

Los mil y un aportes de GeoGebra al estudio de la Geometría Tridimensional

Laura Sombra del Río,
UIDET IMApEC, Facultad de Ingeniería,
Universidad Nacional de La Plata.

Resumen: *GeoGebra ha alcanzado un gran nivel de popularidad en las aulas de matemática en gran parte del mundo. Uno de los factores clave para su permanencia en la escena educativa es que constantemente se está reinventando e incorporando nuevas posibilidades. En los últimos años, ha tenido un alto grado de desarrollo la vertiente tridimensional del programa, incorporando la Realidad Aumentada y la opción de exportar construcciones para imprimir en 3D. En el presente artículo se ofrece un análisis de estas características, de su potencial didáctico, de cómo pueden complementarse mutuamente y se brindan ejemplos de su utilización en la práctica.*

Palabras clave: *Geometría tridimensional, Visualización, GeoGebra, Realidad Aumentada, Impresión 3D*

The thousand and one contributions of GeoGebra to the study of Three-dimensional Geometry

Abstract: *GeoGebra has reached a high level of popularity in math classrooms all over the world. One of the key factors for its permanence in the educational scene is that it is constantly reinventing itself and incorporating new possibilities. In recent years, the three-dimensional aspect of the program has had a high degree of development, incorporating Augmented Reality and the possibility of exporting constructions to print in 3D. This article offers an analysis of these characteristics, their didactic potential, how they can complement each other and gives examples of their use in practice.*

Keywords: *Tridimensional Geometry, Visualization, GeoGebra, Augmented Reality, 3D printing*

1. INTRODUCCIÓN

El software libre GeoGebra (<www.geogebra.org>) ha alcanzado un gran nivel de popularidad en las aulas de matemática en gran parte del mundo. Esto se debe a numerosos factores: lo sencillo de su utilización, lo atractivo de su interfaz gráfica, la posibilidad de vincular dinámicamente distintas representaciones de los objetos matemáticos, su disponibilidad en distintos idiomas y para diversos dispositivos, la existencia de una comunidad global en torno al programa, entre otros. Pero uno de los principales, es que constantemente se está reinventando e incorporando nuevas características y herramientas. En los últimos años, ha tenido un gran desarrollo la vertiente tridimensional del programa, incorporando la Realidad Aumentada (RA) y la posibilidad de exportar construcciones para imprimir en 3D.

En este artículo se reseñan, en primer lugar, algunos aportes teóricos respecto de la enseñanza de la geometría tridimensional que permitirán fundamentar el uso de estas nuevas herramientas para potenciar el aprendizaje. En segundo lugar, se indicarán las características de la vista gráfica 3D, el modo RA y la exportación para impresora 3D y se brindarán algunos ejemplos de su utilización, situados en un contexto educativo particular: los cursos de matemática de primer año de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (FI UNLP), República Argentina, en los que se estudian contenidos de Cálculo y de Geometría Analítica.

2. APORTES TEÓRICOS

Las representaciones de los objetos matemáticos constituyen un aspecto central en lo que respecta al aprendizaje de la matemática. De acuerdo con Duval (2006) no es posible acceder a los objetos matemáticos si no es por medio de sus representaciones: “La única forma de acceder y trabajar con ellos es a través de signos y representaciones semióti-cas” (p. 157). Aprender matemáticas implica reconocer un mismo objeto matemático en sus distintas representaciones, y no confundirlo con ninguna de estas. De allí surge la necesidad de trabajar para cada objeto con distintos registros de representación y aprender a reconocer en el contexto de cada actividad el más adecuado.

Desde otras perspectivas teóricas, se habla del proceso de visualización, en el cual, de acuerdo con Hohenwarter (2014), GeoGebra juega un rol importante, proporcionando visualizaciones dinámicas, ofreciendo representaciones icónicas de los objetos que pueden modificarse fácilmente moviendo elementos con el ratón o el dedo (en el caso de interfaces táctiles). Estas representaciones son fundamentalmente diferentes de las imágenes estáticas, que solamente pueden representar una situación fija, ya que facilitan la exploración y el descubrimiento de propiedades invariantes.

A la hora de estudiar conceptos de la geometría del espacio tridimensional, así como también en el cálculo multivariable, las representación gráfica de los objetos se complejiza, dejándose en numerosas oportunidades a un lado, volcándose a trabajar casi exclusivamente en forma analítica, reconocer sólidos simples y calcular áreas y volúmenes (Andrade Molina & Montecino Muñoz, 2011; Fernández Blanco, Diego-Mantecón, & González Sequeiros, 2019; Galo Sánchez, 2018).

Andrade y Montecino (2011) sostienen que uno de los obstáculos que interfieren con la representación y visualización de los objetos matemáticos tridimensionales, es que suelen presentarse representaciones planas (en perspectiva) y, en muchas ocasiones, prototípicas (siempre desde el mismo punto de vista y en la misma posición). En un sentido similar Fernández Blanco et al (2019) señalan que “en las representaciones planas de los cuerpos tridimensionales existe una pérdida de información que dificulta el análisis de las propiedades de estos objetos” (p. 796).

En este contexto, además de otros, toman relevancia los materiales conocidos como manipulables, tanto físicos como virtuales. De acuerdo con Bujak et al (2013) ambos tienen una incidencia positiva en el proceso de aprendizaje de la matemática, y permiten hacer foco en distintos aspectos, en forma complementaria.

Existen también estudios vinculados a propuestas didácticas que combinan la realización de modelos virtuales y físicos y revelan que “los estudiantes prestan atención a distintas partes del modelo en el entorno físico y digital que se complementan mutuamente” (Lavicza et al., 2018, p. 114). Durante el modelado digital, los estudiantes se concentran en los principios de rotación, traslación y durante el físico, en el funcionamiento de las articulaciones. Los autores sostienen que tanto los modelos físicos como los digitales ayudaron a la visualización la comprensión espacial y facilitaron las mediciones (Lieban & Lavicza, 2017).

En las próximas secciones, se detallan las distintas características del software libre GeoGebra que posibilitan el trabajo en las direcciones propuestas por los autores mencionados en este apartado teórico y se ilustrarán con ejemplos de trabajos en el aula.

3. LA VISTA GRÁFICA 3D DE GEOGEBRA

Esta vista se incorpora a partir de la versión 5 del programa. Permite la representación gráfica de distintos objetos en el espacio tridimensional: puntos, rectas, segmentos, polígonos, curvas, poliedros, superficies, gráficas de funciones de dos variables, etc. Asimismo permite la representación algebraica de muchos de estos objetos: curvas y superficies en forma paramétrica; esferas, planos y cuádricas en forma implícita; todo esto, dinámicamente conectado como ya es costumbre en GeoGebra. Esto posibilita el trabajo con múltiples representaciones en simultáneo.

Una de las posibilidades bonitas de la vista 3D es la de visualizar los objetos con gafas anáglifo. Esto otorga una sensación de realismo que resulta importante para la comprensión de los estudiantes (ver figura 1).

En mis cursos de Cálculo, utilizo esta vista prácticamente desde su lanzamiento. Varias de las aplicaciones que le he dado pueden encontrarse en otros artículos (Del Río, 2016, 2017, 2018), pero aquí me gustaría contar puntualmente una experiencia en la que se ha combinado la utilización de un conjunto de *applets* con el modelado físico de un objeto.

El tema abordado fue el de superficies cuádricas. Desde hacía algún tiempo, venía proponiendo a los estudiantes trabajar con este libro GeoGebra: <<https://www.geogebra.org/m/cAZyDQBu>>. Aquí los estudiantes pueden visualizar dinámicamente la construcción de las cuádricas a partir de sus trazas, o intersecciones con planos paralelos a los planos coordenados.

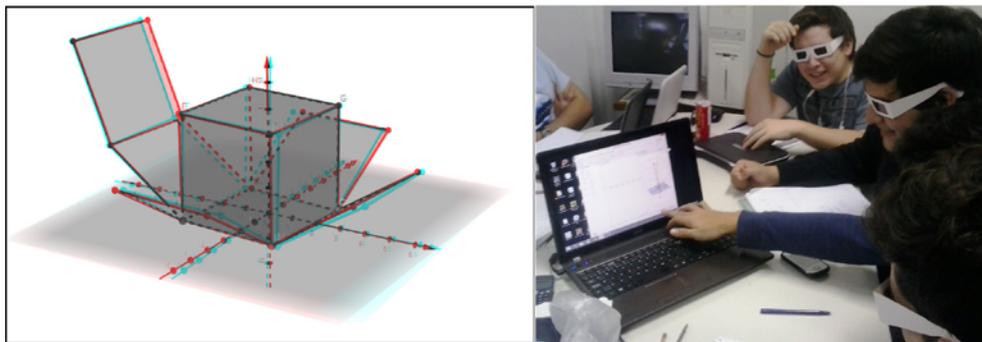


Figura 1. A la izquierda, cómo se ve un objeto en la Vista Gráfica 3D de GeoGebra cuando se encuentra configurada para gafas anáglifo. A la derecha, imagen de estudiantes utilizando las gafas para visualizar objetos en 3D

Simultáneamente, otro profesor de nuestra cátedra, Félix Aloé, llevaba a cabo una experiencia que consistía en proponer a los estudiantes la construcción de las trazas de las cuádricas con alambres para luego ensamblar el esqueleto de las mismas. Los estudiantes debían trazar en papel del modo más preciso posible las curvas que obtenían al calcular la intersección entre la superficie y distintos planos. Luego, debían replicar dicha curva con un alambre y finalmente ensamblar el esqueleto de la cuádrica.

Ambas modalidades de trabajo (la de los alambres y el uso del libro GeoGebra) provocaban buena predisposición por parte de los estudiantes y permitían hacer hincapié en distintos aspectos. Inspirada en esta experiencia y en el trabajo de Diego Lieban citado en la introducción, les propuse a los estudiantes una forma de trabajo que combinara ambas aproximaciones.

A cada grupo le tocó una superficie cuádrica. Primero, debían explorarla utilizando el *applet* de GeoGebra correspondiente del libro antes mencionado. Luego, utilizando

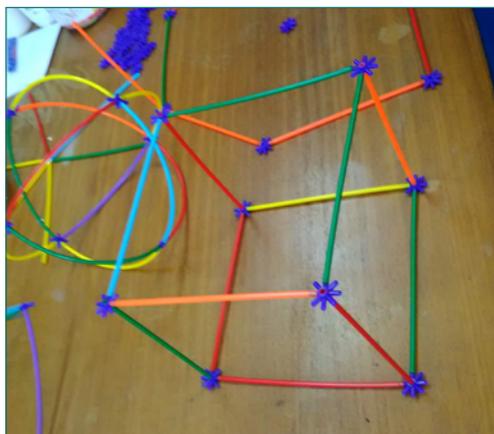


Figura 2. Imágenes del juego que se utilizó para la experiencia

un juego de construcción que consiste en un conjunto de pajitas y conectores (ver figura 2), debían intentar realizar un modelo físico de la cuádrica que les había tocado. Por último, cada grupo debía pasar al frente con su construcción y explicarla al resto de los compañeros (indicar las curvas obtenidas en cada plano y cómo las fueron ensamblando). En este caso, se trabajó de un modo más cualitativo que en el caso de la construcción con alambres. La información de las curvas que debían construir provino, en este caso, del *applet* de GeoGebra. Se mantuvo de la experiencia con alambre la necesidad de trabajar en forma grupal y colaborativa y



Figura 3. Fotos de los estudiantes realizando la experiencia

la idea del modelado físico. Los estudiantes luego conservaron el libro GeoGebra para poder explorar las otras cuádricas que no les había tocado construir. Tuvieron que poner en juego habilidades comunicativas para exponer frente al resto de la clase lo que habían construido. En la figura 3, se presentan imágenes de la experiencia realizada.

4. REALIDAD AUMENTADA

Una de las herramientas de visualización 3D más recientemente incorporadas por el programa, es la Realidad Aumentada (RA). Si bien esta tecnología es de aparición reciente, presenta un importante desarrollo. Su aplicación en el ámbito educativo, en particular en la enseñanza de la matemática, es objeto de múltiples investigaciones en la actualidad.

De acuerdo con Bujak et al. (2013), el potencial de la RA radica en que permite combinar los objetos físicos con información virtual, potenciando las virtudes del carácter concreto de los manipulativos físicos con la flexibilidad de los virtuales. Estos autores destacan que la RA permite a los estudiantes interactuar con los contenidos educativos en una forma similar a la que utilizan para interactuar con el mundo físico: pueden moverse para cambiar la perspectiva, acercarse y alejarse de los objetos, seleccionarlos, moverlos. Estas interacciones naturales reducen las habilidades requeridas para que los estudiantes puedan comenzar a explorar, en comparación con la preparación previa que a menudo se requiere para interactuar con programas informáticos. Por otro lado, destacan

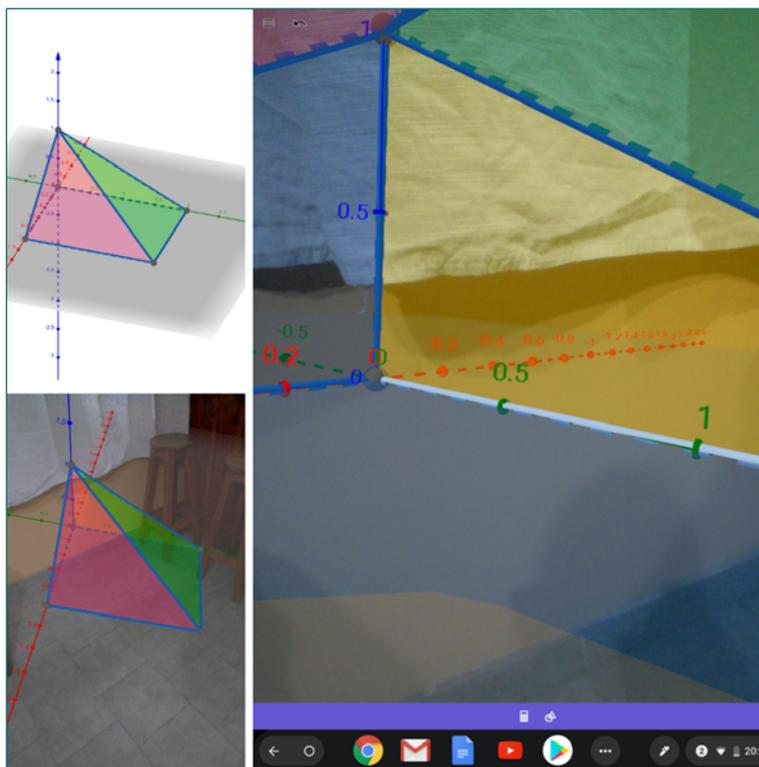


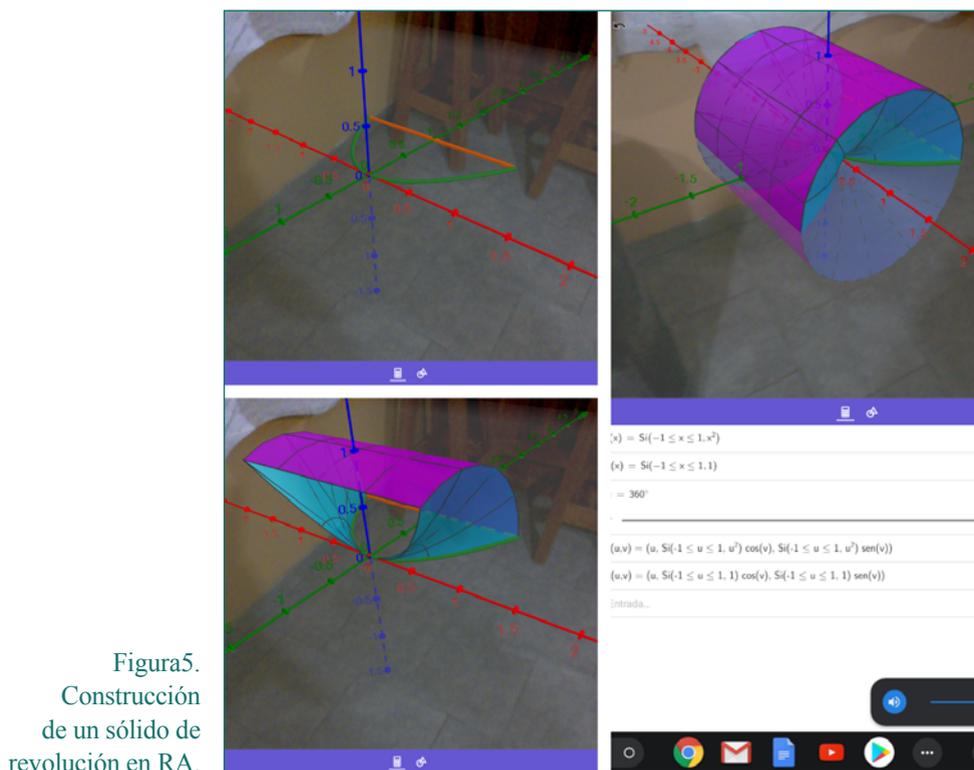
Figura 4. Ejemplo de cómo se observan los objetos matemáticos en el entorno físico gracias al modo RA de GeoGebra. En el último panel, se muestra la vista desde el interior.

que el estudiante puede confundirse, debido a la apariencia concreta de los objetos virtuales: es preciso insistir en que esos objetos virtuales son meras representaciones, como señala Duval.

En el caso de GeoGebra, lo que posibilita la RA es colocar las representaciones gráficas de los objetos matemáticos creados, en el entorno real, a través de la cámara del dispositivo (ver Figura 4). De este modo, los alumnos pueden caminar alrededor para explorar y familiarizarse con los objetos. Además, pueden “meterse dentro” de los mismos (por ejemplo, cuando se trata de sólidos y visualizarlos desde su interior, una perspectiva difícil de conseguir con otras herramientas).

Una de las posibilidades interesantes de esta herramienta es que los estudiantes pueden modelar matemáticamente objetos de la realidad y superponer la representación gráfica de dicho modelo con el objeto real a través de la cámara del dispositivo móvil para comprobar empíricamente la adecuación del modelo y, eventualmente, realizar ajustes. Timoty Brzezinski tiene numerosos ejemplos de esta aplicación, que pueden encontrarse en este libro GeoGebra: <<https://www.geogebra.org/m/myquzswq>>.

En las asignaturas de Cálculo de la FI UNLP, la incorporación de la RA ha sido muy reciente. Sin embargo, es posible comentar algunas situaciones en las que su utilización ha proporcionado beneficios. Por ejemplo, a la hora de abordar el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución, los estudiantes manifiestan múltiples dificultades para comprender aquellos que presentan cavidades. Uno de los primeros que se les propone



resolver es el volumen del sólido que se obtiene al rotar la región limitada por y . La RA les ha permitido visualizar y comprender este sólido al poder meterse dentro de la cavidad y entre medio de las dos superficies de revolución generadas (ver figura 5).

15. MPRESIÓN 3D

Otra de las últimas novedades en relación a la vista gráfica 3D es la posibilidad de exportar las construcciones al formato STL para luego poder imprimirlas utilizando una impresora 3D. Esta nueva tecnología ya está motivando la creación de nuevas propuestas didácticas e investigaciones en torno al impacto de su integración en el aula.

Reichenberger, Lieban, Russo y Lichtenegger (2019) sostienen que gracias a esta tecnología, tanto docentes como estudiantes pueden experimentar cómo diseñar objetos matemáticos y traerlos a la realidad. Destacan también la importancia de la complementariedad entre la impresión 3D y el uso del software de un modo dinámico: Mientras la primera habilita la exploración táctil y la comparación física con objetos de la vida real, el segundo permite la observación de una variedad de casos con un simple movimiento arrastre.

La posibilidad de crear representaciones de objetos matemáticos táctiles abre también toda una nueva área de investigación relacionada con la accesibilidad de dichos objetos por parte de personas no videntes o disminuidas visuales.



Figura 6. Algunos de los sólidos diseñados para apoyar el aprendizaje de los alumnos de la FI UNLP.

Si bien existen librerías de acceso abierto de donde es posible descargar modelos matemáticos para imprimirlos en 3D, el hecho de poder crear materiales manipulativos a medida, tanto para los docentes como para los estudiantes, ofrece la posibilidad de desarrollar la creatividad y plantea nuevos desafíos matemáticos.

En el caso de los cursos de la FI UNLP, aún no se han realizado experiencias en las cuales sean los estudiantes quienes diseñen las piezas para luego imprimirlas, pero sí se ha comenzado a experimentar con el uso de piezas creadas *ad hoc*, con la ayuda invaluable de Diego Lieban y el grupo de GeoGebra 3D printing. Se han generado para los estudiantes de dicha facultad algunas piezas que representan superficies cuádricas en las que se han destacado las trazas (ver figura 6), así como también algunos sólidos que los estudiantes deben describir en el proceso de aprendizaje de las integrales dobles y triples y frente a los cuales ellos manifiestan enormes dificultades, tanto para su representación, como para su visualización. A modo de ejemplo, se muestran dos: el sólido limitado por dos cilindros circulares de radio 1, uno cuyo eje es el eje x y el otro, de eje, en el primer octante, y el segundo, es el sólido limitado entre un paraboloide y un plano inclinado que pasa por su vértice (ver figura 6). En este segundo caso, se utilizó un imán autoadhesivo y pintura metálica para poder visualizar ese sólido como parte de uno más grande.

CONCLUSIONES

En este artículo se presentaron algunos aportes teóricos que dan cuenta de las dificultades habituales de los estudiantes a la hora de comprender los objetos matemáticos tridimensionales y el rol que juegan los manipulables virtuales y físicos a la hora de afrontar las mismas.

Luego, se presentaron y discutieron las características del software libre GeoGebra que permiten el abordaje de la geometría tridimensional, brindando ejemplos de su utilización en cursos de matemática de primer año en una Facultad de Ingeniería de la República Argentina. En varios casos se destacó la importancia de combinar lo concreto con lo virtual: mientras que lo concreto habilita la exploración táctil y la manipulación física, que no requiere el aprendizaje de lenguajes de software, lo virtual permite la exploración

con facilidad de múltiples casos, la mirada al interior de los objetos, la modificación de los mismos.

Se espera haber brindado al lector un panorama amplio sobre la problemática y las diversas posibilidades que abre GeoGebra para su abordaje, y que los ejemplos, tanto propios como los de terceros que fueron mencionados, sirvan como inspiración para la creación de nuevas estrategias didácticas.

REFERENCIAS

- Andrade Molina, M., & Montecino Muñoz, A. (2011). La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Recife, Brasil: Comité Interamericano de Educación Matemática.
- Bujak, K. R., Radu, I., Catrambone, R., MacIntyre, B., Zheng, R., & Golubski, G. (2013). A psychological perspective on augmented reality in the mathematics classroom. *Computers and Education*, 68, 536-544. <<https://doi.org/10.1016/j.compedu.2013.02.017>>.
- Del Río, L. (2016). Enseñar y aprender Cálculo con ayuda de la vista gráfica 3D de GeoGebra. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, 17(1). Recuperado de <<https://tec-digital.tec.ac.cr/revistamatematica/paginasgenerales/numanteriores.htm>>.
- Del Río, L. (2017). Visualization of limits of functions of two variables. En *GeoGebra Global Gathering*. Linz, Austria. Recuperado de <https://www.geogebra.org/m/Mvpuv5v6>
- Del Río, L. (2018). Learning Vector Calculus: How Can GeoGebra Help Us? En *GeoGebra ICM Satellite Conference*. Recuperado de <<http://www.im-uff.mat.br/geogebra/icm/geogebra-icm-abstracts.pdf>>.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación semiótica. *La gaceta de la RSME*, 9(1), 143-168.
- Fernández Blanco, T., Diego-Mantecón, J. M., & González Sequeiros, P. (2019). Procesos de Visualización en una Tarea de Generación y Representación de Cuerpos de Revolución. *Bolema*, 33(64), 768-789. <<https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a16>>.
- Galo Sánchez, J. R. (2018). Partición prismática de un cubo en seis pirámides triangulares equivalentes. *Matemáticas, educación y Sociedad*, 1(2), 1-20. Recuperado a partir de <<http://mesjournal.es/ojs/index.php/mes/article/view/12>>.
- Hohenwarter, M. (2014). Multiple representations and GeoGebra-based learning environments. *Union. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 39, 11-18.
- Lavicza, Z., Fenyvesi, K., Lieban, D., Park, H., Hohenwarter, M., Mantecon, J. D., & Prodromou, T. (2018). Mathematics learning through Arts, Technology and Robotics: multi-and transdisciplinary STEAM approaches. En *8th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education* (pp. 110-121). Taiwan.
- Lieban, D., & Lavicza, Z. (2017). Geometric modelling inspired by Da Vinci: shaping and adding movement using technology and physical resources. En *CERME 10* (pp. 948-955). Dublin, Irlanda.
- Reichenberger, S., Lieban, D., Russo, C., & Lichtenegger, B. (2019). 3D Printing to Address Solids of Revolution at School. En *Bridges Conference* (pp. 493-496).