Vom Vollpfosten zur Geometrie

Hans-Jürgen Elschenbroich – Rudolf Hrach

Aus einem elementaren Alltagsbeispiel entsteht ein geometrisches Problem, das handlungsorientiert mit Säge und Styroporschneider und mathematisch mit der Mathematik-Software GeoGebra, der CAD Software BLENDER und einem 3D-Drucker bearbeitet wird. Dabei steht die klassische (und lange vernachlässigte) Raumgeometrie im Vordergrund. Geometrie, Problemlösen, analoge und digitale Werkzeuge bis zum 3D-Druck kommen hier ideal zusammen und bieten sich auch für ein fachübergreifendes Projekt an, in dem auch direkt eigene Unterrichtsmaterialien erstellt werden können.

1 *Kantholz und Kappsäge*

Ausgangspunkt war das Problem, ein gewöhnliches Kantholz mit quadratischem Querschnitt aus dem Baumarkt zu einem Zaunpfahl mit einer pyramidenförmigen Spitze anzuspitzen. Diese Spitze soll den Zaunpfahl bei Regen vor Verwitterung schützen. Dabei kam eine sogenannte Kappsäge zum Einsatz. Nach erfolgreicher Arbeit hatte das Kantholz eine pyramiden-

MNU-Journal – Ausgabe 02.2022 – ISSN 0025-5866 – © Verlag Klaus Seeberger, Neuss

förmige Spitze, und die abgeschnittenen Stücke lagen auf dem Boden (Abb. 1).

Es lohnt sich, das Abschneiden auch tatsächlich im Unterricht per Hand ausführen zu lassen. Da man meist keine Kappsäge zur Verfügung hat, die ja auch eine Verletzungsgefahr mit sich bringt, kann man mit einem einfachen Styroporschneider arbeiten (Abb. 2). Manchmal findet man so etwas in Physik- oder Informatik-Sammlungen oder in Bauanleitungen im Internet.

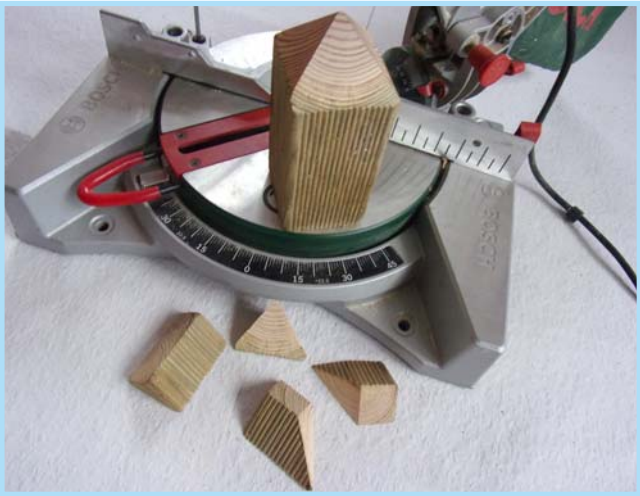


Abb. 1. Vom Kantholz zum Zaunpfahl mit der Kappsäge

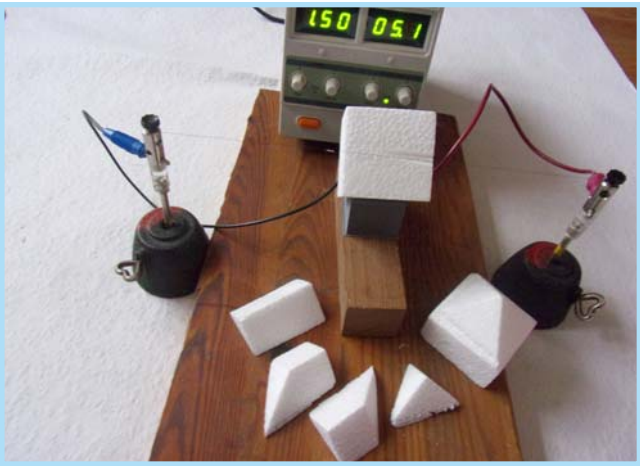


Abb. 2. Einsatz des Styroporschneiders

Es drängte sich dann die Frage auf, wie man die abgeschnittenen Stücke wieder zusammensetzen könnte. Überraschenderweise war dies gar nicht so einfach wie gedacht, wenn man sich die Reihenfolge nicht gemerkt hatte.

2 Mathematische Modellierung

Im Folgenden wird vorwiegend virtuell mit 3D-Modellierungen in GeoGebra und mit 3D-Druckerzeugnissen gearbeitet. Wie man beim realen Zusammenbauen der gedruckten Körper erreichen kann, dass die Restkörper ‚halten' und nicht abrutschen, wird in Abschnitt 5 ausgeführt.

Dreht man den Pfahl beim Abschneiden jeweils um 90° gegen den Uhrzeigersinn, also um −90°, so erhält man vier Schnittreste, von denen zwei kongruent sind, also drei verschiedengestaltige Restkörper. Der Prozess des Abschneidens wird hier symbolisch dargestellt. Zur besseren Unterscheidung sind diese Körper hier – anders als im Realmodell – unterschiedlich gefärbt (Abb. 3). Die beiden kongruenten Teilkörper sind zur besseren Unterscheidbarkeit nicht vollkommen gleich gefärbt, sondern heller und dunkler orange.

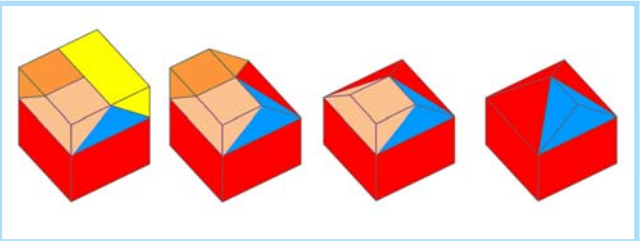


Abb. 3. Abschnitte bei Drehungen: −90°, −90°, −90° mit drei verschiedengestaltigen Restkörpern

Wenn man stattdessen die zweite Drehung um 180° durchführt und dann die dritte um 90° ‚zurück', erhält man vier unterschiedliche Schnittreste (Abb. 4).

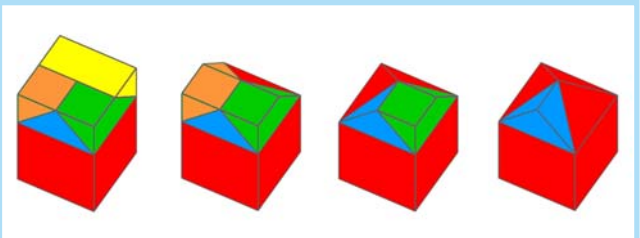


Abb. 4. Abschnitte bei Drehungen: −90°, ±180°, 90° mit vier verschiedengestaltigen Restkörpern

Jetzt kann man ein wenig Kopfgeometrie betreiben. Lassen sich noch weitere Schneidevarianten finden? Dabei kommt man mehr oder weniger schnell auf die Idee mit den Drehungen 180°, 90°, 180°. Hierbei erhält man nur zwei nicht-kongruente Restkörper (Abb. 5). Die zwei kongruenten gelben Prismen sind zur besseren Unterscheidbarkeit etwas unterschiedlich gefärbt.

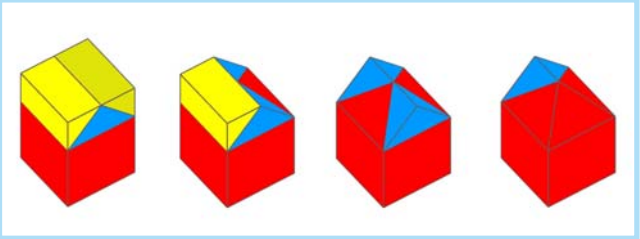


Abb. 5. Abschnitte bei Drehungen: ±180°, ±90°, ±180° mit zwei verschiedengestaltigen Restkörpern

Schaut man jetzt ein wenig zurück, so bemerkt man, dass es Lösungen gibt mit vier, mit drei oder mit zwei verschiedengestaltigen Restkörpern. Da stellt sich natürlich die naheliegende Frage, ob es auch eine Lösung gibt, bei der viermal der gleiche

Restkörper auftritt? Mit etwas Kopfgeometrie ist dieser Fall schnell gefunden (Abb. 6).

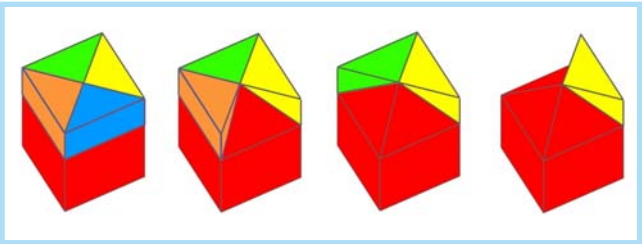


Abb. 6. Vier kongruente Restkörper

Es ist aber offensichtlich, dass dieser Fall nicht mit der Kappsäge durch Abschneiden aus nur einem Kantholz produziert werden kann. Jedoch lassen sich die Teile problemlos mit einem 3D-Drucker erzeugen. Hier geht man also nicht abschneidend vom Kantholz aus, sondern man produziert aufbauend den Pfahl mit der Pyramide und den vier Restkörpern.

3 Klassische Raumgeometrie

Beim tatsächlichen Sägen mit der Kappsäge muss man einen Winkel einstellen, der maximal 45° groß werden kann (Abb. 1). Damit stellt sich die Frage: Welche Pyramidenhöhe erhält man für welchen Winkel? Oder umgekehrt: Welchen Winkel muss man einstellen, um eine bestimmte Höhe zu erhalten? Damit ist man im Bereich der Trigonometrie.
Weiter stellen sich Fragen zur Volumenberechnung, also zur klassischen Raumgeometrie: Welches Volumen hat der ursprüngliche Quader, welches Volumen hat der angespitzte Pfahl, welches Volumen haben die abgeschnittenen Restkörper? Arbeitsblätter zu diesen Fragen sind in den Kästen 1 und 3 dargestellt.

4 Konstruieren und STL-Export mit GeoGebra

In den GeoGebra Modellierungen kann man schrittweise die abgeschnittenen Körper ein- und ausblenden. Ob man diese Konstruktionen mit den Schüler/inne/n vom leeren Bildschirm aus erstellen will oder ob man mit den fertigen Konstruktionen arbeiten will, hängt von den GeoGebra Bedienkompetenzen der Schüler/innen und der verfügbaren Zeit ab. Vermutlich finden sich aber immer einzelne Schüler/innen, die das ‚selber hinkriegen' wollen.
Auf einen programmspezifischen Aspekt sei noch hingewiesen: In GeoGebra kann man derzeit nicht einfach zwei Körper (z. B. Quader und aufgesetzte Pyramide) zu einem Objekt verbinden. Man hat vielmehr zwei Körper, die man über geeignete Bedingungen gleichzeitig zeigen oder ausblenden und so ein gemeinsames Bild, die Illusion eines Körpers, erzeugen kann. Insofern muss man derzeit in GeoGebra auch zwei Volumina addieren, um das Volumen des Pfahls zu erhalten. Es bleibt zu hoffen, dass die Entwicklung von GeoGebra 3D weiter voran geht.
Aber auch bei einem zusammengefügten Körper kann man von GeoGebra STL-Dateien für den 3D Druck ausgeben lassen. Dies findet man seit kurzem in der Version 6 Classic unter *Datei/ Herunterladen als/ STL* (Abb. 7). Dabei ist es sinnvoll, die Koordinatenachsen auszublenden. Auch sollte man die Option *Gefüllter Körper* anklicken, wenn man die Eckpunkte und Kanten nicht besonders hervorheben will.

5 Konstruieren und STL-Export mit BLENDER

Da es sich in diesem Fall um relativ einfache Polyeder handelt, kann man für den 3D-Druck auch alle Körper mit entsprechenden CAD-Programmen (BLENDER, Tinkercad etc.) konstruieren und damit die STL-Dateien erzeugen. Dies bietet sich insbesondere

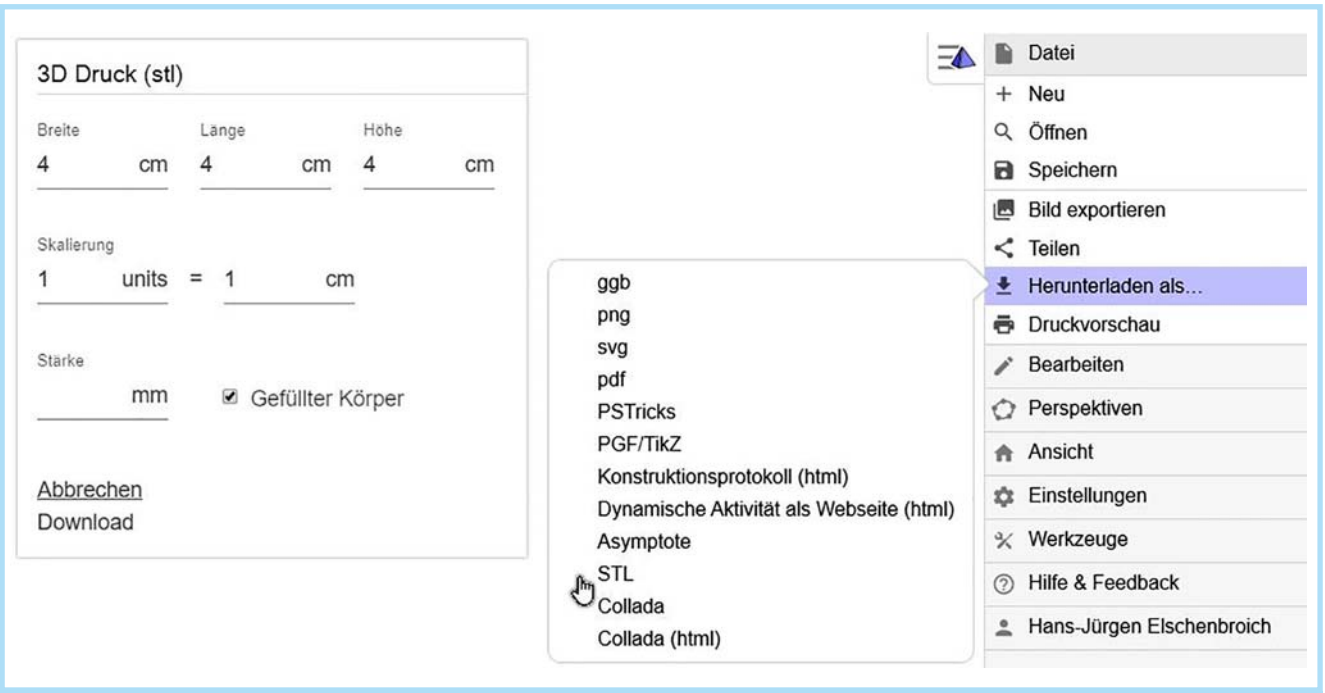


Abb. 7. Export einer STL Datei aus GeoGebra

Aufgabe 1
Sie haben die pyramidenförmige Spitze des Zaunpfahls und mehrere Restkörper, die Sie nicht jedes Mal alle brauchen (Bild 1).



Bild 1. Zaunspitze und Restkörper

a) Setzen Sie den Zaunpfahl und die vier Restkörper gemäß Bild 2 wieder zusammen.
Dazu haben Sie die Zaunpfahl-Spitze (Kantholz mit Pyramide) und verschiedene Restkörper.

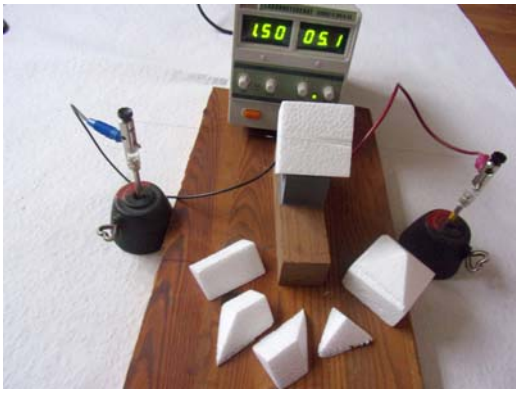


Bild 2. Zaunspitze und Restkörper

b) Setzen Sie die Zaunpfahl-Spitze und die vier Restkörper aus Bild 3 wieder zusammen.

Aufgabe 2
Finden Sie noch weitere Schnittmöglichkeiten mit der Säge/ mit dem Styroporschneider?

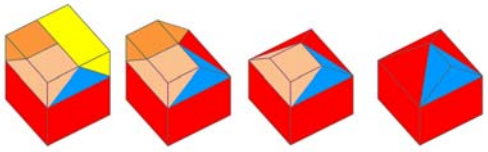


Bild 3. Zaunspitze und Restkörper

Aufgabe 3
Setzen Sie den Zaunpfahl und die vier Restkörper aus Bild 4 wieder zusammen.

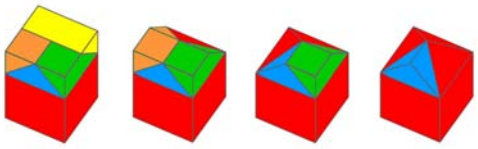


Bild 4. Zaunpfahl und Restkörper

Aufgabe 4
Das Kantholz hat die Grundseite a und die Höhe h, die Pyramide hat die Höhe h_1.
Welches Volumen hat das ursprüngliche Kantholz, welches der angespitzte Zaunpfahl?

Aufgabe 5
a) Welche Pyramidenhöhe h_1 erhält man bei einem Winkel von $\beta = 30°$, $\beta = 45°$ (Bild 5)?
b) Finden Sie eine Formel für h_1 abhängig von a und β.
c) Welchen Winkel erhält man für $a = 10$ cm und $h_1 = 5$ cm, für $a = 10$ cm und $h_1 = 4$ cm?
d) Finden Sie eine Formel für β abhängig von a und h_1.

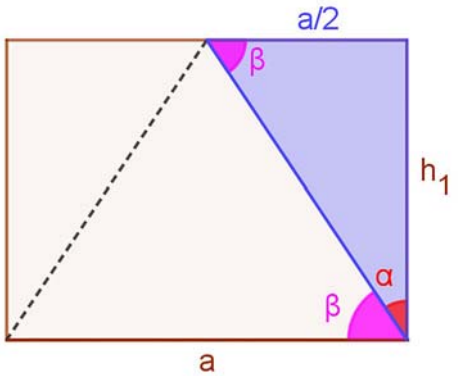


Bild 5. Zusammenhang zwischen Höhe und Winkel

Kasten 1. Arbeitsauftrag I

bei der Verbindung mit Technik und Informatik z. B. in Wahlkursen oder in fachübergreifenden Projekten an. Hier wird BLENDER eingesetzt. Für 3D-Einsteiger erscheint die Software am Anfang etwas komplex, aber in zahlreichen Online-Tutorials und YouTube Videos findet man Hilfestellung. Während GeoGebra vermutlich für die Mathematiklehrkraft die erste Wahl ist, werden Technik-Lehrer/innen und Hobby-3D-Drucker wohl eher BLENDER o. ä. einsetzen, auch weil es dort mächtige Befehle zum Vereinigen oder Separieren von Teilkörpern gibt.

```
solid pyramide
facet normal 0.00 0.00 -1.00
   outer loop
      vertex 2.00 2.00 0.00
      vertex -2.00 -2.00 0.00
      vertex -2.00 2.00 0.00
   endloop
endfacet
facet normal 0.00 0.00 -1.00
   outer loop
      vertex 2.00 2.00 0.00
      vertex 2.00 -2.00 0.00
      vertex -2.00 -2.00 0.00
   endloop
endfacet
facet normal 0.00 2.00 1.00
   outer loop
      vertex 2.00 2.00 0.00
      vertex -2.00 2.00 0.00
      vertex 0.00 0.00 4.00
   endloop
endfacet
facet normal -2.00 0.00 1.00
   outer loop
      vertex -2.00 2.00 0.00
      vertex -2.00 -2.00 0.00
      vertex 0.00 0.00 4.00
   endloop
endfacet
facet normal 0.00 -2.00 1.00
   outer loop
      vertex -2.00 -2.00 0.00
      vertex 2.00 -2.00 0.00
      vertex 0.00 0.00 4.00
   endloop
endfacet
facet normal 2.00 0.00 1.00
   outer loop
      vertex 2.00 -2.00 0.00
      vertex 2.00 2.00 0.00
      vertex 0.00 0.00 4.00
   endloop
endfacet
endsolid pyramide
```

Kasten 2. STL-Datei Pyramide

6 Manuelles Erzeugen von STL-Dateien

Statt mit den von CAD-Software oder GeoGebra erzeugten STL-Dateien zu arbeiten, kann man diese auch in einfacheren Fällen selber mit einem TXT-Editor erzeugen (kein Word o. ä.), wenn man das Aufbauprinzip verstanden hat und die Koordinaten der Eckpunkte kennt (Kasten 2). So lernt man, etwas ‚hinter die Kulissen' zu schauen. Grundobjekte sind stets Dreiecke, d. h. es wird jedes Viereck in zwei Dreiecke zerlegt, jedes Fünfeck in drei Dreiecke usw. Eine quadratische Pyramide hat somit sechs Dreiecke, vier durch die Seitenflächen und zwei durch das Grundquadrat.

Jedes Dreieck wird durch die Angabe der drei Eckpunkte gegen den Uhrzeigersinn beschrieben (ohne Klammern) und durch einen senkrechten Vektor (Normalenvektor), der nach außen gerichtet ist (Emmermann, Groth & Halverscheid, 2016). Der nach außen gerichtete Normalenvektor ist wesentlich, weil er sicherstellt, was ‚innen' ist und ob man insgesamt ‚innen' einen geschlossenen Körper bekommt. Werden die STL-Dateien manuell in der Sekundarstufe I erstellt, ist es sinnvoll, sich auf solche Körper zu beschränken, bei denen dieser Normalenvektor anschaulich klar ist und ohne Vektorprodukt-Berechnung angegeben werden kann.

Der STL-Code (Kasten 2) beginnt mit *solid*, *facet* steht für (Dreiecks-)Seitenfläche, *normal* ist der Normalenvektor der Seite. Zwischen *outer loop* und *end loop* werden mit *vertex* die Eckpunkte des Dreiecks angegeben. Mit *endfacet* wird die Definition des Dreiecks beendet, und die Definition des ganzen Körpers endet mit *endsolid*. Die STL-Dateien können noch vor dem eigentlichen Drucken mit 3D-Viewern betrachtet werden, meist überprüfen diese auch gleich, ob die Definition fehlerfrei ist. Als Beispiel wird hier die STL-Datei für eine vierseitige Pyramide mit Eckpunkten auf den Koordinatenachsen erstellt (Kasten 2) und in einem 3D-Viewer dargestellt (Abb. 8).

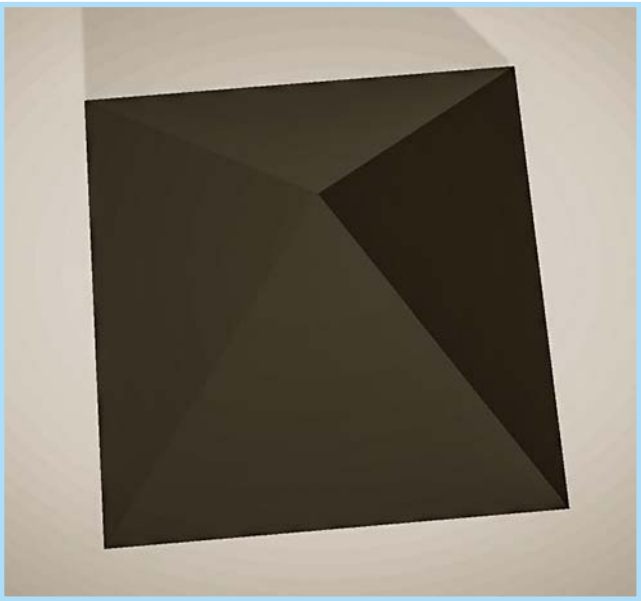


Abb. 8. Ansicht der Pyramide aus der STL-Datei im Kasten 2 im 3D-Viewer

Aufgabe 6
In einem Würfel mit der Kantenlänge 2 cm ist eine Pyramide ausgesägt. Dabei wird in der Reihenfolge vorne – rechts – hinten – links gesägt.

Benötigt werden hier die englischen Fachbegriffe:
Punkt = vertex bzw. Punkte = vertices,
Kante = edge, Seitenfläche = facet.

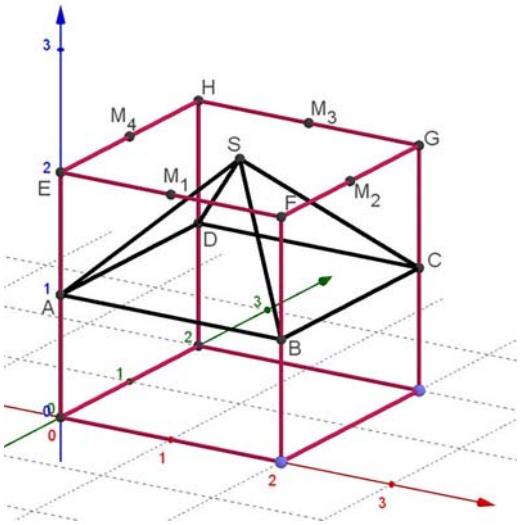


Bild 6. Würfel und Pyramide

a) Wie lauten die Koordinaten der vertices
A, *B*, … , M_1, … , M_4 (Bild 6)?
Zur Kontrolle: $A(0,0,1)$ und M_3 $(1,2,2)$.
b) Wie lauten die vertices der Schnitt-Abfälle in alphabetischer Reihenfolge?
Zur Kontrolle: Schnitt-Abfall-1 $ABFEM_4M_2$.

c) Wie lang sind edges *BC* und *BS* ?
Zur Kontrolle: $BS = \sqrt{3}$
d) Wie groß sind die Winkel zwischen den edges *AS* und *AE*, zwischen den durch ADM_4 und *ADS* bestimmten planes?
Zur Kontrolle: 45° *und* $54{,}73^\circ$.
e) Schnitt-Abfall-1 ist ein Prisma. Berechne sein Volumen.
Zur Kontrolle: $V = 1$.
f) Schnitt-Abfall-4 ist eine Pyramide. Wähle als Grundfläche das Dreieck ADM_4.
Wie groß ist das Volumen von Schnitt-Abfall-4?
Zur Kontrolle: $V = \frac{1}{3}$.

Wähle jetzt die Schnittfolge vorne – hinten – rechts – links.
g) Wie sehen die Schnitt-Abfälle aus?
Hinweis: Man erhält zweimal die Körper aus e) und f).
h) Mit Hilfe von e) und f) können Sie jetzt das Gesamtvolumen der Schnitt-Abfälle und damit das Volumen der Pyramide berechnen. Zeige: Die Pyramide ist halb so groß wie die Schnittabfälle!
Hinweis: Gesamtvolumen der Schnitt-Abfälle = $\frac{8}{3}$.

Kasten 3. Arbeitsauftrag II

7 3D-Druck

Die STL-Dateien sind dann Eingabeobjekte für die sogenannten Slicer, die das Ganze in Anweisungen für den jeweiligen 3D-Drucker verwandeln, das Objekt schichtweise zu drucken (Abb. 9).

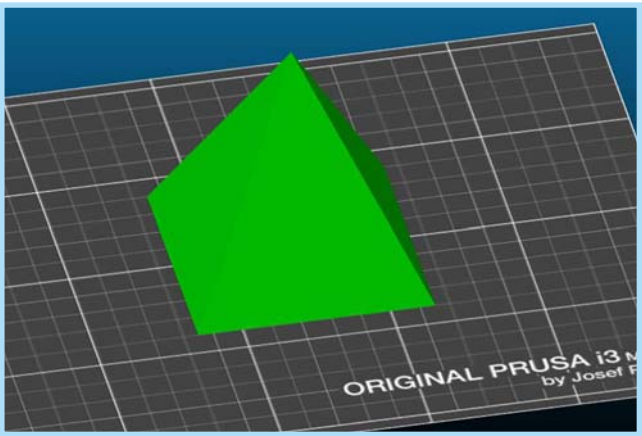


Abb. 9. Pyramide im Prusa Slicer

Die STL-Dateien für den 3D-Druck finden Sie unter der am Ende des Artikels angegebenen Adresse. Sie können damit die Teile mit eigenen 3D-Druckern produzieren oder diese im Internet in Auftrag geben. Hier sind aufwändig noch kleine Magnete eingebaut, damit die Abschnitte wieder an der Pyramide haften. (Abb. 10). Ansonsten könnte man zusätzlich noch kleine Laschen ankleben, damit die Teile nicht abrutschen. Wenn man nur einfarbig drucken kann, kann man die gedruckten Teile mit Acrylfarbe lackieren.

Wenn die Pyramide und die jeweiligen Schnitt-Abfälle wieder zu einem Gesamtkörper zusammengesetzt werden sollen, müssen sie einerseits irgendwie zusammen haften, aber auch wieder auseinandergenommen werden können. Es bieten sich mehrere, unterschiedliche aufwändige Möglichkeiten an:

- Die Pyramide wird mit Löchern, die Schnitt-Abfälle mit Nippeln versehen (Abb. 11).
- Die Pyramide und die Schnitt-Abfälle werden mit Magneten versehen (Abb. 12).
- An die Pyramide werden Klebeplättchen oder doppelseitiges Klebeband geklebt.

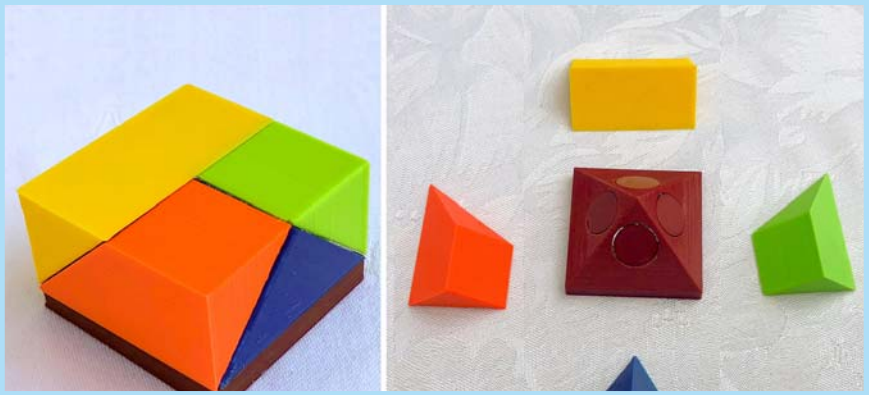


Abb. 10. Pyramide und vier Abschnitte im 3D Druck

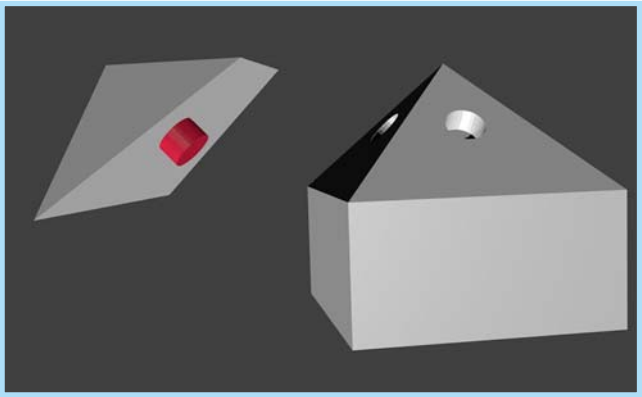


Abb. 11. Zusammenfügen mit Loch und Nippel

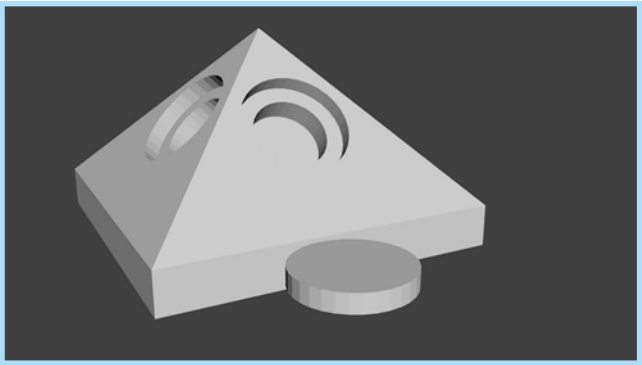


Abb. 12. Zusammenfügen mit Magneten

8 Fazit

Wir leben in einer dreidimensionalen Welt. Die KMK-Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss benennen ‚Raum und Form' prominent als eine von fünf Leitideen. Im real existierenden Unterricht sind wir aber sehr weit davon entfernt, dass diese Leitidee etwa ein Fünftel des Unterrichts füllen würde. Vielmehr ist über viele Jahrzehnte ein Rückgang der Raumgeometrie festzustellen und eine Reduktion auf formelhafte Berechnungen von Volumen und Oberfläche. Dies hat sicher damit zu tun, dass die Algebra immer mehr Raum gewinnt, ohne dass es deswegen zu besseren mathematischen Leistungen kommt.

Es hat aber aus unserer Sicht auch damit zu tun, dass es lange Jahre neben einigen meist verstaubten Modellen aus der Mathematik-Sammlung keine gut einsetzbaren Werkzeuge für den Unterricht in der Raumgeometrie gab. Dies ändert sich gerade rasant. Programme wie GeoGebra mit dem 3D-Modul und CAD-Programme wie BLENDER sind frei verfügbare und auf jedem PC oder Tablet gut handhabbare digitale Werkzeuge, und dazu kommen jetzt auch zunehmend 3D-Drucker in die Schulen, mit denen man aus den auf dem Bildschirm konstruierten virtuellen Modellen reale Objekte produziert, die man nicht nur sehen, sondern auch anfassen und damit operieren kann. Dies ist ein großer Fortschritt, so man diesen Schritt denn gehen will. Anhand eines einfachen Alltagsproblems kann man wie gezeigt in geeigneten Lernumgebungen real und virtuell handlungsorientiert arbeiten, konstruieren und problemlösen. Verbindungen zum Technik-Unterricht und zum Informatik-Unterricht bieten sich nicht nur an, sie drängen sich geradezu auf.

Die GeoGebra-Konstruktionen stehen unter der Adresse https://www.geogebra.org/m/nvquef99 zur Verfügung.

Die Blender-Konstruktionen und die STL-Dateien stehen für MNU-Mitglieder als Online-Ergänzung zum Artikel im geschützten Bereich der MNU-Homepage zur Verfügung.

mit online www.mnu.de ergänzung

Literatur

Emmermann, L., Groth, T. & Halverscheid, S. (2016). Polytope mit dem 3D Drucker herstellen. Räumliches Denken und Operieren in Klasse 7. *Praxis der Mathematik 69*/ 58, 31–34.

Hans-Jürgen Elschenbroich, Korschenbroich, hans-juergen.elschenbroich@mnu.de, war Lehrer für Mathematik und Informatik in Neuss, Fachleiter Mathematik am Studienseminar, Medienberater sowie Fachreferent Mathematik im MNU-Bundesvorstand.

Rudolf Hrach, Siegen, hrach@gmx.net, war Lehrer für Mathematik, Physik und Informatik in Siegen.