Anschauliche Zugänge zur Integralrechnung mit dem Integrator

Hans-Jürgen Elschenbroich

Es wird ein anschaulicher und weitgehend kalkülfreier Zugang zu Grundvorstellungen der Integralrechnung entwickelt, der Schüleraktivitäten und Verständnisgewinnung in den Vordergrund stellt. Dazu wird die digitale Lernumgebung *Integrator* vorgestellt, die zunächst die Rechenarbeit für Untersummen, Obersummen etc. an GeoGebra überträgt und dann einen direkten Zugang zur Integralfunktion ermöglicht, indem die rechte Integrationsgrenze dynamisch variiert wird. Das führt genetisch zur Findung des Hauptsatzes, zur Einsicht in den Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren.

Bei der Integralrechnung gibt es zwei typische Ansätze: Entweder klassisch geometrisch als Berechnung von Flächeninhalten zwischen einem Funktionsgraphen und der x-Achse oder anwendungsorientiert als (Re-)Konstruktion, d. h. als Berechnung eines Bestandes bei bekannter Änderungsrate.

1 Konstante Funktionen

In beiden Ansätzen ist die Aufgabe bei konstanten Funktionen $f(x) = c$ einfach zu lösen:

- Untersucht man anwendungsorientiert, wieviel Liter vom Zeitpunkt a bis zum Zeitpunkt b in einem Behälter geflossen sind, wenn pro Sekunde c Liter fließen, kommen wir auf den Term $c \cdot (b - a) = f(x) \cdot \Delta x$ (Abb. 1).
- Beim geometrischen Ansatz kommen wir mit der Flächenformel für Rechtecke ebenso auf $c \cdot (b - a) = f(x) \cdot \Delta x$.

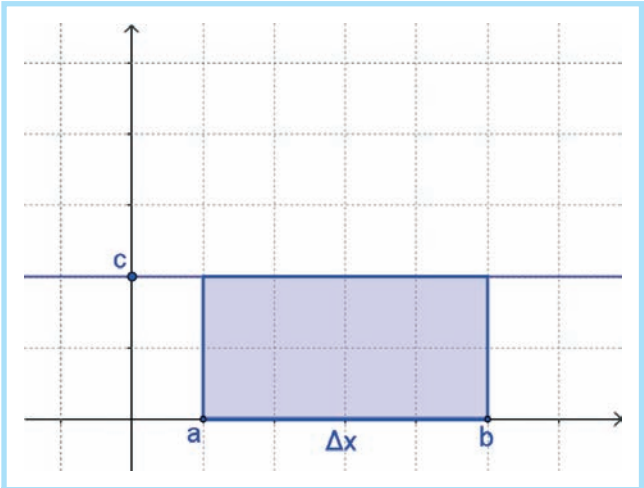

Abb. 1. Flächeninhalt $c \cdot (b - a)$

Dabei drängt sich gleich die Frage auf, wie sich der Inhalt dynamisch entwickelt, wenn x als rechte Grenze im Intervall $[a; b]$ variabel ist. Damit kommen wir von der Berechnung eines konkreten Wertes zu einer funktionalen Sichtweise. Im Sachzusammenhang kann man hier anschaulich von einer ›Füllfunktion‹ sprechen. Es ist offensichtlich, dass die Füllfunktion in diesem Fall eine lineare Funktion mit der Steigung c ist, was man mit Spur oder Ortslinie des Punktes $I = (x, Inhalt)$ auch sichtbar machen kann (Abb. 2).

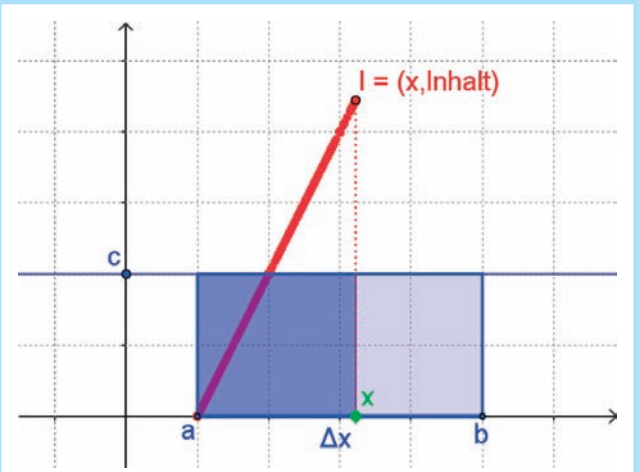

Abb. 2. Dynamischer Füllvorgang, lineare Füllfunktion

Bei einer stückweise konstanten Funktion erhalten wir dann eine stückweise lineare Füllfunktion (Abb. 3), die in natürlicher Weise stetig ist.

Das kann man dann fortsetzen und geometrisch den Flächeninhalt unter dem Graphen einer linearen Funktion $f(x) = m \cdot x$ berechnen (Hoffkamp, 2009). Oder man untersucht anwendungsorientiert den zurückgelegten Weg bei linearer Beschleunigung (z. B. im freien Fall).

Bei komplizierteren Funktionen f kann man diese dann durch stückweise konstante Funktionen ersetzen und diesen Ersetzungsprozess verfeinern. Hierbei ist es zur Entwicklung des Integralbegriffs sinnvoll und nötig, die n-ten Untersummen und Obersummen zu betrachten, um eine Einschachtelung zu erreichen. Wir beschränken uns für den Zugang im schulischen Rah-

MNU Journal – Ausgabe 5.2017 – ISSN 0025-5866 – © Verlag Klaus Seeberger, Neuss

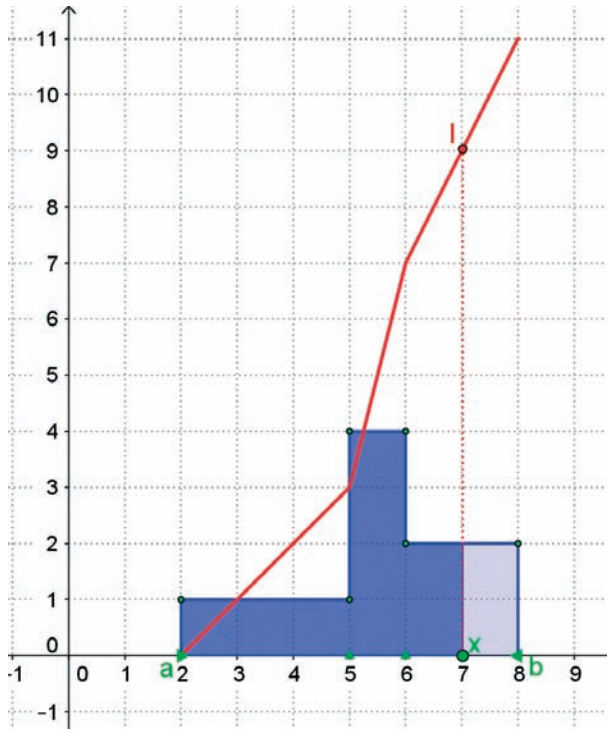

Abb. 3. Dynamischer Füllvorgang, stückweise lineare Füllfunktion

men auf stetige Funktionen *f* und äquidistante Unterteilungen des Intervalls [*a*; *b*]. Dabei sind entsprechende Produktsummen zu berechnen, wobei man für den mathematischen Grenzwertprozess entsprechende Formeln braucht. Dies ist mit teilweise erheblichem Rechenaufwand und mit meist nicht einfachen Summenformeln verbunden (insbesondere wenn man diese Formeln nicht einfach vertrauensvoll aus Formelsammlungen nimmt, sondern herleitet).

2 Untersumme, Obersumme, Integral

Die Lernumgebung *Integrator* (Elschenbroich, 2016, 2015; Elschenbroich & Seebach, im Druck) ermöglicht es, zu einer beliebigen Funktion *f* mit einem Schieberegler für die Variable *n* zunächst über einem Intervall [*a*; *b*] die Untersumme U_n und die Obersumme O_n für *n* äquidistante Unterteilungen zu berechnen (*n* kann dabei groß werden, bleibt aber endlich). Ohne weiteren Rechenaufwand auf Benutzerebene kann man *n* am Schieberegler variieren und die Auswirkungen auf U_n und O_n beobachten und natürlich auch *a*, *b*, und *f* ändern (Abb. 4). Dies entspricht dem standardmäßigen schulischen Ansatz, bietet aber in der digitalen Lernumgebung den Vorteil, für größere *n* oder für andere *a* und *b* nicht jedesmal alles neu berechnen zu müssen, sondern einfach die mächtigen Tools von GeoGebra als ›Rechenknecht‹ nutzen zu können.

Dabei ist aber bei aller Beschleunigung durch mächtige Tools zwischendurch auch auf eine Entschleunigung, auf ein Innehalten und Vertiefen zu achten, indem bei geeigneten Funktionen und kleinen *n* die entsprechenden Berechnungen für U_n und O_n von den Schüler/inne/n mit dem Taschenrechner selber durchgeführt werden. Dabei bietet es sich an, solche Funktionen, Intervalle und Unterteilungen zu wählen, wo die Unter- und Obersummen einfach zu finden sind und mit Links- oder Rechtssummen übereinstimmen.

Für sehr große *n* erlebt man dann, wie sich die Werte von U_n und O_n immer mehr annähern. Auch wenn dies numerisch durchaus langsam vonstattengeht, ist doch die Tendenz der Annäherung anschaulich unverkennbar.

3 Summenfunktionen, Integralfunktion

Der entscheidende Schritt kommt nun, indem wir die rechte Grenze *x* im Intervall [*a*; *b*] variabel ansetzen (was beim Einstieg schon als ›Füllfunktion‹ vertraut ist). So ist es möglich,

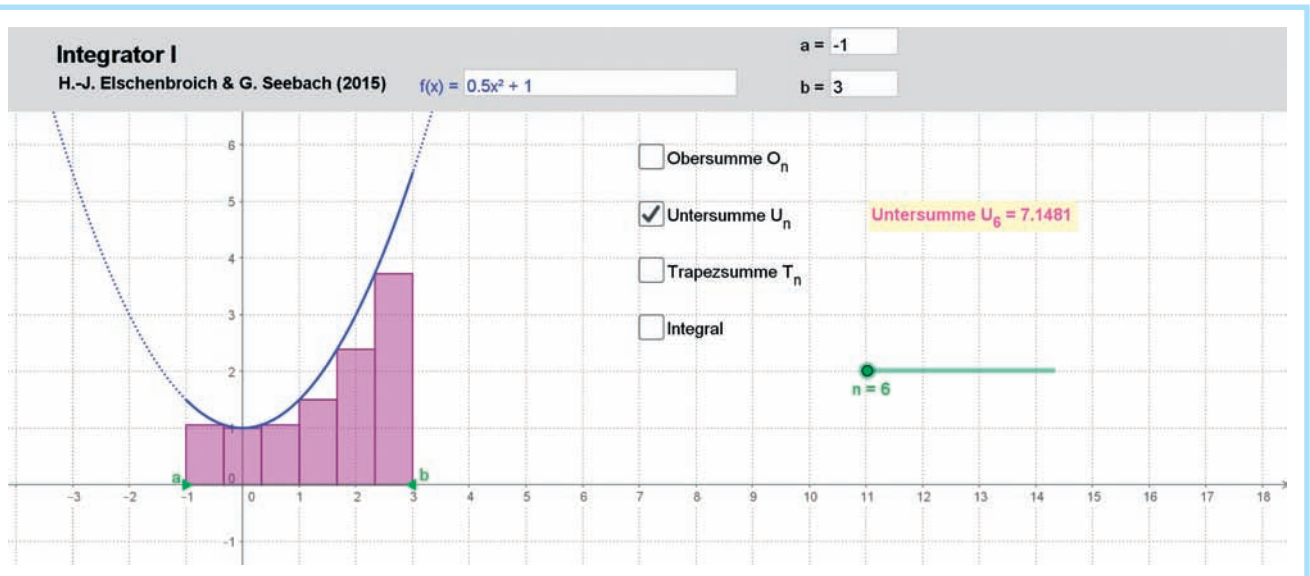

Abb. 4. Untersumme U_n und Obersumme O_n von *f* über [*a*; *b*]

über $[a; x]$ mit $x \in [a; b]$ die Werte von U_n und O_n zu berechnen und als y-Koordinate in passende Punkte $U_a = (x; _)$ und $O_a = (x; _)$ zu exportieren. Wir erhalten aus diesen Punkten dann die Graphen der Untersummenfunktion und Obersummenfunktion als Ortslinien und erleben, wie diese für immer größere n schließlich auf Bildschirmebene anschaulich zusammenfallen (Abb. 5). Dies führt uns so genetisch zur Integralfunktion, die für jedes n von der entsprechenden Untersummenfunktion und Obersummenfunktion eingeschachtelt wird. Allerdings sind Untersummenfunktion und Obersummenfunktion begrifflich nicht ganz trivial. Sie hängen einerseits vom Parameter a ab. Andererseits spielt auch der Wert von n eine wichtige Rolle bei der sukzessiven Annäherung an die Integralfunktion.

Wenn man aus Zeitgründen oder Komplexitätsgründen einen direkten Zugang haben möchte, kann man auch sofort und nur den Wert des Integrals von f auf $[a; x]$ in die y-Koordinate eines Punktes $Z = (x; _)$ exportieren und das Verhalten dieses Punktes untersuchen. Insbesondere kann man dessen Ortslinie noch so gestalten, dass sie nicht global, sondern nur dynamisch bis zur jeweiligen Stelle x gezeichnet wird (Abb. 6). Damit erhalten wir einen digitalen Integraphen, der *graphisch* die Integralfunktion zu einem gegebenen Funktionsgraphen zeichnet (ELSCHENBROICH, 2016). Wir können alternativ auch das CAS-Tool von GeoGebra nutzen und bekommen mit dem Befehl `Integral[f,a,x]` nicht nur einen graphischen, sondern auch einen *funktionalen* Zugang zur Integralfunktion.

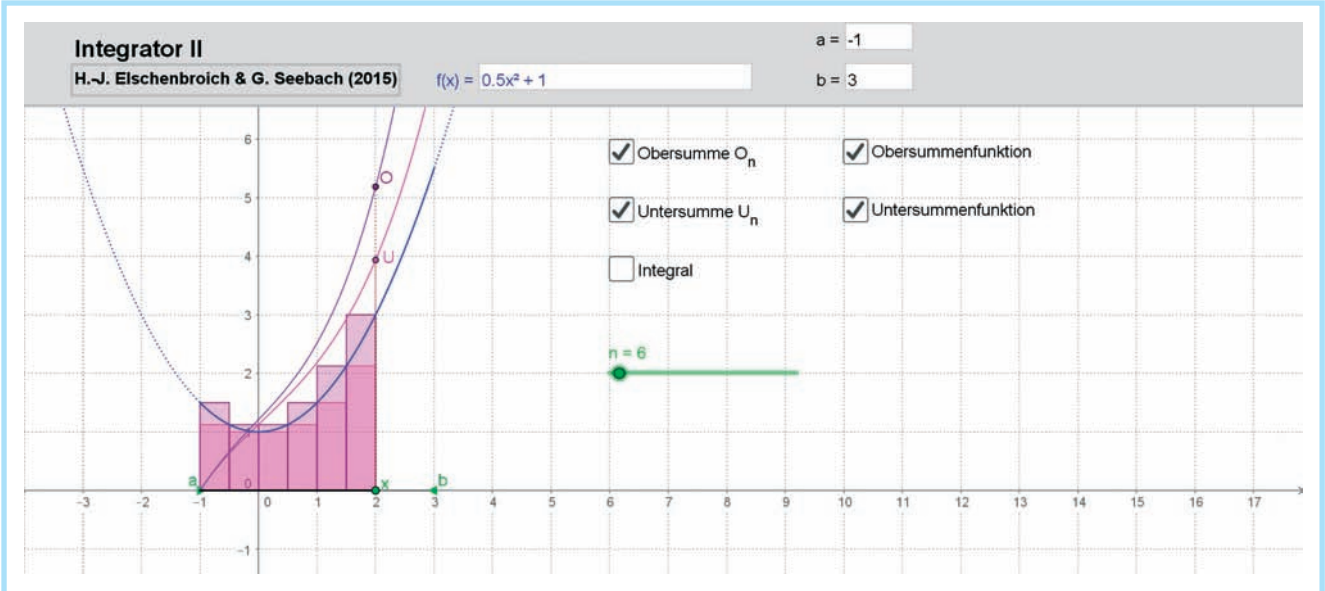

Abb. 5. Untersummen- und Obersummenfunktionen

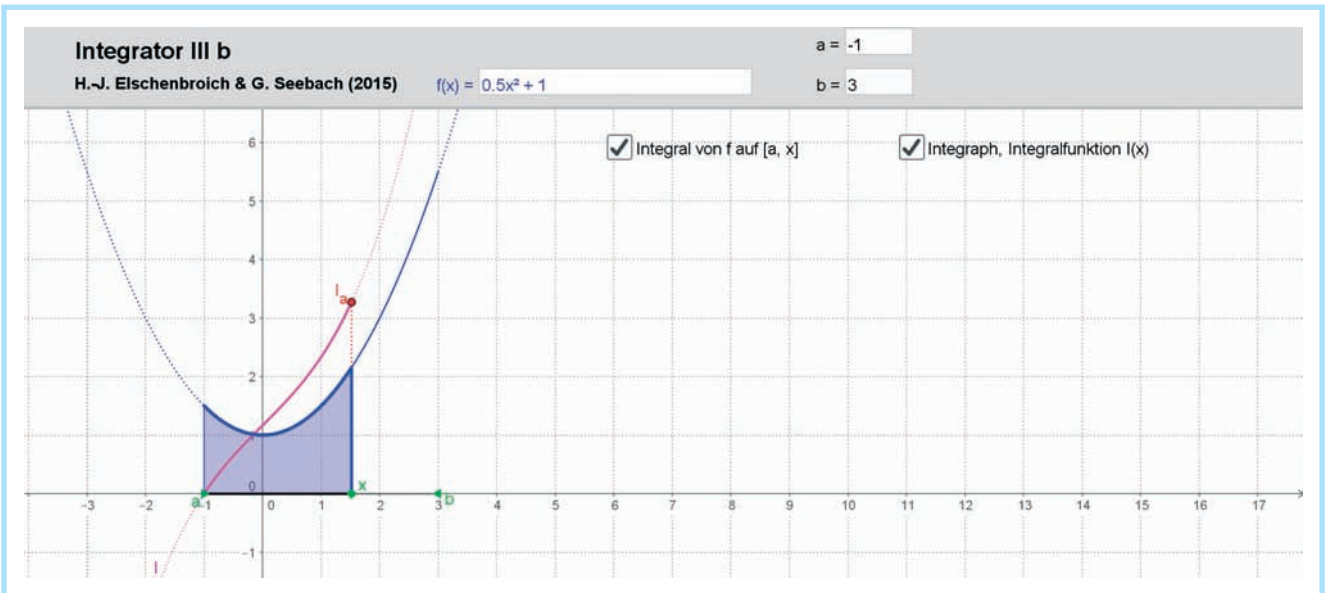

Abb. 6. Dynamische Integralfunktion, Integraph

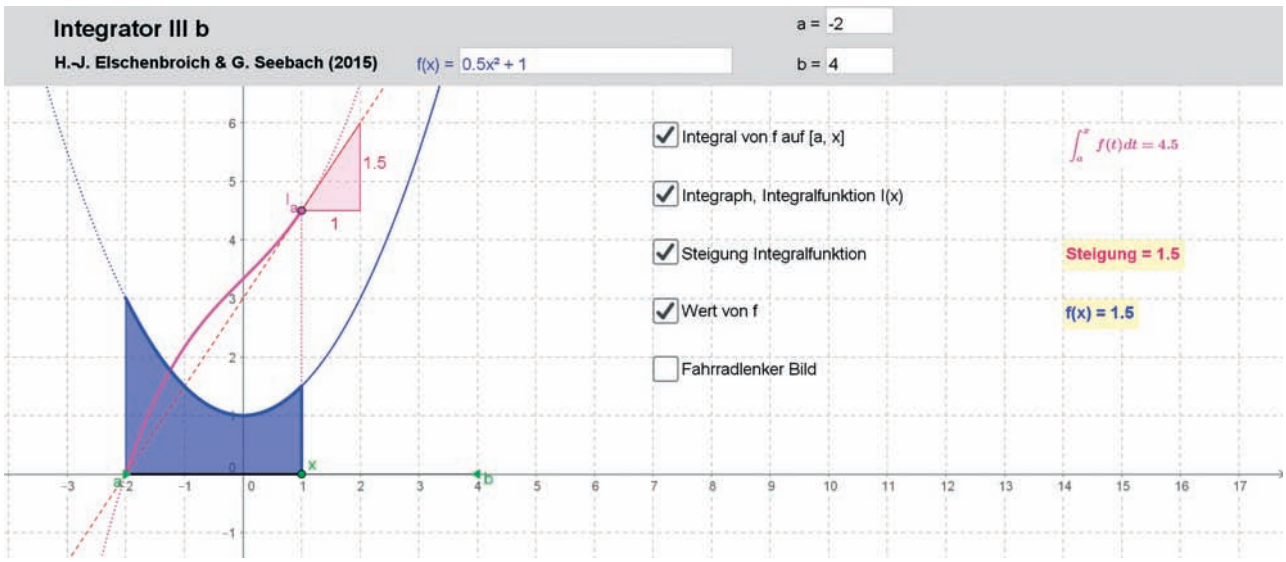

Abb. 7. Entdecken des Hauptsatzes

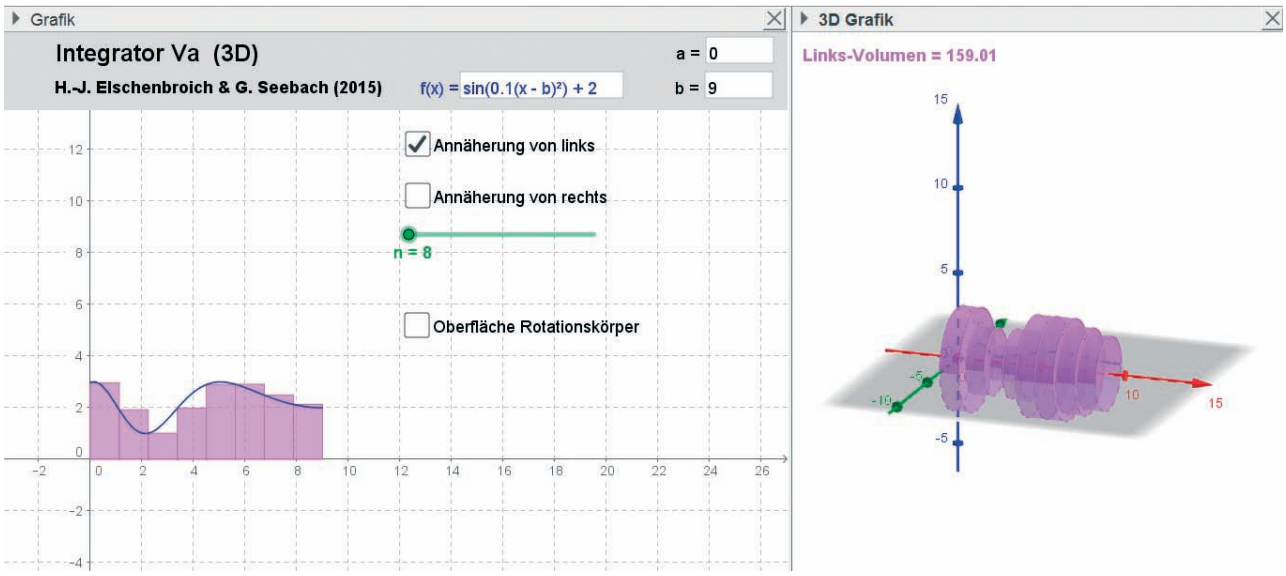

Abb. 8. Rotationsvolumen

4 Hauptsatz

Die Integralfunktion bietet in der dynamischen Integrator-Umgebung die Möglichkeit, die Steigung der Integralfunktion im Punkt Z, d. h. an der Stelle x, und den Zusammenhang mit der Ausgangsfunktion f zu untersuchen (Abb. 7). Dabei kann man entdecken, dass die Steigung der Integralfunktion stets genauso groß ist wie der Wert von $f(x)$ (Blum, Elschenbroich & Krimmel, 2016). Natürlich ist das kein formaler Beweis, hier steht das Erleben, das Entdecken dieses Sachverhalts im Vordergrund. Dies bereitet aber den klassischen Beweis vor. Den Integrator kann man dabei nutzbringend einsetzen, indem man die Integralfunktion von stückweise konstanten Funktionen untersucht und erkennt, dass an den Sprungstellen von f die Integralfunktion eine Knickstelle hat und nicht differenzierbar ist (vgl. Abb. 3).

Als ›Schmankerl‹ kann man noch in Z einen symbolischen Fahrradfahrer einblenden, der auf dem Graphen der Integralfunktion lang fährt, dessen Lenker auf der Normalen liegt und der Lichtkegel stets in Richtung der Tangente weist.

5 Volumen von Rotationskörpern

Ein direkter und graphischer Zugang ist auch bei der Berechnung des Volumens von Rotationskörpern möglich. Hier kann

man für immer größere n links im 2D-Fenster die Rand-Funktion f wie gehabt durch Rechteck-Streifen approximieren und rechts im 3D-Fenster die Approximation des Rotationskörpers durch zugehörige Zylinder-Scheiben erleben und sehen, wie der Rotationskörper für größere n immer ›glatter‹ wird (Abb. 8). Aus programmtechnischen Gründen wird im 3D-Fenster einfach mit Linkssumme und Rechtssumme statt Untersumme und Obersumme gearbeitet (was bei stetigen Funktionen ja problemlos ist).

Offensichtlich wird durch die Summation der Zylinder $\pi \cdot f^2(x) \cdot h$ letztlich die Funktion $g(x) = \pi \cdot f^2(x)$ integriert. Wenn man dabei noch erkennt, dass $\pi \cdot f^2(x)$ geometrisch der Flächeninhalt eines Kreises ist, der als Schnittfläche einer zur x-Achse orthogonalen Ebene mit dem Rotationskörper entsteht, so erhält man in einer dynamischen Sicht den ›Film‹ eines durch den Rotationskörper wandernden Kreises (Abb. 9).

Dies führt auf einen weiteren Zugang zum Rotationsvolumen, nämlich als Integral der Querschnittsfläche längs der Höhe des Körpers.
So wie man im 2D-Fall die Integralfunktion mit der Vorstellung des ›Flächen füllen‹ verbinden kann, so bietet sich hier die Vorstellung des ›Körper füllen‹ an.

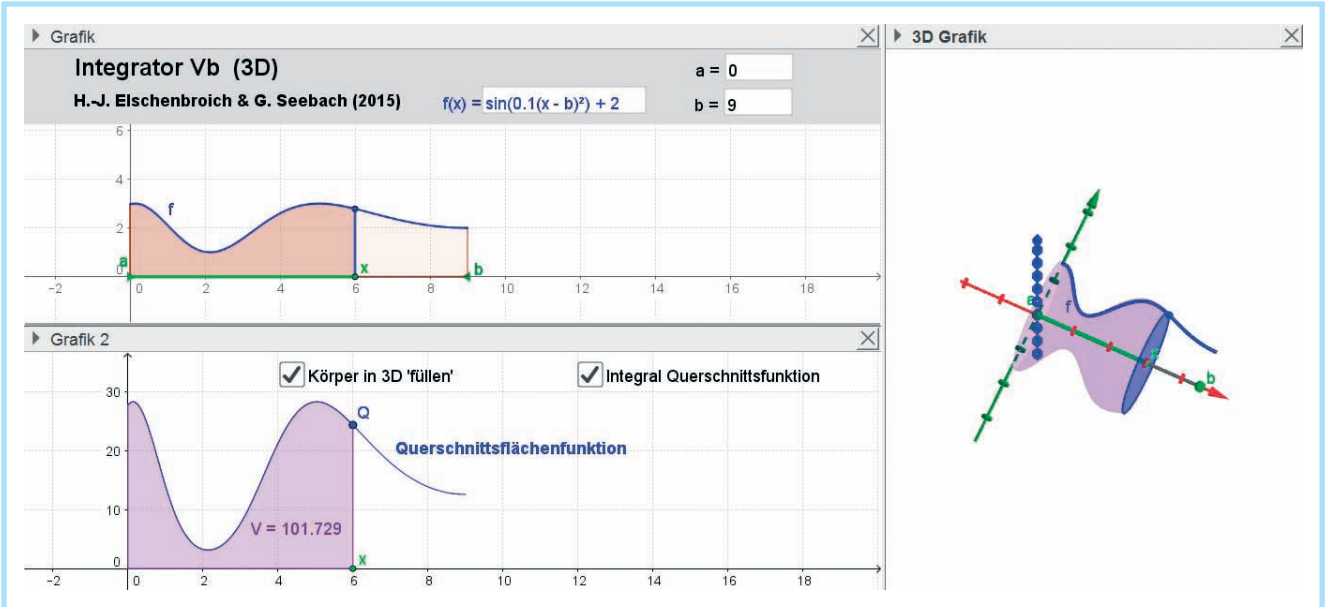

Abb. 9. Volumen und Querschnittsfläche

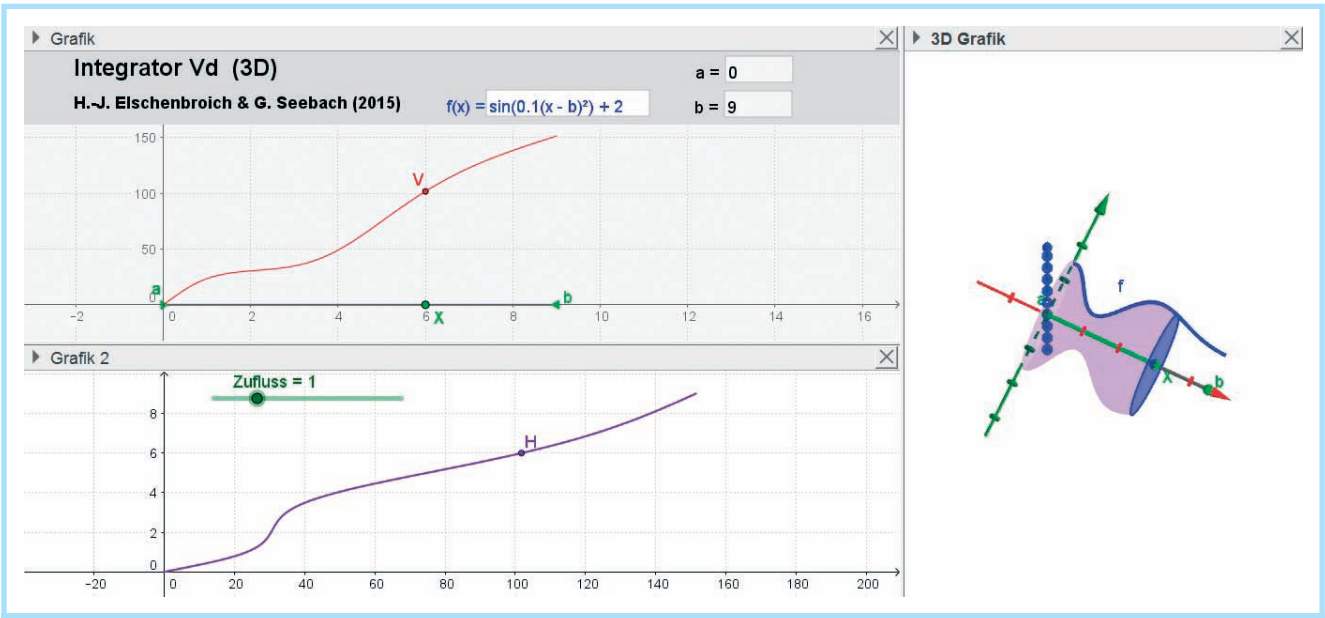

Abb. 10. Füllhöhe

6 Füllhöhe

Diese Sichtweise des ›Körper füllen‹ ist ausgesprochen fruchtbar. Da die Integralfunktion von $\pi \cdot f^2(x)$ einen funktionalen Zusammenhang von ›Füllhöhe‹ und Volumen liefert, erhalten wir bei der Umkehrung den Zusammenhang von Volumen und Füllhöhe.

Das Spiegeln der Volumenkurve an der Hauptwinkelhalbierenden ist hier in *einem* Koordinatensystem aber optisch nicht günstig. Es bietet sich daher an, den gespiegelten Graphen im zweiten Grafikfenster zu zeigen und da die *x*-Achse und die *y*-Achse sinnvoll zu skalieren (Abb. 10).

7 Ein Blick zurück und nach vorn

Als schulisches Thema hat die Differenzial- und Integralrechnung und die Behandlung von Funktionen überhaupt erst eine sehr kurze Historie. Erst Anfang des 20. Jahrhunderts wurde in der Meraner Reform überhaupt in Erwägung gezogen, das heute Analysis genannte Themengebiet in die Schule zu bringen (was damals eine umwälzende Neuerung war). Für die Unterprima hieß es unter dem Label Arithmetik (!): »Zusammenhängende Betrachtung der bisher aufgetretenen Funktionen in ihrem Gesamtverlauf nach Steigen und Fallen (unter eventueller Heranziehung der Begriffe des Differentialquotienten und des Integrals), mit Benutzung zahlreicher Bespiele aus der Geometrie und Physik, insbesondere der Mechanik.« (Gutzmer, 1908, S. 110 f). Über die ›eventuelle‹ (!) Heranziehung der Begriffe (!) hinaus war nichts in Richtung des uns heute geläufigen Kalküls der Integrations- und Ableitungsregeln vorgesehen. Selbst nach dem 2. Weltkrieg hieß es noch: »Es besteht ja kein Zweifel darüber, dass die Technik des Integrierens nicht zu den Lehraufgaben der höheren Schule gehört, dagegen darf man wohl von einem zur Hochschule gehenden jungen Menschen erwarten, dass er den Sinn des Integralzeichens wirklich begriffen hat.« (Kraft, 1948, S. 13)

Bei der Funktionenlupe und dem Integrator liegt der Fokus heute deutlich auf der Entwicklung von Verständnis, dem Aufbau von Grundvorstellungen. Die Anschaulichkeit und Kalkülfreiheit dieses Ansatzes soll nicht als Feldzug gegen den gängigen Analysis-Kalkül missverstanden werden, es soll vor allem dem Kalkül eine anschauliche Basis gegeben werden. Es ist auch nicht intendiert, dass die Schüler keinerlei eigene Berechnungen mehr machen sollen. Ein Rückgang des Kalkülanteils und eine Beschränkung auf Exemplarisches ist aber schon seit Jahrzehnten kontinuierlich zu beobachten und wird sich sicher auch fortsetzen. Dafür gibt es diverse Gründe, von der Verkürzung von Schulzeit und Unterrichtsstunden bis hin zum Aufkommen der Stochastik. Dass man zu der Zeit vor 70 oder 100 Jahren zurück kommt, möchte ich bezweifeln. Aber sicher wird, auch durch die Verfügbarkeit von CAS, immer wieder die Frage neu zu beantworten sein: Wieviel und welche Ableitungs- und Integrationsregeln sollen neben dem Grundverständnis von Ableitung und Integral und dem Hauptsatz gelehrt und geübt werden? Wann und in welchen Fällen wollen wir ein CAS zulassen, das uns zu einer gegebenen Funktion *f* die Ableitung oder die Integralfunktion ausgibt? Auf diese Fragen wird es keine Antwort von Ewigkeitswert geben, sie müssen immer wieder aktuell neu beantwortet werden.

Konkrete Aufgabensequenzen zur Arbeit mit dem Integrator finden sich in der Online-Ergänzung zu diesem Beitrag.

Literatur

Blum, W., Elschenbroich, H.-J. & Krimmel, K. (2016). Das Integral wirklich verstehen. *mathematik lehren, 199*, 37–42.

Elschenbroich, H.-J. & Seebach, G. (im Druck, vstl. 2018). *Mathe mit Pfiff*. Erscheint in Velber: Friedrich Verlag.

Elschenbroich, H.-J. (2016). Anschauliche Zugänge zur Analysis mit alten und neuen Werkzeugen. *Der Mathematikunterricht, 1*, 26–34.

Elschenbroich, H.-J. (2015). Digitale Werkzeuge im Analysis-Unterricht. In W. Blum, S. Vogel, C. Drüke-Noe, A. Roppelt (Hrsg.), *Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II* (S. 244–254). Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage.

Gutzmer, A. (1908). *Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte*. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner.

Hoffkamp, A. (2009). Funktionales Denken und Analysispropädeutik – Ein Beitrag zu einem qualitativen Einstieg in die Schulanalysis durch Computereinsatz. *http://cermat.org/sites/default/files/Rundbrief-CA-Hoffkamp.pdf*

Kraft, A. (1948). Propädeutik im mathematischen Unterricht. *MNU, 1*, 9–13.

Links

www.integrator-online.de

mit online ergänzung www.mnu.de

Hans-Jürgen Elschenbroich, Korschenbroich, hans-juergen.elschenbroich@mnu.de, war Lehrer für Mathematik und Informatik, Fachleiter am Studienseminar und Medienberater sowie Fachreferent Mathematik im MNU-Bundesvorstand.