ΑΡΣΑΚΕΙΑ – ΤΟΣΙΤΣΕΙΑ ΣΧΟΛΕΙΑ
ARSAKEIA – TOSITSEIA SCHOOLS

[Η έννοια της συνάρτησης]

πειραματική διδασκαλία στη Β΄ Γυμνασίου
με τη διαμεσολάβηση
ψηφιακών εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας

φύλλο εργασίας

Ομάδα: _____

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.

Συντονισμός Μαθηματικών Φ.Ε
Μ. Τσιλπιρίδης – Δ. Τσαντούλα
Μάρτιος 2026

Εισαγωγή

Στην οθόνη βλέπετε το αρχείο peirama_1.ggb, του λογισμικού Geogebra, με το οποίο θα πειραματιστούμε.

Σε αυτό υπάρχει ένας **δρομέας Δ**, που αντιπροσωπεύει ένα τηλεχειριστήριο το οποίο μπορεί να ανοιγοκλείνει έως και 100 συσκευές. Επίσης, υπάρχουν 2 σειρές από συσκευές με ονομασίες Ο, Α, Β, C, D,… που το πλήθος τους αλλάζει από το δρομέα «**συσκευές**».

Πατώντας το κουμπί "**[Άναψε]**", ο δρομέας Δ αλλάζει τιμές και ταυτόχρονα ανάβουν συσκευές από την κάθε σειρά.

1ο Πείραμα:

Ρυθμίστε το δρομέα «συσκευές» στην τιμή 10 και πατήστε το κουμπί "[Άναψε]" για να αρχίζουν να ανάβουν οι συσκευές και το ίδιο κουμπί όταν θέλετε να σταματήσουν να ανάβουν.

Δραστηριότητα (Δ1.1):

Συμπληρώστε στη 2η στήλη, τα γράμματα από τις συσκευές που άναψαν, στους παρακάτω πίνακες:

1η σειρά συσκευές			**2η σειρά συσκευές**	
Αριθμοί Δ	**Συσκευές**		**Αριθμοί Δ**	**Συσκευές**
1			1	
13			13	
25			25	
42			42	
100			100	

Ερώτημα (Ε1.1):

Στους δύο προηγούμενους πίνακες, συγκρίνοντας τις απαντήσεις σας στην 1η σειρά συσκευών και στη 2η σειρά, **ποια διαφορά εντοπίζετε** στον τρόπο που κάθε αριθμός Δ ανάβει τις συσκευές;

_____

_____

_____

_____

Ερώτηση (Ε1.2)

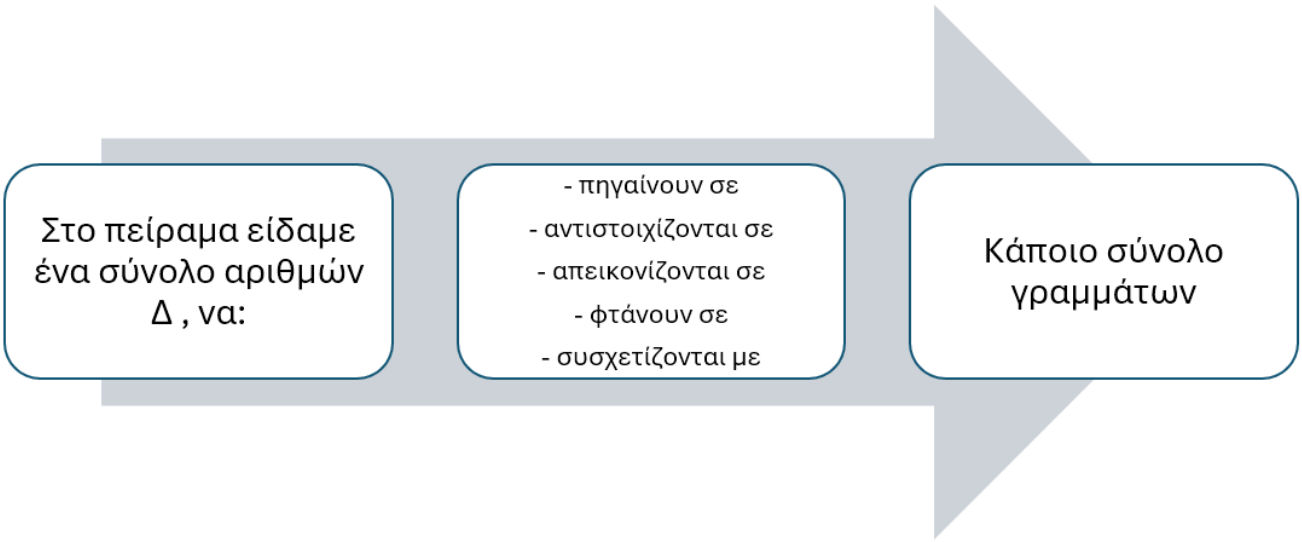
Ποια είναι η γνώμη σας για το εξής: (επιλέξτε με ☑ την απάντηση που θεωρείτε σωστή):

☐ Οι συσκευές που ανάβουν κάθε φορά, **εξαρτώνται** από τους αριθμούς Δ.

☐ Οι αριθμοί Δ, **εξαρτώνται** από τις συσκευές που ανάβουν κάθε φορά.

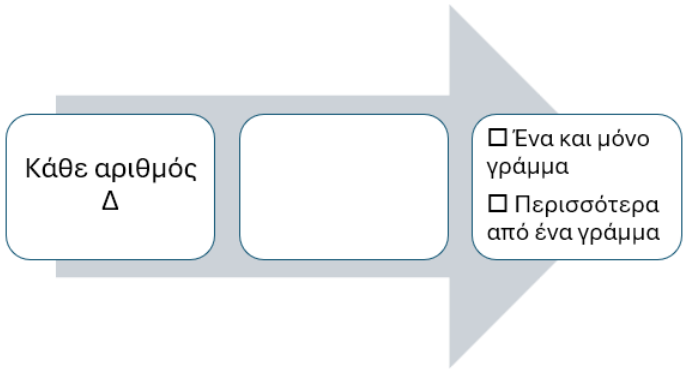
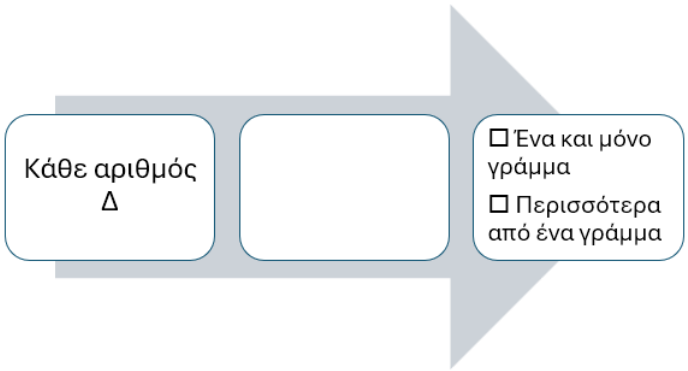
Δραστηριότητα (Δ1.2):

Παίρνοντας υπόψη τις παρατηρήσεις σας από τον πειραματισμό, υπογραμμίστε παρακάτω **στο μεσαίο κουτί μέχρι 2 φράσεις**, οι οποίες εκφράζουν καλύτερα για εσάς την εμπειρία από τον πειραματισμό σας. Διαγράψτε τις υπόλοιπες.



Δραστηριότητα (Δ1.3):

Συμπληρώστε παρακάτω, στα μεσαία κουτιά τη φράση (ή τις φράσεις) που επιλέξατε προηγουμένως και βάλτε ☑ στα κενά κουτάκια δεξιά στην κατάλληλη θέση:

1η σειρά συσκευές	2η σειρά συσκευές
	

Συμπέρασμα:

Στην **1η περίπτωση** θα λέμε ότι έχουμε μία **συνάρτηση**, από το σύνολο των αριθμών Δ στο σύνολο των γραμμάτων Ο, Α, Β, C, D, …

Δραστηριότητα (Δ1.4):

I. Με βάση τα προηγούμενα, πάμε να γράψουμε τον ορισμό της **συνάρτησης** (συμπληρώστε τα κενά):

Θα λέμε γενικά, ότι έχουμε μία **συνάρτηση** από ένα σύνολο Χ σε ένα σύνολο Ψ, όταν ……. στοιχείο του συνόλου Χ, ……. …… ……. μόνο στοιχείο του συνόλου Ψ.

II. Δώστε τώρα ένα δικό σας παράδειγμα **συνάρτησης**:

Σύνολο Χ;	**Σύνολο Ψ;**

2ο Πείραμα:

Από το διακόπτη [2η σειρά], κλείστε τη 2η σειρά συσκευών και ρυθμίστε το δρομέα **«συσκευές»** ώστε να εμφανίζονται μόνο 3 συσκευές στην 1η σειρά . Πατήστε «**Άναψε**».

Ερώτηση (Ε2.1)

Η Μαρία και ο Γιάννης προσπάθησαν να βρουν τον τρόπο που κάθε αριθμός Δ ανάβει κάθε συσκευή. Έτσι λοιπόν πειραματίστηκαν με τις **3 συσκευές** και η Μαρία κατέληξε στο συμπέρασμα ότι αριθμοί όπως το 6, το 12, το 27 κ.λ.π ανάβουν τη συσκευή Ο.

Ο Γιάννης συμπλήρωσε ότι γενικά οι αριθμοί που είναι **πολλαπλάσια του 3** θα ανάβουν τη συσκευή Ο.
Η Μαρία συμφώνησε και είπε ότι και οι συσκευές Α και Β δεν μπορεί να ανάβουν τυχαία. Όμως ούτε η Μαρία ούτε ο Γιάννης, δεν μπορούσαν να καταλάβουν ποιοι αριθμοί ανάβουν τις συσκευές Α και Β.

- Συμφωνείτε με τη Μαρία και τον Γιάννη;
- Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα τιμών και προσπαθήστε από αυτόν να καταλάβετε τη **γενική μορφή** των αριθμών που ανάβουν τις συσκευές Ο, Α και Β;

Αριθμός Δ	Συσκευές
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

Παρατηρήστε τον πίνακα και σκεφτείτε **τη γενική μορφή** των αριθμών Δ που:

- ανάβουν τη συσκευή **Ο**.....
- ανάβουν τη συσκευή **Α**.....
- ανάβουν τη συσκευή **Β**.....

Ερώτηση (Ε2.2)

Ανοίξτε το διακόπτη **«Βοήθεια».** Εμφανίζονται οι τιμές του Δ με τη μορφή:

$$\Delta = 3 \cdot \pi + \upsilon$$

Συμπληρώστε στον επόμενο πίνακα τα ζεύγη αριθμών (Δ,π) και (π,Δ) , όπως στο παράδειγμα που δίνεται:

Δ	(Δ,π)	(π,Δ)
3	(3,1)	(1,3)
4		
5		
6		
7		
8		
9		

Πίνακας 1

Ερώτηση (Ε2.3)

Από τον πίνακα 1, μπορείτε να καταλάβετε σε ποια περίπτωση έχουμε σχέση συνάρτησης και σε ποια όχι; (κυκλώστε παρακάτω την απάντησή σας):

- Η σχέση των ζευγών **(Δ,π)** είναι / δεν είναι σχέση συνάρτησης.
- Η σχέση των ζευγών **(π,Δ)** είναι / δεν είναι σχέση συνάρτησης.

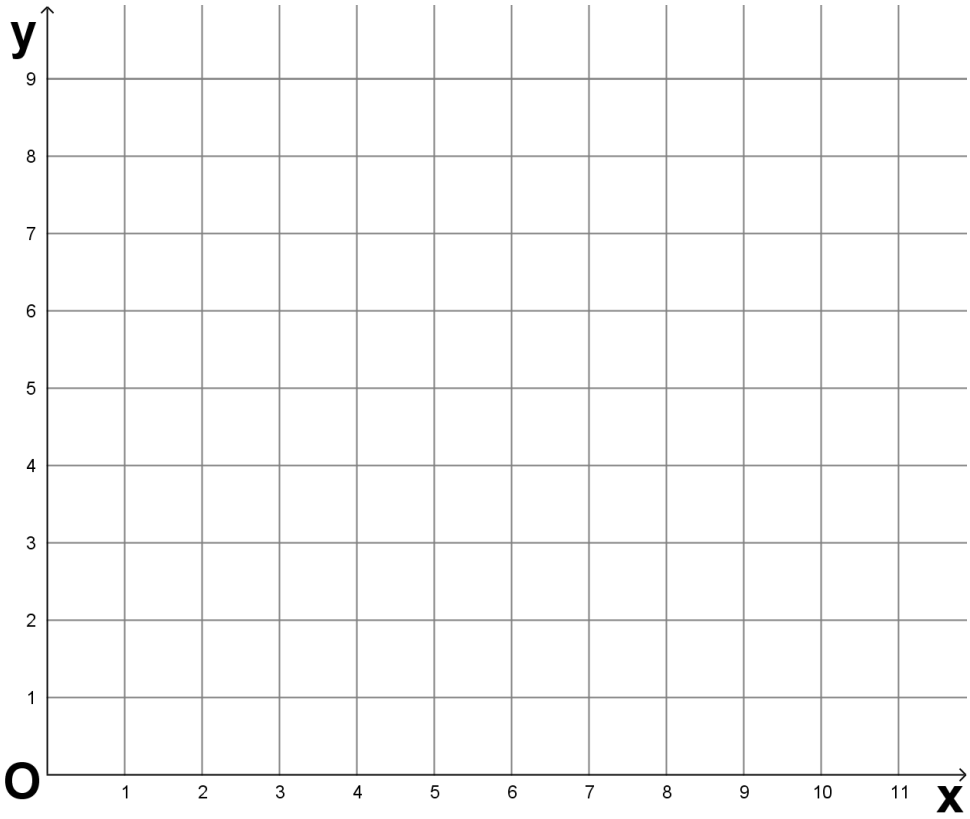
3ο Πείραμα: Γραφική αναπαράσταση

Δραστηριότητα (Δ3.1)

Στο παρακάτω σύστημα αξόνων, να παραστήσετε με σημεία:

i) τα ζεύγη αριθμών της στήλης (Δ,π) του πίνακα 1 με **μπλε** μελάνι

ii) τα ζεύγη αριθμών της στήλης (π,Δ) του πίνακα 1 με **κόκκινο** μελάνι.



Γραφική αναπαράσταση των σημείων με συντεταγμένες (Δ,π) και (π,Δ)

Επαλήθευση: Στο αρχείο peirama2_1.ggb πατήστε τα κουτάκια (Δ,π) και (π,Δ) στο δεξί παράθυρο του Geogebra και στη συνέχεια το κουμπί **"[Άναψε]"** , ώστε να επαληθεύσετε τα σημεία σας, με εκείνα που φαίνονται στο λογισμικό**.**

Ερώτηση (Ε3.1)

Αν δε γνωρίζαμε από τον Πίνακα 1, τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στα ζεύγη (Δ,π) και (π,Δ), πώς θα καταλαβαίναμε από το γράφημα και το πλέγμα που φαίνεται στο Geogebra, σε ποια από τα δύο είδη ζευγών (Δ,π) ή (π,Δ) έχουμε συνάρτηση;

Δραστηριότητα (Δ3.2)

Επαναφέρετε την τιμή Δ=1.

Στο κουτί εισαγωγής “ΒΗΜΑ”, αλλάξτε το βήμα σε 0.1 και πατήστε το κουμπί “[Άναψε]”.

Ποιες αλλαγές παρατηρείτε τώρα στα διαγράμματα των ζευγών (Δ,π) και (π,Δ) σε σχέση με το αρχικό διάγραμμα που κατασκευάσετε;

Μπορείτε να δώσετε κάποια ερμηνεία για αυτές τις αλλαγές;

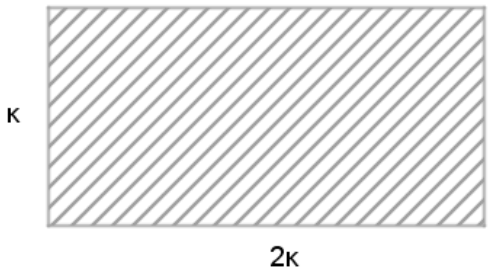
Γράψτε εδώ τις ιδέες σας…

Σύνοψη με μορφή ερωτημάτων

1 Σημειώστε με ☑ στις παρακάτω περιπτώσεις, **πότε έχουμε σχέση συνάρτησης** από τα στοιχεία του συνόλου Χ προς τα στοιχεία του συνόλου Ψ που αναφέρονται:

	Σύνολο Χ	**Σύνολο Ψ**
☐	Δρομείς που τερμάτισαν στον Μαραθώνιο του 2025.	Χρόνοι τερματισμού.
☐	Βάρος σε κιλά των μαθητών της Β΄ Γυμνασίου.	Ονόματα των μαθητών.
☐	Κωδικοί προϊόντων σε ένα super market.	Τιμές προϊόντων.
☐	Καλάθια που πετυχαίνουν οι παίχτες σε έναν αγώνα μπάσκετ.	Τα ύψη αυτών των παιχτών.

2 Στο ορθογώνιο του διπλανού σχήματος, οι πλευρές έχουν μήκη κ και 2κ.



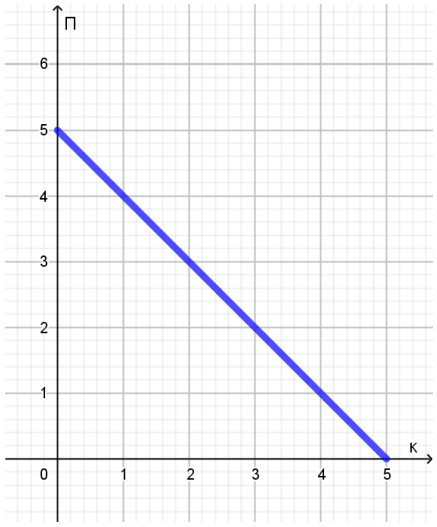
Α. Γράψτε τον τύπο που περιγράφει τη σχέση ανάμεσα στην περίμετρο Π και τις τιμές του κ.

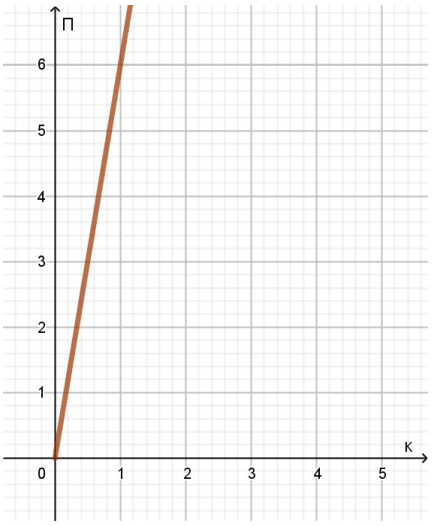
Π = ……

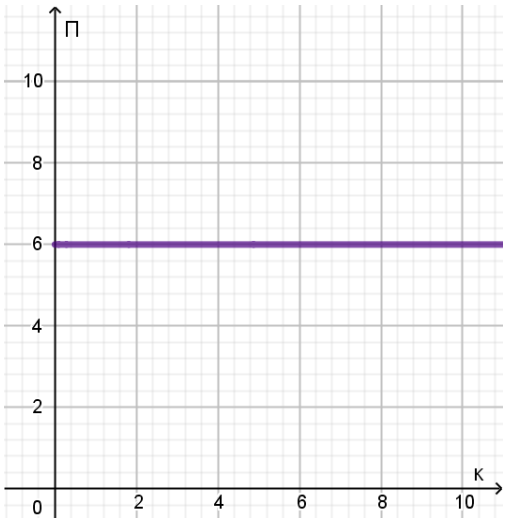
Β. Υπάρχει σχέση συνάρτησης **ανάμεσα στις τιμές του κ και στην περίμετρο Π** του ορθογωνίου;

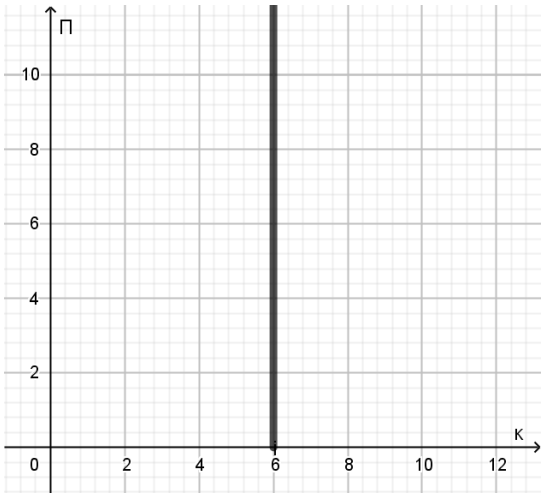
☐ ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ

Γ. Στα παρακάτω διαγράμματα, στον οριζόντιο άξονα μετράμε το **κ** και στον κατακόρυφο άξονα την περίμετρο **Π**. Ποιο από τα παρακάτω 4 διαγράμματα πιστεύετε ότι εκφράζει τη σχέση του ερωτήματος Β΄;

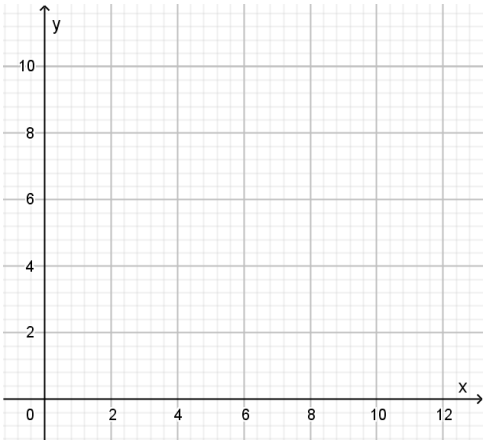


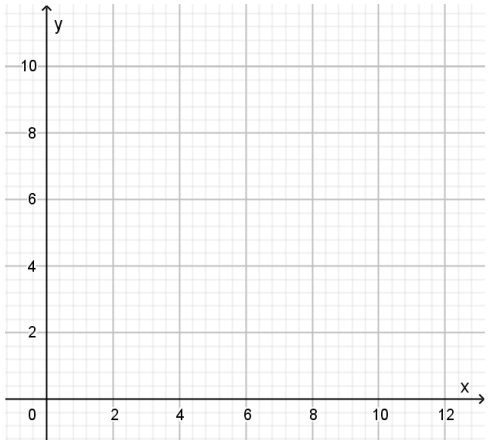






3 Σχεδιάστε στα συστήματα αξόνων παρακάτω, ένα **κεφαλαίο γράμμα** του ελληνικού αλφάβητου, το οποίο θα μπορούσε να παριστάνει κάποια σχέση συνάρτησης και ένα δεύτερο, το οποίο δεν θα μπορούσε να παριστάνει σχέση συνάρτησης.





Περιγραφή διδακτικών στόχων

1ο Πείραμα

Στο συγκεκριμένο στάδιο, στόχος είναι η εισαγωγή μέσω του πειράματος, της έννοιας της αντιστοιχίας των στοιχείων ενός συνόλου σε ένα άλλο. Επιπλέον, μέσω του παραδείγματος χρησιμοποιούνται (σκόπιμα) στοιχεία ετερόκλητων συνόλων (αριθμοί σε γράμματα).

Η ακολουθούμενη πορεία, στοχεύει στη διαφοροποίηση των τυχαίων αντιστοιχιών από εκείνες που ορίζουν σχέση συνάρτησης. (**Ερώτηση Ε1.2**)

Επίσης, στην **Ερώτηση Ε1.2**, στοχεύουμε να προκαλέσουμε τη σκέψη των μαθητών σχετικά με τις έννοιες της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής, μέσω του τρόπου εξέλιξης του πειράματος. Επιχειρείται να δοθεί ο απαραίτητος βαθμός ελευθερίας στον ορισμό αυτών των δύο μεταβλητών, με βάση τον τρόπο που εμείς ορίζουμε την εξέλιξη του πειράματος.

Τέλος, στη **Δραστηριότητα Δ1.2**, θέλουμε να διερευνήσουμε τον τρόπο που οι μαθητές εσωτερικεύουν την έννοια της συνάρτησης, μέσω της αντιστοιχίας των στοιχείων δύο συνόλων. Για το λόγο αυτό, δίνουμε επιλογές φράσεων, οι οποίες μπορούν να περιγράψουν καλύτερα για αυτούς την έννοια της αντιστοιχίας με μαθηματικό τρόπο .

2ο Πείραμα

Σε αυτό το στάδιο επιχειρούμε να οδηγήσουμε τους μαθητές στην εύρεση κάποιων γενικών τύπων, σχετικά με τη μορφή των αριθμών που ανάβουν συγκεκριμένες συσκευές. Με άλλα λόγια, στοχεύουμε να νοηματοδοτήσουν την εύρεση του τύπου ως μιας διαδικασίας, η οποία όχι μόνο δίνει τη δυνατότητα πρόβλεψης αποτελεσμάτων, αλλά (ταυτόχρονα) μοντελοποιεί και τη διαδικασία αντιστοίχισης. Προς την κατεύθυνση αυτή, ενσωματώνουμε τη χρήση του πίνακα τιμών ως εργαλείου, που μέσω της ανάγνωσης των στοιχείων του, μπορεί να οδηγήσει στην εύρεση του γενικού τύπου σε κάθε περίπτωση.

3ο Πείραμα

Στο τελικό αυτό στάδιο, θέλουμε οι μαθητές να αποκτήσουν μια πρώτη αναπαράσταση σε σύστημα συντεταγμένων xOy, κατασκευάζοντας οι ίδιοι τα διαγράμματα των ζευγών (Δ,π) και (π,Δ).

Είναι φανερό ότι αυτή αποτελείται από μεμονωμένα σημεία (εφόσον μέχρι αυτού του σημείου στο πείραμα επί της ουσίας περιγράφουμε τύπους ακολουθίας). Ουσιαστικά πρόκειται για μια πρώϊμη αναπαράσταση της γραφικής παράστασης, δεδομένου ότι σε αυτό το στάδιο τα διαγράμματα αποτελούνται από μεμονωμένα σημεία. Η συγκεκριμένη επιλογή στοχεύει στο να

υπάρξει ομαλή μετάβαση από αυτό τον τύπο διαγραμμάτων σε εκείνα των συνεχών συναρτήσεων (για το σκοπό αυτό υπάρχει και η δραστηριότητα **Δ3.2**).

Στ ο ερώτημα **Ε3.1**, θέλουμε να εξετάσουμε τον τρόπο που νοηματοδοτούν τα διαγράμματα των σημείων (Δ,π) και (π,Δ) ως προς τον κανόνα (τυπικό ορισμό) της συνάρτησης που έδωσαν στη Δραστηριότητα Δ2. Για αυτό το λόγο τίθεται το ερώτημα *«Αν δε γνωρίζαμε τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στους αριθμούς Δ και π, πώς θα καταλαβαίναμε σε ποια από τα δύο είδη ζευγών (Δ,π) ή (π,Δ) έχουμε συνάρτηση;»*

Στο τελικό στάδιο (Δραστηριότητα **Δ3.2**) θέλουμε να δημιουργήσουμε εννοιολογική σύνδεση των γραφημάτων όπως αυτό που σχεδίασαν με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών, με τα αντίστοιχα διαγράμματα (των ίδιων τύπων) όταν η συνάρτηση επεκταθεί στο σύνολο των ρητών (για το πείραμα) ή των πραγματικών αριθμών.

Δυνατότητες επέκτασης

Το πείραμα μπορεί να επεκταθεί σε έτερο χρόνο, στη μελέτη της περίπτωσης Δ=3π (δίνοντας ΒΗΜΑ=3 στο αντίστοιχο κουτί εισαγωγής του δομήματος) και στη χάραξη των αντίστοιχων διαγραμμάτων όταν το Δ παίρνει και τιμές από το $\mathbb{R}$ (διακόπτης dec).

Τέλος, μπορεί να ενταχθούν και αρνητικές τιμές στο Δ (αλλαγή των χαρακτηριστικών του δρομέα με τιμές για παράδειγμα, από -1000 έως 1000).

Ευχαριστίες

Στον αγαπητό συνάδελφο **Γ. Κουσινιώρη** (Διευθυντή Γυμνασίου Γαστούνης) που τα ψηφιακά του δομήματα για τη διδασκαλία του δεκαδικού και του δυαδικού συστήματος αρίθμησης, μού έδωσαν την εναρκτήρια ιδέα για το παρόν.

Στον πιστό φίλο και συνάδελφο **Ι. Χριστοδούλου**, για τη συνεργασία και τη δυνατότητα που μού έδωσε, να εκτελέσω την 1^{η} πειραματική διδασκαλία της παρούσης εργασίας στο σχολείο του (Γυμνάσιο «Αντ. Σαμαράκης – 3^{ο} Γυμνάσιο Αγ. Βαρβάρας).

Μ. Τσιλπιρίδης
Νοέμβριος 2017

Θερμές ευχαριστίες στη συνάδελφο **Ντορίνα Τσαντούλα** που με την ενεργό συμμετοχή της πραγματοποιήσαμε τη 2^{η} πειραματική διδασκαλία σε μαθητές του τμήματός της από το Β΄ Αρσάκειο – Τοσίτσειο Γυμνάσιο Εκάλης. Επίσης, θερμές ευχαριστίες στον συνάδελφο **Δήμο Τριανταφύλλου** – Συντονιστή Μαθηματικών των Σχολείων της Φ.Ε για την ενεργό συμμετοχή του και τις εύστοχες επισημάνσεις του στην παρούσα εργασία. Τέλος ευχαριστίες στους Διευθυντές του Α΄ Αρσακείου Τοσιτσείου Λυκείου Εκάλης **κ. Χ. Δευτεραίου** και του Β΄ Αρσακείου Τοσιτσείου Γυμνασίου **κ. Δ. Καλογιάννη** για την υποστήριξή τους στην οργάνωση και διεξαγωγή τής διδασκαλίας.

Μ.Τσιλπιρίδης
Μάρτιος 2026