Arbeitsblatt zum Induktionsschritt

Name:

Aufgabe 1: Lückentext

Der folgende Induktionsbeweis ist unvollständig. Ergänze den Beweis um fehlende Teile.
Im Induktionsschritt musst du jede Umformung mathematisch Begründen.
Schreibe hierzu in die Zeilen, was für eine Umformung angewendet wurde.
- Textfelder in die du Text tippen sollst sind schwarz.
- Zeichenfelder, in die du mathematische Zeichen schreiben sollst sind rot.

a) **Behauptung:** Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

Beweis durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1 \quad \text{und} \quad 1^2 = 1.$$

Induktionsvoraussetzung:

Induktionsschritt: Zeige:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) =$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= \left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right) + (2(n+1)-1)\\ &= n^2 + (2n+1)\\ &= n^2 + 2n + 1\\ &= (n+1)^2.\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

b) **Behauptung:** Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1.$$

Beweis durch vollständige Induktion:
Induktionsschritt: Für $n = 0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{0} 2^k = 2^0 = 1 \quad \text{und} \quad 2^{0+1} - 1 = 1.$$

Induktionsvoraussetzung:

Induktionsschritt: Zeige:

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k =$$

Es gilt:

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \left(\sum_{k=0}^{n} 2^k\right) + 2^{n+1}$$

$$= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1}$$

$$= 2 \cdot 2^{n+1} - 1$$

$$= 2^{n+2} - 1.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Aufgabe 2: Induktionsschritt ergänzen

Vervollständigen Sie den folgenden Induktionsschritt.
Hierbei ist die Begründung der Umformung angegeben.
Schreibe in die roten Felder dein Ergebniss.

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Induktionsschritt: Zeige:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 =$$ **Aussage für (n+1) ergänzen**

Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 =$$ **Summe auseinanderziehen**

$=$ **Anwenden der Induktionsvoraussetzung**

$=$ **Bruch erweitern**

$=$ **Ausklammern mit Faktor (n+1)**

$=$ **Ausmultiplizieren**

$=$ **Zusammenfassen**

$=$ **Zu zeigenden Term hinschreiben**

Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Arbeitsauftrag

Speicher nun das ausgefüllte Arbeitsblatt als: deinNachnameDeinVorname.pdf und lade es anschließend in der Dropbox hoch.

Viel Erfolg!