Slides de apoio da oficina "Pantógrafo"

– Algumas recordações dos cursos de Geometria Elementar –

Triângulos Semelhantes

Intuitivamente, dois objetos são *semelhantes* quando são "iguais a menos de escala". Exemplos cotidianos bem simples podem ser encontrados em brinquedos, em que miniaturas de carros, casas e pessoas (bonecos) são semelhantes aos originais.

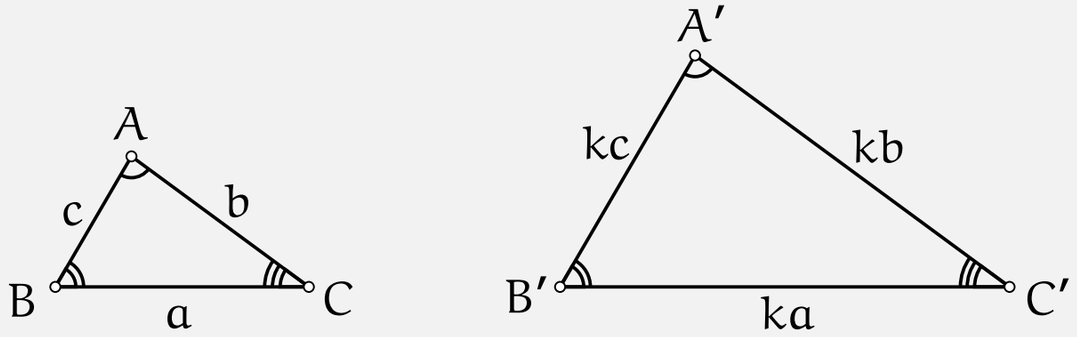
Vamos começar com o conceito de semelhança envolvendo triângulos. Trata-se de um caso particular da definição geral de semelhança.

Dois triângulos são ditos ***semelhantes*** quando for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de tal modo que lados correspondentes tenham medidas proporcionais e ângulos correspondentes tenham a mesma medida.

Assim, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes quando existir uma bijeção $\varphi : \{A, B, C\} \to \{A', B', C'\}$, digamos $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$ e $\varphi(C) = C'$, tal que:

$$\begin{cases} A'B' = k.AB \\ B'C' = k.BC \\ C'A' = k.CA \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \widehat{A'} = \widehat{A} \\ \widehat{B'} = \widehat{B} \\ \widehat{C'} = \widehat{C} \end{cases},$$

sendo $k > 0$ a constante de proporcionalidade das medidas dos lados, chamada de ***razão de semelhança*** do triângulo ABC para o triângulo $A'B'C'$.



É fácil verificar que se k é a razão de semelhança de ABC para $A'B'C'$, então $\frac{1}{k}$ é a razão de semelhança de $A'B'C'$ para ABC.

Quando $k = 1$ temos exatamente a definição de *congruência* entre os triângulos ABC e $A'B'C'$.

Há alguns "casos de semelhança" que auxiliam na verificação da definição acima.

Teorema 1. (caso AAA) Se dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são tais que $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ e $\widehat{C} = \widehat{C'}$, então os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes.

Na verdade, o caso acima pode ser chamado de caso "AA" pois conhecendo-se dois dos ângulos de um triângulo, o terceiro fica univocamente determinado na Geometria Euclidiana.

Teorema 2. (caso LAL) Se dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são tais que $A'B' = k.AB$, $B'C' = k.BC$ e $\widehat{B} = \widehat{B'}$, sendo k constante real positiva, então os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes (e k é razão de semelhança de ABC para $A'B'C'$).

Teorema 3. (caso LLL) Se dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são tais que $A'B' = k.AB$, $B'C' = k.BC$ e $C'A' = k.CA$, sendo k constante real positiva, então os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes (e k é razão de semelhança de ABC para $A'B'C'$)

Ampliando o Conceito de Semelhança

Vamos conceituar matematicamente e de forma precisa a ideia de semelhança no plano euclidiano (tal conceituação é a mesma no espaço euclidiano).

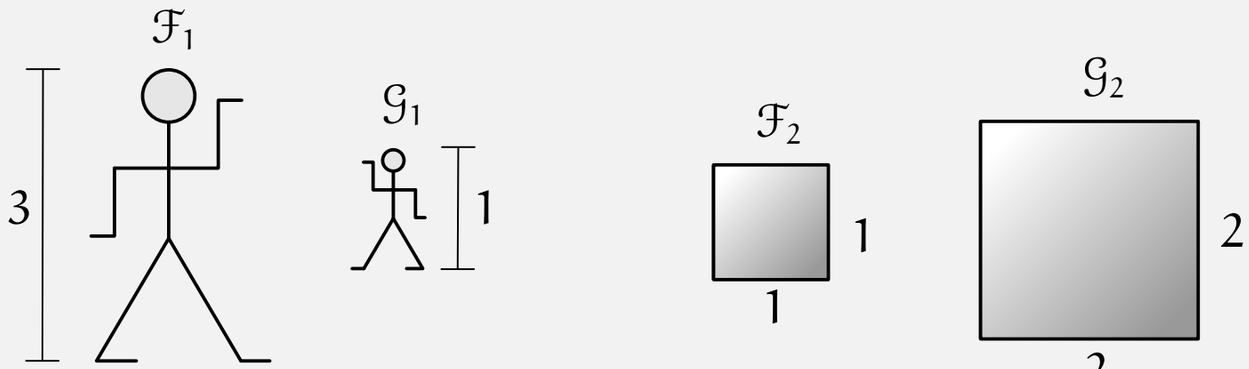
A definição que demos acima para o estudo de triângulos semelhantes é caso particular da definição abaixo.

Duas figuras $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ no espaço euclidiano são ditas **semelhantes** quando existirem uma bijeção $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ e um número real **positivo** k tal que para quaisquer $P, Q \in \mathcal{F}$ tem-se:

$$\boxed{P'Q' = k.PQ},$$

sendo $P' = \varphi(P)$ e $Q' = \varphi(Q)$.

A constante de proporcionalidade k é chamada de **razão de semelhança** (ou **fator de escala**) de $\mathcal{F}$ para $\mathcal{G}$.



figuras semelhantes quadrados semelhantes

É fácil verificar que se k é a razão de semelhança de $\mathcal{F}$ para $\mathcal{G}$, então $\frac{1}{k}$ é a razão de semelhança de $\mathcal{G}$ para $\mathcal{F}$.

Quando $k = 1$ dizemos que as figuras $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são **congruentes**, e que a bijeção φ é uma **isometria** entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$.

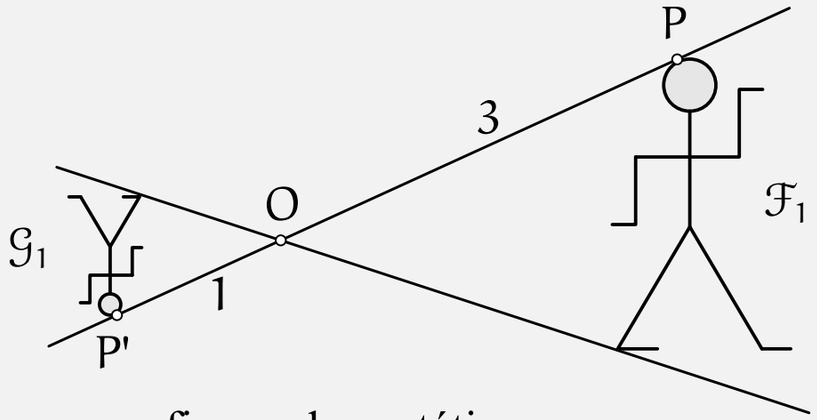
Homotetia

Sejam O um ponto do espaço E, r um número real **não nulo** e $\sigma_{O,r} : E \to E$ uma aplicação tal que, quando $P \in E$, tem-se:

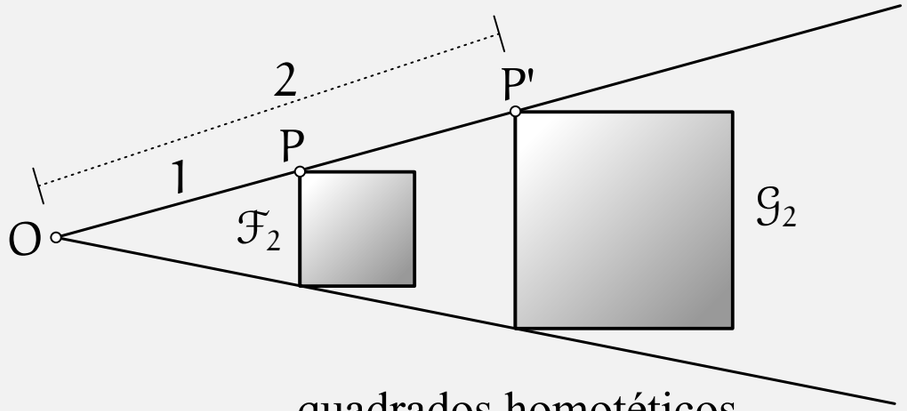
$$\boxed{\overrightarrow{OP'} = r.\overrightarrow{OP}},$$

sendo $P' = \sigma_{O,r}(P)$.

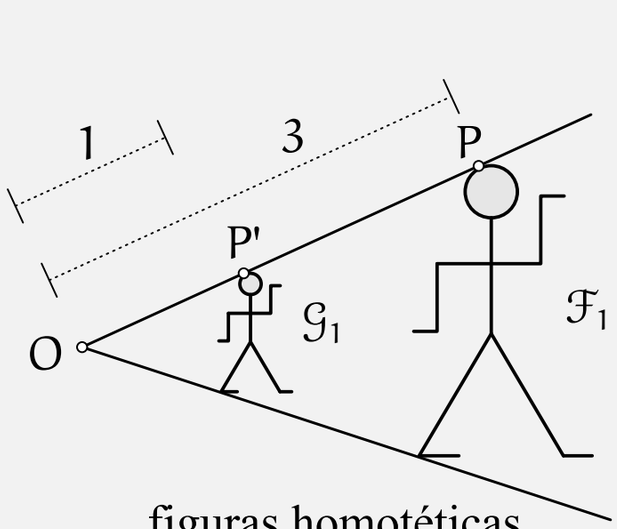
Nessas condições, dizemos que $\sigma_{O,r}$ é uma **homotetia** de **centro** (ou **origem**) O e **razão** r.
Quando restringimos o domínio de $\sigma_{O,r}$ a uma figura $\mathcal{F}$, dizemos que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G} = \sigma_{O,r}(\mathcal{F})$ são **figuras homotéticas**.



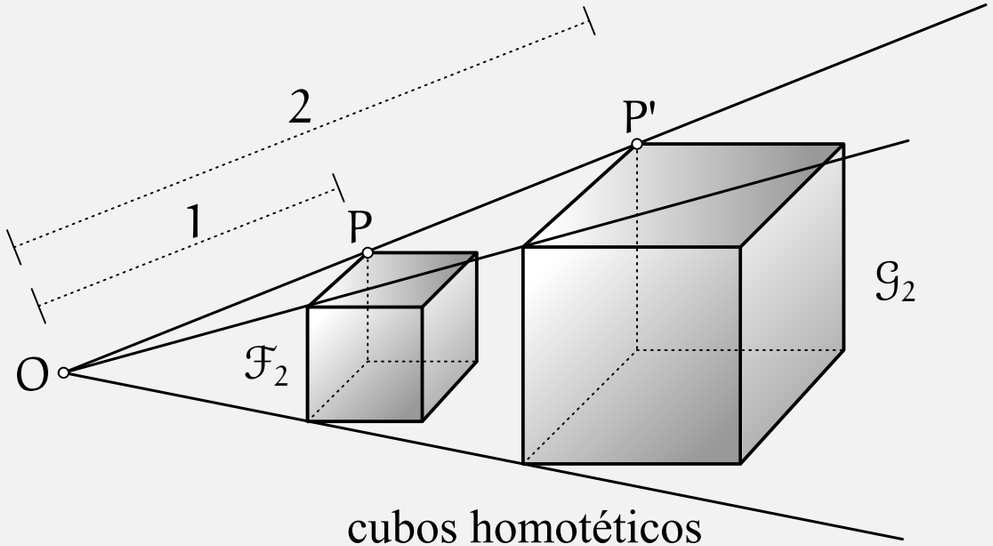
figuras homotéticas



quadrados homotéticos



figuras homotéticas



cubos homotéticos

Quando aplicamos uma homotetia $\sigma_{O,r}$ a uma figura $\mathcal{F}$ com razão entre 0 e 1, estamos produzindo uma imagem reduzida de $\mathcal{F}$; com razão maior do que 1, uma imagem ampliada; com razão negativa entre -1 e 0, uma imagem reduzida refletida em O (girada $180°$ em torno de O no caso da figura $\mathcal{F}$ ser plana) e; com razão negativa menor do que -1, uma imagem ampliada refletida em O.

A importância das homotetias reside no fato de elas serem "fábricas" de figuras semelhantes, conforme a proposição abaixo.

Teorema. Sejam $\sigma_{O,r} : E \to E$ homotetia de centro O e razão r e $\mathcal{F}$ uma figura no espaço E. Então, $\mathcal{G} = \sigma_{O,r}(\mathcal{F})$ e $\mathcal{F}$ são figuras semelhantes e a razão de semelhança de $\mathcal{F}$ para $\mathcal{G}$ é $k = |r|$. (neste caso a bijeção φ da definição de figuras semelhantes é a restrição de $\sigma_{O,r}$ a $\mathcal{F}$).

Um pantógrafo é, na verdade, a materialização de uma homotetia $\sigma_{O,r}$ no plano. Seu ponto fixo é o centro O da homotetia; a ponta do pantógrafo representa um ponto P de seu domínio (figura a ser copiada) e o lápis representa a imagem P' do ponto P pela homotetia.



PROPOSTA

⇒ Construir uma animação no *GeoGebra* que represente um pantógrafo real de razão maior do que 1, ou seja, que permita ampliar uma figura utilizando homotetia de razão maior do que 1.

