

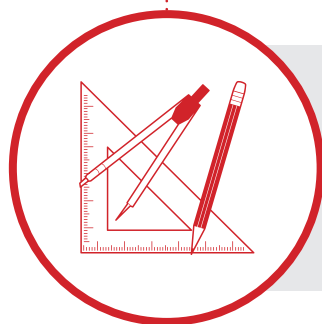


Matemática Multimídia

GEOMETRIA
E MEDIDAS



O EXPERIMENTO



Experimento

Polígonos regulares e ladrilhos

Objetivos da unidade

1. Manipular polígonos regulares a fim de recobrir o plano;
2. Encontrar qual o requisito para que uma certa combinação de polígonos cubra o plano.



UNICAMP

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons



FUNDO NACIONAL
DE DESENVOLVIMENTO
DA EDUCAÇÃO

Secretaria de
Educação a Distância

Ministério da
Ciência e Tecnologia

Ministério
da Educação



Polígonos regulares e ladrilhos

O EXPERIMENTO

Sinopse

Este experimento busca apresentar aos alunos o problema do ladrilhamento no plano, fazendo com que tentem montar os seus próprios preenchimentos, utilizando, particularmente, alguns polígonos regulares.

Conteúdos

Geometria Plana: Simetrias.

Objetivos da unidade

1. Manipular polígonos regulares a fim de recobrir o plano;
2. Encontrar qual o requisito para que uma certa combinação de polígonos cubra o plano.

Duração

Uma aula dupla.

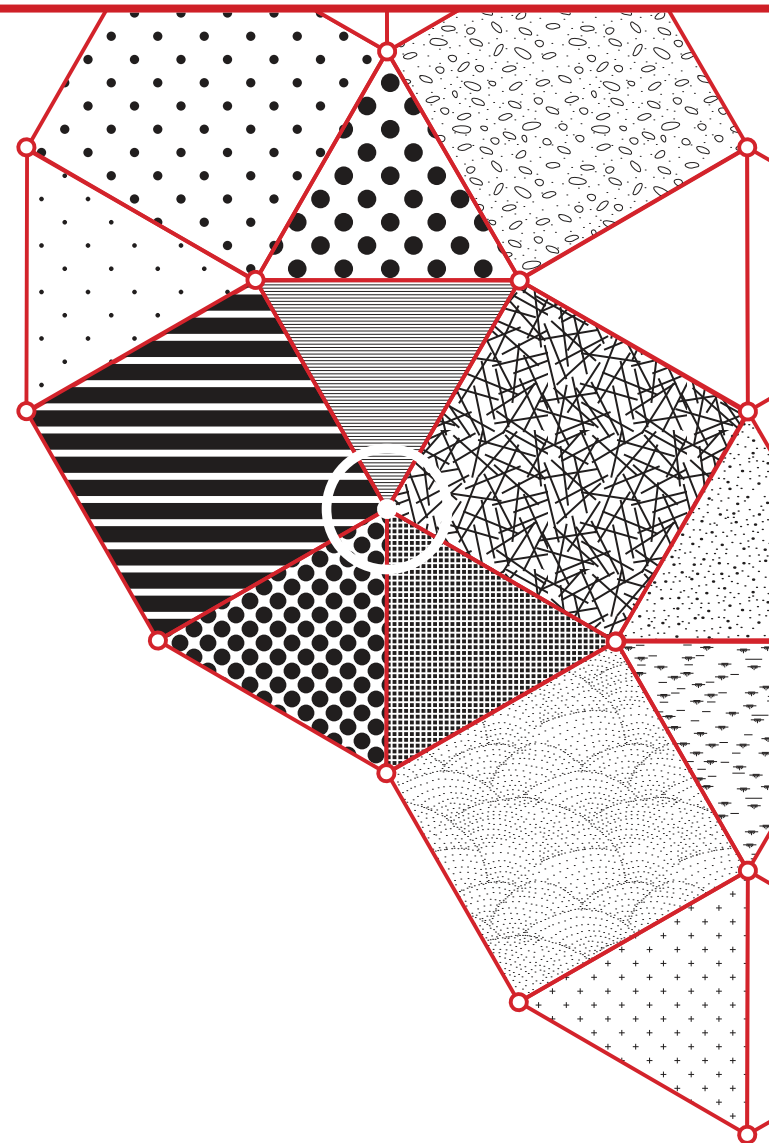


Introdução

Ladrilhar (ou recobrir) um plano é o mesmo que preenchê-lo com figuras sem que fique espaço algum entre elas. Neste experimento faremos vários tipos de ladrilhamento no plano utilizando os polígonos regulares que estão em anexo nesse material.

Os primeiros trabalhos matemáticos envolvendo o recobrimento do plano datam do século XVII e buscavam simetrias que possuíam algum apelo estético. Mas, desde séculos anterior, existiam registros de recobrimento no plano, como, por exemplo, o palácio de Alhambra. Durante o passar dos séculos vários artistas utilizaram essa técnica para desenvolver seus trabalhos.

Ainda no século XX a teoria de ladrilhamento no plano foi ampliada de modo a trabalhar com o ladrilhamento no espaço em várias dimensões, e isso nos trouxe grandes aplicações na área da Matemática Aplicada como, por exemplo, o desenvolvimento de códigos de criptografia e o estudo de como as moléculas se organizam no espaço.



O Experimento

Material necessário

- Papel cartão (*Cartolina ou folha sulfite podem substituir o papel cartão*);
- Tesoura;
- Lápis de cor (*Item opcional*).

Comentários iniciais

Antes de começar a trabalhar com o ladrilhamento no plano de fato, vamos relembrar uma fórmula que nos auxiliará no andamento desse experimento, a qual calcula o ângulo interno de um polígono regular com um número conhecido de lados.

Determinação dos ângulos internos de um polígono regular

Dado um polígono regular de n lados, podemos dividi-lo em n triângulos conforme a figura 1. Como a soma dos ângulos internos de cada um dos triângulo é 180° , ao multiplicar o número de triângulos por 180° , teremos a soma dos ângulos internos de todos eles juntos ($180^\circ \cdot n$).

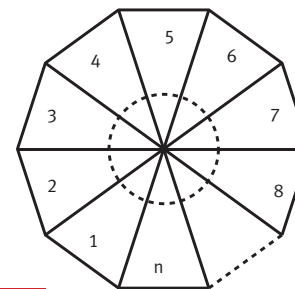


FIG. 1

E, conforme mostra a FIGURA 1, se subtrairmos a circunferência que está indicada no centro do polígono, teremos a soma dos ângulos internos deste ($180^\circ \cdot n - 360^\circ$).

Como o polígono é regular (seus ângulos internos têm a mesma medida), ao dividir a soma dos seus ângulos internos pelo número de ângulos, teremos quanto mede cada um deles. Logo, a expressão que nos fornece o ângulo interno de um polígono regular de n lados é:

$$a_n = \frac{180 \cdot n - 360}{n}$$

Portanto, os ângulos internos de cada uma das figuras em anexo são:

- Triângulo: 60°
- Quadrado: 90°
- Pentágono: 108°
- Hexágono: 120°
- Octógono: 135°



Preparação

Sugerimos a divisão da turma em grupos de 3 alunos para agilizar o recorte das figuras e para que, por outro lado, não seja um grupo grande a ponto de tornar a atividade monótona.

Peça para cada grupo recortar cerca de 18 triângulos, 15 quadrados, 4 pentágonos, 3 hexágonos e 2 octógonos utilizando os modelos da folha em anexo que deverá ser entregue a eles.

Se julgar interessante, peça para os alunos pintarem livremente os polígonos para que o ladrilhamento forme algumas imagens com um apelo visual maior. Isso poderá tornar a atividade mais atraente para eles.

! A quantidade de figuras recortadas pode variar de grupo para grupo, de acordo com o padrão de recobrimento escolhido por cada um.

As primeiras questões

ETAPA

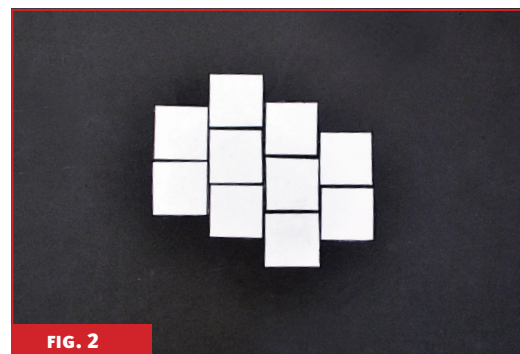
1

Recortadas as figuras, peça para os grupos começarem a responder às questões da FOLHA DO ALUNO. Nessa etapa daremos ênfase às questões 1 e 2 desta folha, discutindo as suas possíveis soluções.

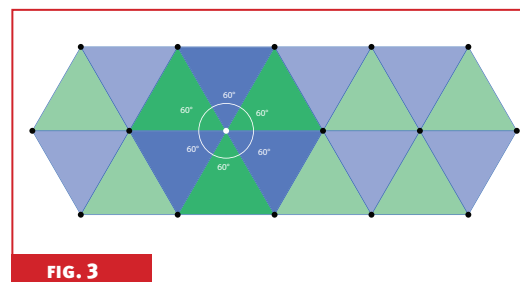
***** Os alunos podem colar os seus ladrilhos numa folha para guardá-los.

Questão para os alunos

1. Você consegue criar algum ladrilho usando apenas um tipo dos polígonos congruentes entre si, como na FIGURA 2? Com quais deles isso é possível?



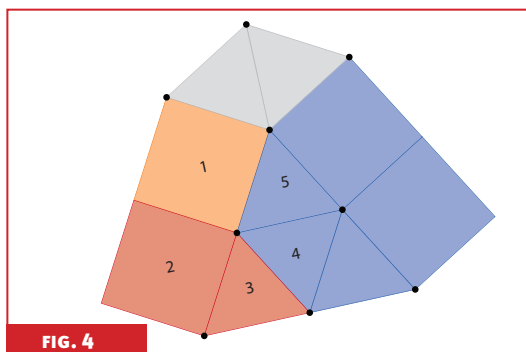
Se tentarmos cobrir o plano apenas com um tipo dos polígonos em anexo, perceberemos que isso só é possível ao utilizarmos o triângulo, o quadrado ou o hexágono. Isso acontece porque, como pode ser visto na FIGURA 3, a soma do ângulo interno de cada figura que se toca deve ser 360° para que eles recubram o plano sem deixar espaços.



Não podemos, por exemplo, ladrilhar o plano apenas com pentágonos, pois cada um de seus ângulos internos tem 108° e não conseguimos chegar nos 360° fazendo somas inteiras desse ângulo.

Questão para os alunos

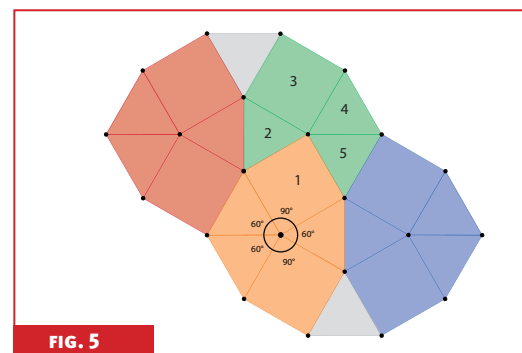
2. Tente ladrilhar o plano com dois tipos de polígonos associados como na FIGURA 4. Quais você utilizou? Se você conseguir encontrar outra combinação possível, anote quais polígonos foram utilizados.



Aqui o problema é basicamente o mesmo que o da questão anterior: basta que a soma dos ângulos de cada figura que se encosta seja 360° .

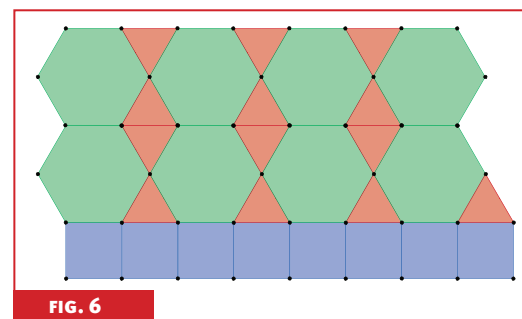
Das soluções possíveis, apresentamos duas:

2 quadrados e 3 triângulos (FIGURA 5), ou 1 hexágono e 4 triângulos.



Definição: ladrilhos conexos e desconexos.

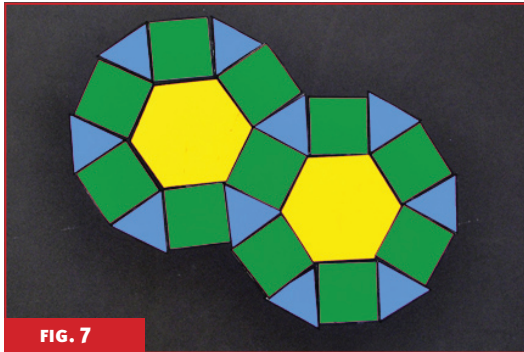
A partir daqui temos que tomar um certo cuidado: os alunos podem formar ladrilhos em que um tipo de polígono não faça fronteira com todos os outros tipos (FIGURA 6). Nesse experimento, chamaremos esses ladrilhos de desconexos. Esse caso especial provavelmente surgirá como resposta a algumas das questões.



Já os ladrilhos nos quais todos os tipos de polígonos fazem fronteira com todos os outros tipos chamaremos de ladrilhos conexos, sendo que esses são os que nos interessam nesse experimento.

Questão para os alunos

3. É possível ladrilhar o plano utilizando 3 polígonos (FIGURA 7)? Se sim, com quais?



O requisito para recobrir o plano com três tipos de polígonos é o mesmo: a soma das figuras que fazem fronteira devem ser 360° .

Uma das soluções possíveis é a que utiliza quadrados, triângulos hexâgonos.

Incentive seus alunos a procurarem por ladrilhamentos diferentes.

Nessa etapa, devem começar a surgir ladrilhos desconexos. Deixe que seus alunos criem livremente e guarde a discussão sobre esse detalhe para o FECHAMENTO.

As últimas questões

ETAPA
2

Nesta etapa trataremos das QUESTÕES 4 e 5 da FOLHA DO ALUNO, as quais têm um teor um pouco mais teórico que as da etapa anterior.

Questão para os alunos

4. Tente ladrilhar o plano utilizando quatro tipos de polígono dessa vez. É possível? Se sim, qual o ladrilho que você montou?

Note que não é possível formar 360° com 4 polígonos diferentes do nosso anexo (a menor soma é $60^\circ + 90^\circ + 108^\circ + 120^\circ = 378^\circ$), portanto, não é possível construir um ladrilho conexo que responda à pergunta.

Questão para os alunos

5. Você consegue formular uma regra geral para saber quando uma certa combinação de polígonos regulares recobre o plano?

O objetivo dessa pergunta é fazer o aluno pensar mais profundamente naquilo que ele fez nas questões anteriores.

Como já comentado durante as resoluções das outras questões, para ser possível construir um ladrilho é necessário que a soma dos ângulos internos de cada polígono que se toca seja 360° .



Fechamento

Promova uma discussão com a classe sobre as respostas que cada grupo obteve para as questões da FOLHA DO ALUNO. O intuito da discussão é amarrar uma conclusão sobre a soma dos ângulos internos e valorizar a criatividade de cada grupo na construção de seus ladrilhos.

As QUESTÕES 1 e 2 devem ser respondidas sem muita dificuldade e com poucas surpresas, uma vez que não são tantas as variações possíveis.

A QUESTÃO 3, por outro lado, permite respostas muito variadas, inclusive envolvendo ladrilhos desconexos. Apresente essa distinção entre conexos e desconexos aos seus alunos e discuta-a com eles. Uma maneira de tornar isso mais acessível é mostrar como as partes desconexas de um ladrilho poderiam, sozinhas, ladrilhar todo o plano (vide FIGURA 6).

Na QUESTÃO 4, os ladrilhos desconexos com certeza virão à tona, afinal, é impossível resolvê-la com ladrilhos conexos, como explicado na ETAPA 2.

Na QUESTÃO 5, utilize as respostas e justificativas dos alunos e compare-as, induzindo a turma a discutir o motivo de cada resposta e de qual foi o raciocínio utilizado para encontrar cada uma. Esse seria um bom momento para discutir as fórmulas apresentadas nos COMENTÁRIOS INICIAIS sobre os ângulos internos de um polígono.

★ *A resposta da QUESTÃO 1 está relacionada ao problema clássico do formato hexagonal das colmeias construídas por abelhas. Se desejar, explore essa questão mais a fundo com seus alunos. Consulte o GUIA DO PROFESSOR para saber mais.*

Ficha técnica

AUTORES

Leonardo Barrichelo e
Kauan Pastini Paula Leite

COORDENAÇÃO DE REDAÇÃO

Fabício de Paula Silva

REDAÇÃO

Kauan Pastini Paula Leite

REVISORES

Matemática

Antônio Carlos do Patrocínio

Língua Portuguesa

Carolina Bonturi

Pedagogia

Ângela Soligo

PROJETO GRÁFICO

Preface Design

ILUSTRADOR

Lucas Ogasawara de Oliveira

FOTÓGRAFO

Augusto Fidalgo Yamamoto



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Reitor

José Tadeu Jorge

Vice-Reitor

Fernando Ferreira da Costa

GRUPO GESTOR DE PROJETOS EDUCACIONAIS (GGPE – UNICAMP)

Coordenador

Fernando Arantes

Gerente Executiva

Miriam C. C. de Oliveira

MATEMÁTICA MULTIMÍDIA

Coordenador Geral

Samuel Rocha de Oliveira

Coordenador de Experimentos

Leonardo Barichello

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA (IMECC – UNICAMP)

Diretor

Jayme Vaz Jr.

Vice-Diretor

Edmundo Capelas de Oliveira

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons 