CÁLCULO APLICADO A VECTORES

Longitud, área y volumen diferenciales

Cartesianas

$$d\mathbf{l} = dx\,\mathbf{a}_x + dy\,\mathbf{a}_y + dz\,\mathbf{a}_z$$

$$d\mathbf{S} = dy\,dz\,\mathbf{a}_x$$
$$dx\,dz\,\mathbf{a}_y$$
$$dx\,dy\,\mathbf{a}_z$$

$$dv = dx\,dy\,dz$$

Cilíndricas

$$d\mathbf{l} = d\rho\,\mathbf{a}_\rho + \rho\,d\phi\,\mathbf{a}_\phi + dz\,\mathbf{a}_z$$

$$d\mathbf{S} = \rho\,d\phi\,dz\,\mathbf{a}_\rho$$
$$d\rho\,dz\,\mathbf{a}_\phi$$
$$\rho\,d\phi\,d\rho\,\mathbf{a}_z$$

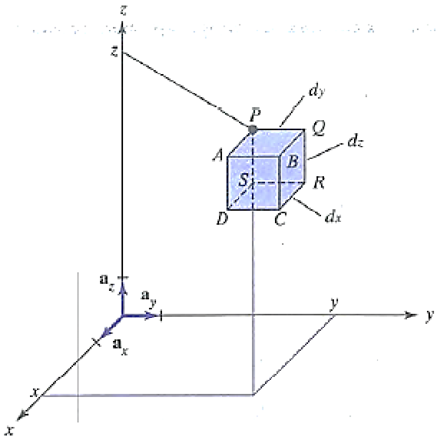
$$dv = \rho\,d\rho\,d\phi\,dz$$

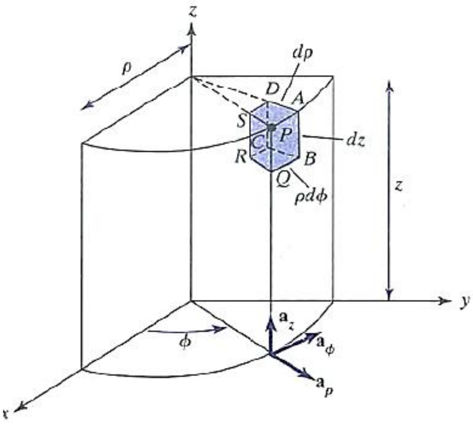
Esféricas

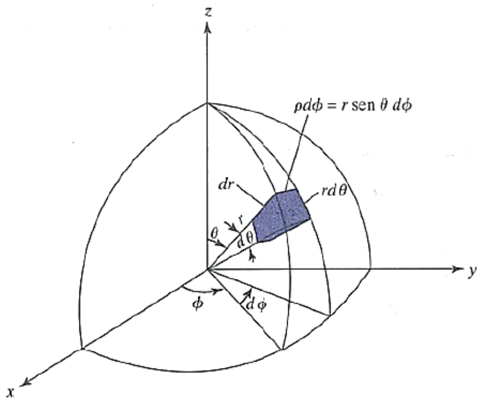
$$d\mathbf{l} = dr\,\mathbf{a}_r + r\,d\theta\,\mathbf{a}_\theta + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\phi\,\mathbf{a}_\phi$$

$$d\mathbf{S} = r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\,d\phi\,\mathbf{a}_r$$
$$r\,\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\phi\,\mathbf{a}_\theta$$
$$r\,dr\,d\theta\,\mathbf{a}_\phi$$

$$dv = r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$







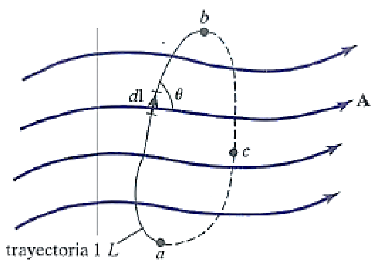
Se recomienda resolver el ejemplo 3.1 y el ejercicio 3.1

Integrales de línea, superficie y volumen

Línea, curva, contorno o trayectoria se considerarán sinónimos.

La integral de línea $\int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ es la integral de la componente tangencial de $\mathbf{A}$ a lo largo de la curva L.

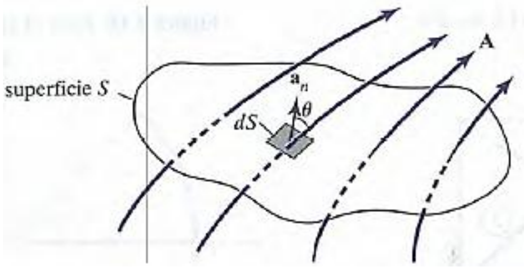
La integral de línea para trayectoria cerrada se llama Circulación.



Dado un campo vectorial **A** continuo en una región que contiene la superficie plana S, la *integral de superficie* o el *flujo* de **A** a través de S :

$$\Psi = \int_S |\mathbf{A}| \cos\theta \, dS = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_n \, dS \qquad \Psi = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

El flujo también se puede representar con el símbolo Φ.



Se recomienda realizar el Ejemplo 3.2

Comparto un simulador para campos conservativos:
https://www.geogebra.org/classic/j9ywujcu

Operador del

También conocido como operador nabla.

1. El gradiente de un escalar V, el cual se escribe ∇V.
2. La divergencia de un vector **A**, la cual se escribe $\nabla \cdot \mathbf{A}$.
3. El rotacional de un vector **A**, el cual se escribe $\nabla \times \mathbf{A}$.
4. El laplaciano de un escalar V, el cual se escribe $\nabla^2 V$.

Cartesianas

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

Cilíndricas

$$\nabla = \mathbf{a}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \mathbf{a}_\phi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Esféricas

$$\nabla = \mathbf{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{a}_\phi \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

Gradiente de un escalar

El **gradiente** de un campo escalar V es un vector que representa tanto la magnitud como la dirección de la máxima rapidez de incremento espacial de V.

el caso de las coordenadas cartesianas

$$\boxed{\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z}$$

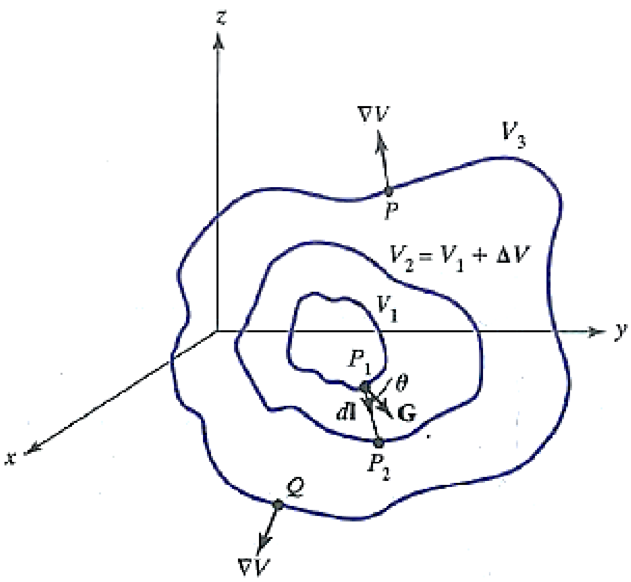
en el de las coordenadas cilíndricas,

$$\boxed{\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z}$$

y en el de las coordenadas esféricas,

$$\boxed{\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi}$$

Representación del Gradiente de potencial y su relación con las curvas de nivel (equipotenciales en electromagnetismo).



Se recomienda resolver el ejercicio 3.3 y 3.4

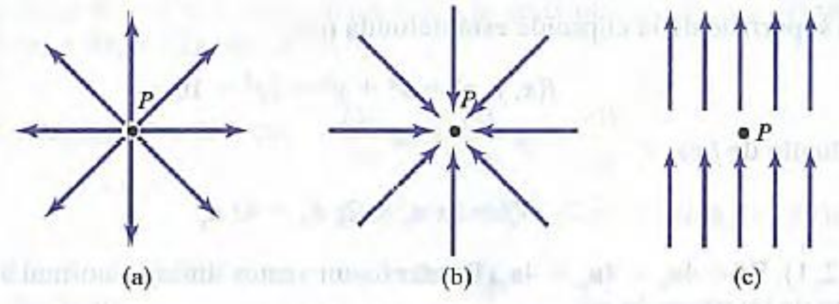
Un simulador de gradiente en cartesianas: https://www.geogebra.org/m/udegjrec

Material interesante: Leer capítulo 15 del Libro de cálculo 2 de Larson.

Divergencia de un vector y teorema de la divergencia

La **divergencia** de **A** en un punto dado *P* es el flujo *hacia fuera* por unidad de volumen a medida que el volumen se contrae alrededor de *P*.

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v}$$



a)Divergencia positiva, b)Divergencia negativa, c) Divergencia cero.

Divergencia en cartesianas

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

Divergencia en cilíndricas

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

Divergencia en esféricas

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \operatorname{sen} \theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}}$$

El **teorema de la divergencia** establece que el flujo total hacia fuera de un campo vectorial **A** a través de la superficie *cerrada S* equivale a la integral de volumen de la divergencia de **A**.

$$\boxed{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{A}\, dv}$$

Se recomienda copiar los ejemplos 3.6 y 3.7.

Rotacional de un vector y teorema de Stokes

El **rotacional** de **A** es un vector axial (o rotacional) cuya magnitud es la circulación máxima de **A** por unidad de área conforme el área tiende a cero y cuya dirección es la dirección normal del área cuando el área se orienta de tal forma que de ello resulta la circulación máxima.

$$\text{rot}\,\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \left(\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \right) \mathbf{a}_{n_{\text{máx}}}$$

Rotacional en cartesianas

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] \mathbf{a}_x + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \mathbf{a}_y + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \mathbf{a}_z$$

Rotacional en cilíndricas

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \rho\,\mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right] \mathbf{a}_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \mathbf{a}_\phi + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial (\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_z$$

Rotacional en esféricas

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & r\,\mathbf{a}_\theta & r \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{a}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & r \operatorname{sen}\theta\, A_\phi \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \left[\frac{\partial (A_\phi \operatorname{sen}\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r} \right] \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{a}_\theta$$

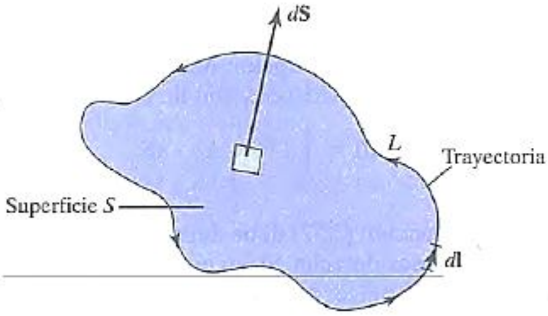
(a) (b)

a) Rotacional en P apunta hacia fuera de la página,
b) Rotacional en P es cero

Teorema de Stokes

El **teorema de Stokes** establece que la circulación de un campo vectorial $\mathbf{A}$ alrededor de una trayectoria (cerrada) L es igual a la integral de superficie del rotacional de $\mathbf{A}$ sobre la superficie abierta S circunscrita por L (figura 3.20), siempre que $\mathbf{A}$ y $\nabla \times \mathbf{A}$ sean continuos en S.

$$\boxed{\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}}$$



Copiar ejemplos 3.8, 3.9 y 3.10

Laplaciano de un escalar

El **laplaciano** de un campo escalar V, el cual se escribe $\nabla^2 V$, es la divergencia del gradiente de V.

Laplaciano en Cartesianas

$$\boxed{\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}}$$

Laplaciano en Cilíndricas

$$\boxed{\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}}$$

Laplaciano en esféricas

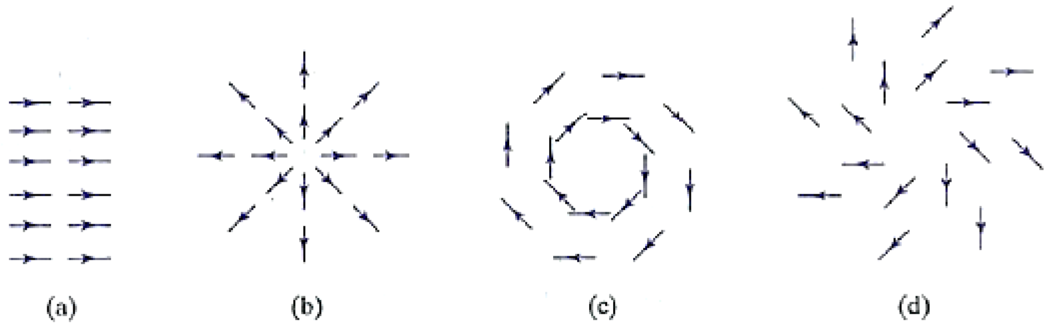
$$\boxed{\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}}$$

Se puede definir el Laplaciano de un vector de la siguiente forma:

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}}$$

Copiar el ejemplo 3.11

Clasificación de los campos vectoriales



a) $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \ \nabla \times \mathbf{A} = 0$
b) $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0, \ \nabla \times \mathbf{A} = 0$
c) $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \ \nabla \times \mathbf{A} \neq 0$
d) $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0, \ \nabla \times \mathbf{A} \neq 0$

Se dice que un campo vectorial $\mathbf{A}$ es **solenoidal** (o sin **divergencia**) si $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \\ \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A} \end{array}}$$

Se dice que un campo vectorial $\mathbf{A}$ es **irrotacional** (o **potencial**) si $\nabla \times \mathbf{A} = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{A} = 0 \\ \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{A} = -\nabla V \end{array}}$$

Copiar ejemplo 3.12