ИСТОРИЈСКИ УВОД: РАЗВОЈ ИНТЕГРАЛНОГ РАЧУНА И МЕТОДА ЗАПРЕМИНА

Израчунавање запремина тела насталих ротацијом равних области представља једну од класичних тема у математичкој анализи. Ови поступци данас су познати као **метод дискова** и **метод цилиндричних шкољки**, а њихов развој повезан је са настанком интегралног рачуна у **17. веку**.

Пре формалног развоја интегралног рачуна, математичари су користили различите геометријске идеје како би одредили површине и запремине. Још у античко време, математичари као што је **Arhimed** користили су метод исцрпљивања за приближно одређивање запремина тела.

Прави развој интегралног рачуна догодио се у **17. веку**, када су независно један од другог радили **Isak Njutn** и **Gotfrid Vilhelm Lajbnic**. Они су увели математички апарат који омогућава прецизно рачунање површина и запремина помоћу интеграла.

Метод дискова појавио се као природан наставак геометријских разматрања. У овом методу тело се посматра као састављено од великог броја танких дискова, чије се запремине сабирају. Ова идеја је једноставна за разумевање и зато је метод дискова постао широко прихваћен у настави математике.

Метод цилиндричних шкољки развио се нешто касније као алтернативни приступ. Уместо дискова, тело се представља као скуп танких цилиндричних омотача — шкољки. Иако је овај метод веома ефикасан у одређеним ситуацијама, историјски није био толико распрострањен у раној настави, делимично због сложенијег геометријског тумачења.

Данас, уз употребу динамичких математичких алата као што је **GeoGebra**, могуће је визуелно приказати оба метода. Ово значајно доприноси разумевању концепта интеграла као границе суме, јер ученици могу да виде како се тело постепено формира од све већег броја дискова или шкољки.

Историјски развој ових метода показује да математика није настала одједном, већ постепеним развојем идеја које су усавршаване током векова. Управо зато визуелизација математичких појмова представља важан корак у савременој настави.

ЗАШТО СЕ МЕТОД ЦИЛИНДРИЧНИХ ШКОЉКИ ДУГО НИЈЕ ПОМИЊАО У НАСТАВИ

Иако је метод цилиндричних шкољки развијен још у периоду настанка интегралног рачуна у 17. веку, у настави математике у многим земљама, па и у некадашњој Југославији, овај метод дуго није био широко заступљен.

Један од главних разлога био је **методички приступ настави математике**, који је тежио једноставности и постепеном увођењу нових појмова. Метод дискова је геометријски

интуитивнији, јер се тело посматра као скуп танких кружних плоча. Ученици лакше могу да замисле како се од тих дискова формира обртно тело.

Са друге стране, метод цилиндричних шкољки захтева сложенију просторну представу. Уместо хоризонталних пресека, потребно је замислити танке цилиндричне омотаче који окружују осу ротације. Овај начин размишљања је апстрактнији и захтева више математичке зрелости.

У наставним програмима математике у Југославији током друге половине 20. века нагласак је био на **основним техникама интеграције и њиховој примени**, уз минимално проширивање садржаја који би могли да оптерете ученике. Због тога су у уџбеницима најчешће приказивани:

- метод дискова
- метод прстенова (подлошки)
- израчунавање површина равних области

Метод цилиндричних шкољки се понекад помињао у напреднијим курсевима или на универзитетском нивоу, али је ретко био део редовне наставе у средњим школама.

Још један важан разлог био је **недостатак визуелизационих алата**. У време када су наставници користили искључиво таблу и креду, било је тешко приказати на убедљив начин како се цилиндричне шкољке формирају и како се њихове запремине сабирају. Без динамичког приказа, овај метод је ученицима често остајао апстрактан и тежак за разумевање.

Савремени дигитални алати, као што је **GeoGebra**, омогућавају динамичку визуелизацију и постепено формирање тела ротације. Захваљујући томе, метод цилиндричних шкољки данас постаје приступачнији и разумљивији него у ранијим периодима наставе.

Увођење овог метода у наставу, уз помоћ интерактивних алата, представља корак ка дубљем разумевању интегралног рачуна и повезивању алгебарских формула са геометријском интуицијом.

Запремине обртних тела: Југославија vs. англосаксонски систем

Поређење наставних приступа

Аспект	Југославија (СФРЈ / континентална Европа)	САД / УК (англосаксонски систем)
Основна метода	Дискови и прстенови (подлошке)	Дискови и шкољке (shell method)
Педагошки циљ	Формална тачност, јасно извођење формула	Ефикасност, избор најлакше методе
Приступ проблему	Једна „исправна“ поставка интеграла	Више метода – бира се повољнија
Положај пресека	Увек нормалан на осу ротације	Нормалан или паралелан оси
Метод шкољки	Не помиње се или је имплицитан	Експлицитно уведен и именован
Терминологија	Нема посебног назива	„Cylindrical shells / Shell method“
Типични уџбеници	Курепа, Миличић, Николић	Stewart, Larson, Thomas
Ниво формалности	Висок, теоријски	Средњи, интуитиван
Визуелизација	Минимална	Наглашена (скице, 3D прикази)

Југословенски приступ (дискови)

Избор промењљиве није природан. За $y = x,\ y = x^2$…

Мора се изразити:

$$x = y, x = \sqrt{y}$$

када је x=0 , y=0 ; x=1, y=1

Запремина:

$$V = \pi \int_0^1 \left(\left(\sqrt{y} \right)^2 - y^2 \right) dy$$

што даје:

$$V = \pi \int_0^1 \left(y - y^2 \right) dy$$

Фокус:

➡ „Како да изразим x преко y?“

📖 Англосаксонски приступ (метод шкољки)

Директна поставка.

Нема промене функције.

Запремина:

$$V = 2\pi \int_0^1 x\left(x - x^2\right) dx$$

Фокус:

➡ „Која метода даје једноставнији интеграл?“

Суштинска разлика у филозофији наставе

Југославија

Настава се заснива на:

- математичкој дисциплини
- строгој структури решавања
- мањој слободи у избору метода
- више алгебре
- мање геометријске визуелизације

САД / УК

Настава се заснива на:

- примењеној математици
- хеуристици и избору стратегије
- визуелном размишљању
- употреби више метода за исти циљ

Закључак

Метод цилиндричних шкољки се у англосаксонској настави уводи као равноправна метода јер често поједностављује интеграцију, док се у југословенској традицији предност даје стандардном приступу преко попречних пресека, без наглашавања алтернативних метода.