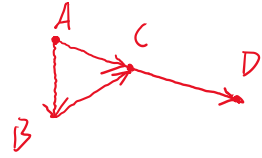


12月23日作业

1. 设向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, 若 $\vec{AB} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{BC} = \vec{a} - 2\vec{b}, \vec{CD} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$. 求证: A, C, D 三点共线.

证明: $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{a} - 2\vec{b} = 2\vec{a} - \vec{b}$
 $\vec{CD} = 4\vec{a} - 2\vec{b} = 2(2\vec{a} - \vec{b})$
 $\therefore \vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{CD}$
 $\therefore \vec{AC}, \vec{CD}$ 共线 即 A, C, D 三点共线.



2. 已知函数 $f(x) = mx^2 + 4mx + 3$, $m \in \mathbf{R}$.

(I) 若 $m = 1$, 求 $f(x) \leq 0$ 的解集;

解: $\because m = 1 \therefore f(x) = x^2 + 4x + 3$
 $\therefore f(x) \leq 0 \therefore x^2 + 4x + 3 \leq 0$
 $\therefore (x+1)(x+3) \leq 0$
 $\therefore f(x) \leq 0$ 的解集为 $\{x | -3 \leq x \leq -1\}$.

(II) 若方程 $f(x) = 0$ 有两个实数根 x_1, x_2 , 且 $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 > 0$, 求 m 的取值范围.

解: $\because$ 方程 $f(x) = 0$ 有两个实数根 $\therefore \Delta \geq 0$ 且 $m \neq 0$
 $\therefore \begin{cases} 16m^2 - 12m \geq 0 \\ 16 - \frac{15}{m} > 0 \\ m \neq 0 \end{cases}$ 解得 $m < 0$ 或 $m > \frac{15}{16}$.
 $\therefore m \in \{m | m < 0 \text{ 或 } m > \frac{15}{16}\}$.

3. 已知函数 $f(x) = \log_2(4 - x^2)$.

(I) 求 $f(x)$ 的定义域;

解: $\because 4 - x^2 > 0 \therefore x^2 - 4 < 0 \therefore -2 < x < 2$
 $\therefore f(x)$ 的定义域为 $(-2, 2)$.

(II) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并证明你的结论;

答: $f(x) = \log_2(4 - x^2)$ 是偶函数.
 $\because f(-x) = \log_2(4 - (-x)^2) = \log_2(4 - x^2) = f(x)$
 $\therefore f(x)$ 是定义域上的偶函数.

(III) 若 $f(x) \leq \log_2(mx + 5)$ 对于 $x \in (0, 2)$ 恒成立, 求实数 m 的最小值.

解: $\because f(x) \leq \log_2(mx + 5) \therefore \log_2(4 - x^2) \leq \log_2(mx + 5)$
 $\therefore mx + 5 \geq 4 - x^2$
 $m \geq \frac{-x^2 - 1}{x}$ 即 $m \geq -(x + \frac{1}{x})$

设 $g(x) = -(x + \frac{1}{x}) \therefore g(x) = -(x + \frac{1}{x}) \leq -2 \therefore g(x)_{\max} = g(1) = -2$.
 $\therefore m \geq -2 \therefore m$ 的最小值是 -2 .