1. A geometriai összefüggések felírása

Jelölje a derékszögű háromszög két befogóját a és b. A súlyvonalak a szemközti oldalak felezőpontjába futnak, így a szárakat $\frac{a}{2}$ és $\frac{b}{2}$ hosszúságú szakaszokra osztják.

A Pitagorasz-tétel alapján a két súlyvonal által alkotott derékszögű háromszögekre a következő egyenletek írhatók fel:

(1) $a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = s_a^2 \Longrightarrow a^2 + \frac{b^2}{4} = 20^2 = 400$

1. A geometriai összefüggések felírása

Jelölje a derékszögű háromszög két befogóját a és b. A súlyvonalak a szemközti oldalak felezőpontjába futnak, így a szárakat $\frac{a}{2}$ és $\frac{b}{2}$ hosszúságú szakaszokra osztják.

A Pitagorasz-tétel alapján a két súlyvonal által alkotott derékszögű háromszögekre a következő egyenletek írhatók fel:

(1) $a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = s_a^2 \Longrightarrow a^2 + \frac{b^2}{4} = 20^2 = 400$

(2) $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 = s_b^2 \Longrightarrow \frac{a^2}{4} + b^2 = 27^2 = 729$

2. Az egyenletrendszer megoldása

Szorozzuk meg mindkét egyenletet 4-gyel, hogy eltüntessük a nevezőket:

(1) $4a^2 + b^2 = 1600$

(2) $a^2 + 4b^2 = 2916$

Fejezzük ki b^2-et az (1) egyenletből:

$b^2 = 1600 - 4a^2$

Helyettesítsük ezt be a (2) egyenletbe:

$a^2 + 4(1600 - 4a^2) = 2916$

$a^2 + 6400 - 16a^2 = 2916$

$-15a^2 = 2916 - 6400$

$-15a^2 = -3484$

$$a^2 = \frac{3484}{15}$$

Ebből a befogók pontos hossza (mivel $a, b > 0$):

$$a = \sqrt{\frac{3484}{15}} = \frac{2\sqrt{871}}{\sqrt{15}} = \frac{2\sqrt{13065}}{15}$$

Most számoljuk ki b^2 értékét:

$$b^2 = 1600 - 4 \cdot \left(\frac{3484}{15} \right) = 1600 - \frac{13936}{15} = \frac{24000-13936}{15} = \frac{10064}{15}$$

Innen a b befogó pontos hossza:

$$b = \sqrt{\frac{10064}{15}} = \frac{4\sqrt{629}}{\sqrt{15}} = \frac{4\sqrt{9435}}{15}$$

3. A háromszög területének meghatározása

A derékszögű háromszög területe a két befogó szorzatának a fele:

$$T = \frac{a \cdot b}{2}$$

Helyettesítsük be a kapott gyökös kifejezéseket:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3484}{15}} \cdot \sqrt{\frac{10064}{15}}$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3484 \cdot 10064}}{15}$$

$$T = \frac{1}{30} \cdot \sqrt{35063056}$$

Mivel $35063056 = 256 \cdot 136965$, a gyök alól kihozható 16 ($\sqrt{256} = 16$):

$$T = \frac{16}{30} \cdot \sqrt{136965} = \frac{8}{15} \cdot \sqrt{136965}$$

Vagy ha a te képleted formájára hozzuk (bevíve a 2-est a gyök alá mint 4):

$$T = \frac{4}{15} \cdot \sqrt{4 \cdot 136965} = \frac{4}{15} \cdot \sqrt{547859}$$

Végeredmény:

A háromszög pontos területe:

$$T = \frac{4}{15} \sqrt{547859} \approx \mathbf{197,38}$$