{,}13025\right]$$

Radio = 0,02 m

$$H = 1{,}13025 - \frac{80}{361} \cdot (0{,}02)^2 \approx 1{,}13076$$

$$VOL = \pi \cdot R^2 \cdot H \quad \pi \cdot (0{,}02)^2 \cdot 1{,}13076 = 0{,}001420\ m^3 = 1{,}42\ LT$$

Volumen del receptor

$$\begin{cases} x = 0{,}05 \cos(u) \\ y = 0{,}05 \operatorname{sen}(u) \\ z = v \end{cases} \quad \text{con } u \in [0, 2\pi] \quad V \in [1{,}13025,\ 1{,}33025]$$

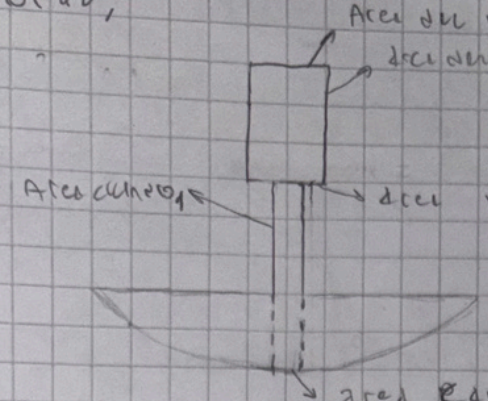
Radio = 0,05 m $\quad H = 1{,}33025 - 1{,}13025 = 0{,}2\ m$

$$VOL. = \pi \cdot (0{,}05)^2 \cdot 0{,}2 \approx 0{,}001571\ M^3 = 1{,}57\ LT$$

VOL. TOTAL = 5,92 LT + 1,42 LT + 1,57 LT = 8,91 LT

Área

Área total:



Área rapa de cilindro = $\pi \cdot R^2$

Área lateral de un cilindro = $2\pi \cdot R \cdot H$

$$A_{T_2} + A_{C_2} + (A_{T_2} - A_{T_1}) + A_{C_1} + A_{CP} + (A_{CP} - A_{T_1}) + 2\pi \cdot R_{paraboloide} \cdot grosor$$

$$\pi \cdot (0{,}05)^2 + (2\pi \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}2) + (\pi \cdot (0{,}05)^2 - \pi \cdot (0{,}02)^2) + (2\pi \cdot 0{,}02 \cdot 1{,}13076) + 2{,}96 + (2{,}96 - \pi \cdot (0{,}02)^2) + (2\pi \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}002) \approx$$

$26{,}75\ m^2$ Área total

Resultados:

Área

Área de la cara del paraboloide= 2,96 metros cuadrados

debido a la superposición de solidos, no seria correcto definir el área total como la suma de todas las áreas, por ende el calculo se torna un poco mas largo, dando un área total de 6,15 metros cuadrados.

Volumen

El volumen por otro lado si se puede pensar como la suma de todos los volúmenes de los cuerpos,

volumen del paraboloide: área de su cara*grosor= (2,96*0,002) metros cúbicos≈ 0,00592 metros cúbicos.

volumen del soporte: al ser un cilindro su volumen viene dado por $\pi r^2 H$
en este caso es de 0,001420 metros cúbicos.

Volumen del receptor: ocurre lo mismo que en el caso anterior, se trata de un cilindro por lo que su volumen es de 0,00157 metros cúbicos

Volumen total: suma de todos los volúmenes; 0,00891 metros cúbicos.

Para concluir nos resultaron muy interesantes las propiedades de las parábolas/paraboloides, sobre todo la propiedad focal del paraboloide, que no solo sirve para recibir paquetes de onda, sino que también sirve para enviarlos ordenadamente esto se aprovecha principalmente en las antenas parabólicas, linternas y radares, entre otros.

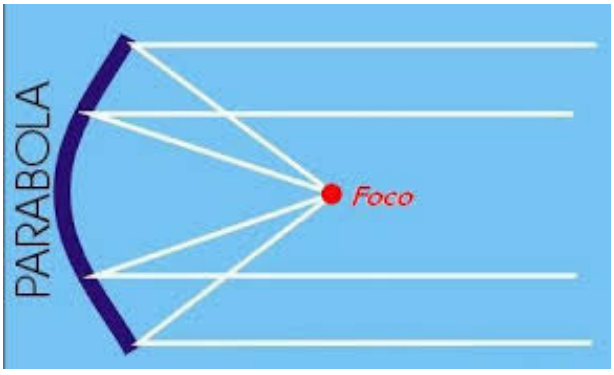


Imagen ilustrativa de la propiedad focal del paraboloide



Radar meteorológico parabólico en un avión