Nama : Rofif Isyrof Nur Hafidz
Nim : 24030130030
Kelas: Pendidikan Mataematika C

Visualisasi dan Perhitungan Geometri dengan EMT

Euler menyediakan beberapa fungsi untuk melakukan visualisasi dan perhitungan geometri, baik secara numerik maupun analitik (seperti biasanya tentunya, menggunakan Maxima). Fungsi-fungsi untuk visualisasi dan perhitungan geometeri tersebut disimpan di dalam file program "geometry.e", sehingga file tersebut harus dipanggil sebelum menggunakan fungsi-fungsi atau perintah-perintah untuk geometri.

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

Fungsi-fungsi Geometri

Fungsi-fungsi untuk Menggambar Objek Geometri:

```
defaultd:=textheight()*1.5: nilai asli untuk parameter d
setPlotrange(x1,x2,y1,y2): menentukan rentang x dan y pada bidang
```

koordinat

```
setPlotRange(r): pusat bidang koordinat (0,0) dan batas-batas
```

sumbu-x dan y adalah -r sd r

```
plotPoint (P, "P"): menggambar titik P dan diberi label "P"
plotSegment (A,B, "AB", d): menggambar ruas garis AB, diberi label
```

"AB" sejauh d

```
plotLine (g, "g", d): menggambar garis g diberi label "g" sejauh d
plotCircle (c,"c",v,d): Menggambar lingkaran c dan diberi label "c"
plotLabel (label, P, V, d): menuliskan label pada posisi P
```

Fungsi-fungsi Geometri Analitik (numerik maupun simbolik):

```
turn(v, phi): memutar vektor v sejauh phi
turnLeft(v):   memutar vektor v ke kiri
turnRight(v):  memutar vektor v ke kanan
normalize(v): normal vektor v
crossProduct(v, w): hasil kali silang vektorv dan w.
lineThrough(A, B): garis melalui A dan B, hasilnya [a,b,c] sdh.
```

ax+by=c.

```
lineWithDirection(A,v): garis melalui A searah vektor v
getLineDirection(g): vektor arah (gradien) garis g
getNormal(g): vektor normal (tegak lurus) garis g
getPointOnLine(g):  titik pada garis g
perpendicular(A, g):  garis melalui A tegak lurus garis g
parallel (A, g):  garis melalui A sejajar garis g
lineIntersection(g, h):  titik potong garis g dan h
projectToLine(A, g):   proyeksi titik A pada garis g
distance(A, B):  jarak titik A dan B
distanceSquared(A, B):  kuadrat jarak A dan B
quadrance(A, B): kuadrat jarak A dan B
areaTriangle(A, B, C):  luas segitiga ABC
computeAngle(A, B, C):   besar sudut <ABC
angleBisector(A, B, C): garis bagi sudut <ABC
circleWithCenter (A, r): lingkaran dengan pusat A dan jari-jari r
getCircleCenter(c):  pusat lingkaran c
getCircleRadius(c):  jari-jari lingkaran c
circleThrough(A,B,C):  lingkaran melalui A, B, C
middlePerpendicular(A, B): titik tengah AB
lineCircleIntersections(g, c): titik potong garis g dan lingkran c
circleCircleIntersections (c1, c2):  titik potong lingkaran c1 dan
```

c2

```
planeThrough(A, B, C):  bidang melalui titik A, B, C
```

Fungsi-fungsi Khusus Untuk Geometri Simbolik:

```
getLineEquation (g,x,y): persamaan garis g dinyatakan dalam x dan y
getHesseForm (g,x,y,A): bentuk Hesse garis g dinyatakan dalam x dan
```

y dengan titik A pada

```
  sisi positif (kanan/atas) garis
  quad(A,B): kuadrat jarak AB
  spread(a,b,c): Spread segitiga dengan panjang sisi-sisi a,b,c, yakni
```

sin(alpha)^2 dengan

```
  alpha sudut yang menghadap sisi a.
  crosslaw(a,b,c,sa): persamaan 3 quads dan 1 spread pada segitiga
```

dengan panjang sisi a, b, c.

```
  triplespread(sa,sb,sc): persamaan 3 spread sa,sb,sc yang memebntuk
```

suatu segitiga

```
  doublespread(sa): Spread sudut rangkap Spread 2*phi, dengan
```

sa=sin(phi)^2 spread a.

Contoh 1: Luas, Lingkaran Luar, Lingkaran Dalam Segitiga

Untuk menggambar objek-objek geometri, langkah pertama adalah menentukan rentang sumbu-sumbu koordinat. Semua objek geometri akan digambar pada satu bidang koordinat, sampai didefinisikan bidang koordinat yang baru.

```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5); // mendefinisikan bidang koordinat baru
```

Sekarang tetapkan tiga titik dan plotkan.

```
>A=[1,0]; plotPoint(A,"A"); // definisi dan gambar tiga titik
>B=[0,1]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C");
```

Kemudian tiga segmen.

```
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
```

Fungsi geometri mencakup fungsi untuk membuat garis dan lingkaran. Format untuk garis adalah [a,b,c], yang merepresentasikan garis dengan persamaan ax+by=c.

```
>lineThrough(B,C) // garis yang melalui B dan C
```

```
  [-1,  2,  2]
```

Hitung garis tegak lurus yang melalui A pada BC.

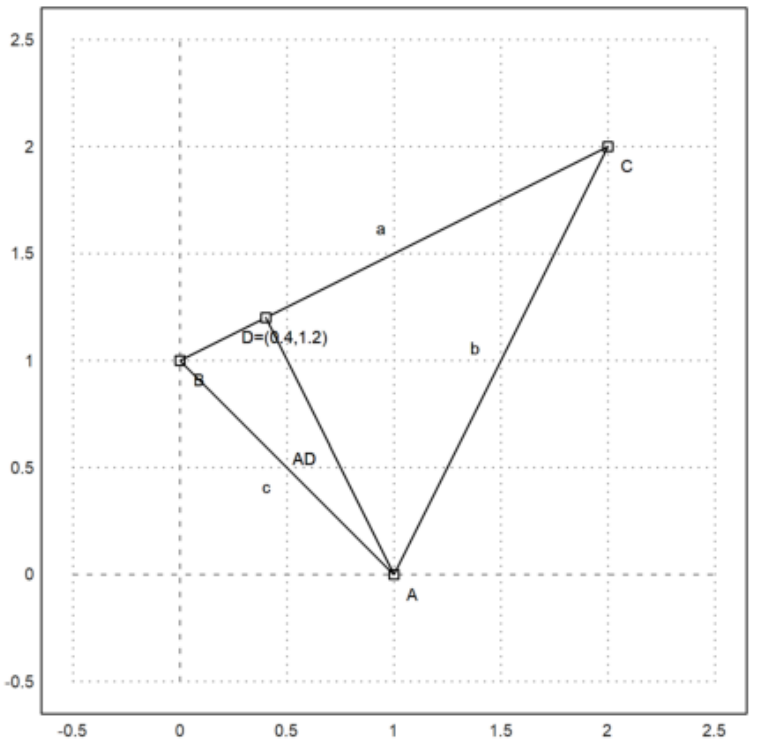
```
>h=perpendicular(A,lineThrough(B,C)); // garis h tegak lurus BC melalui A
```

And its intersection with BC.

```
>D=lineIntersection(h,lineThrough(B,C)); // D adalah titik potong h dan BC
```

Plot that.

```
>plotPoint(D,value=1); // koordinat D ditampilkan
>aspect(1); plotSegment(A,D): // tampilkan semua gambar hasil plot...()
```



Hitung luas ABC:

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AD.BC.$$

```
>norm(A-D)*norm(B-C)/2 // AD=norm(A-D), BC=norm(B-C)
```

```
  1.5
```

Compare with determinant formula.

```
>areaTriangle(A,B,C) // hitung luas segitiga langusng dengan fungsi
```

```
  1.5
```

Cara lain menghitung luas segitigas ABC:

```
>distance(A,D)*distance(B,C)/2
```

```
  1.5
```

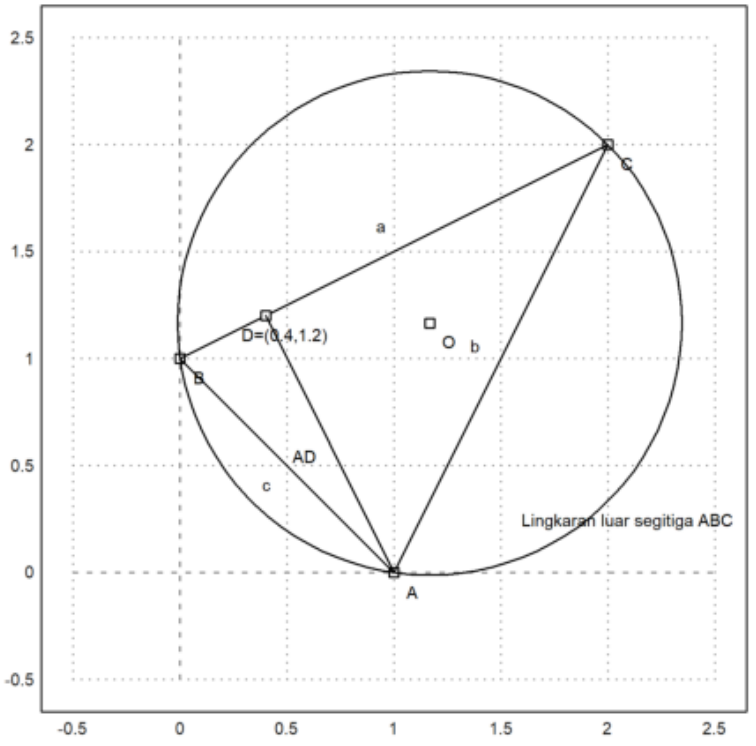
Sudut pada C.

```
>degprint(computeAngle(B,C,A))
```

```
  36°52’11.63’’
```

Sekarang, lingkarilah segitiga tersebut.

```
>c=circleThrough(A,B,C); // lingkaran luar segitiga ABC
>R=getCircleRadius(c); // jari2 lingkaran luar
>O=getCircleCenter(c); // titik pusat lingkaran c
>plotPoint(O,"O"); // gambar titik "O"
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC"):
```



Tampilkan koordinat titik pusat dan jari-jari lingkaran luar.

```
>O, R
```

```
  [1.16667,  1.16667]
  1.17851130198
```

Sekarang akan digambar lingkaran dalam segitiga ABC. Titik pusat lingkaran dalam adalah titik potong garis-garis bagi sudut.

```
>l=angleBisector(A,C,B); // garis bagi <ACB
>g=angleBisector(C,A,B); // garis bagi <CAB
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut
```

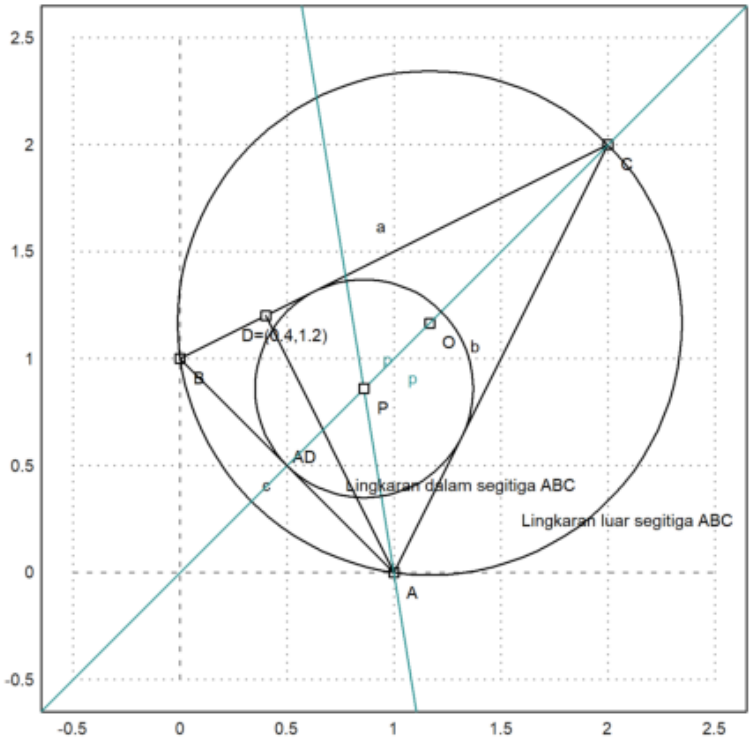
```
  [0.86038,  0.86038]
```

Tambahkan semuanya ke plot.

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1); // gambar kedua garis bagi sudut
>plotPoint(P,"P"); // gambar titik potongnya
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B))) // jari-jari lingkaran dalam
```

```
  0.509653732104
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"): // gambar lingkaran dalam
```


2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
C
a
D=(0.4,1.2)
O
b
B
P
AD
c
Lingkaran dalam segitiga ABC
Lingkaran luar segitiga ABC
A

Latihan

1. Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.
2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut. Merupakan segitiga apakah itu?
3. Hitung luas segitiga tersebut.
4. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.
5. Gambar jari-jari lingkaran dalam.
6. Hitung luas lingkaran luar dan luas lingkaran dalam segitiga ABC. Adakah hubungan antara luas kedua lingkaran tersebut dengan luas segitiga ABC?

-

1.Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.

```
>A=[1,0];
>B=[0,1];
>C=[2,2];
```

panjang sisi

```
>norm(A-B)
```

```
  1.41421356237
```

```
>norm(A-C)
```

```
  2.2360679775
```

```
>norm(C-B)
```

```
  2.2360679775
```

```
>l=angleBisector(A,C,B) // garis bagi <ACB
```

```
  [1,  -1,  0]
```

```
>g=angleBisector(C,A,B) // garis bagi <CAB
```

```
  [2.58114,  0.418861,  2.58114]
```

```
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut
```

```
  [0.86038,  0.86038]
```

```
>r = norm(P - projectToLine(P, lineThrough(A, B))) //Jari-jari lingkaran dalam
```

```
  0.509653732104
```

```
>D = projectToLine(P, lineThrough(B, C))
```

```
  [0.632456,  1.31623]
```

Titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga

```
>E = projectToLine(P, lineThrough(C, A))
```

```
  [1.31623,  0.632456]
```

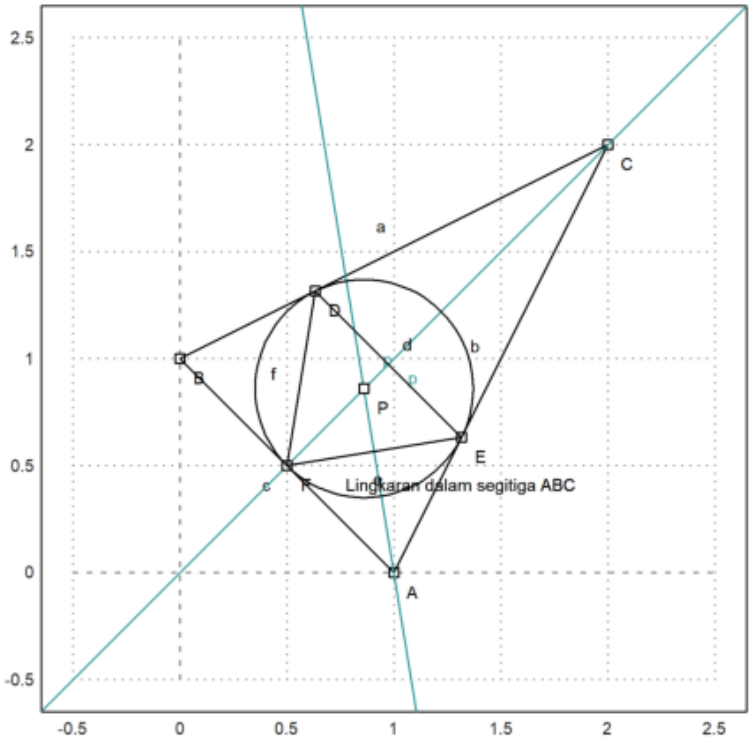
```
>F = projectToLine(P, lineThrough(A, B))
```

```
  [0.5,  0.5]
```

2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut.

```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5); // mendefinisikan bidang koordinat baru
>plotPoint(A,"A");
>plotPoint(B,"B");
>plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC
```

```
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1); // gambar kedua garis bagi sudut
>plotPoint(P,"P"); // gambar titik potongnya
>plotPoint(D, "D") //titik singgung D
>plotPoint(E, "E") //titik singgung E
>plotPoint(F, "F") //titik singgung F
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC");
>plotSegment(D,E,"d"); // d=DE
>plotSegment(E,F,"e"); // e=EF
>plotSegment(F,D,"f"): // f=ED
```



segitiga yang terbentuk segitiga sama kaki

3. Hitung luas segitiga tersebut.

```
>areaTriangle(D,E,F)
```

```
0.324341649025
```

4. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.

```
>q=angleBisector(E,D,F)
```

```
[0.838668,  0.270741,  0.886778]
```

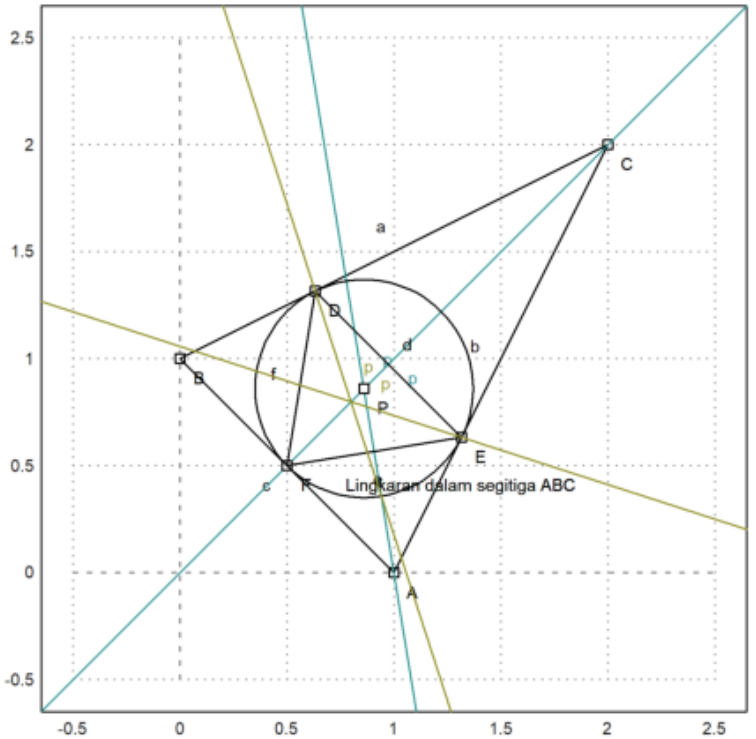
```
>w=angleBisector(D,E,F)
```

```
[0.270741,  0.838668,  0.886778]
```

```
>t=angleBisector(E,F,D)
```

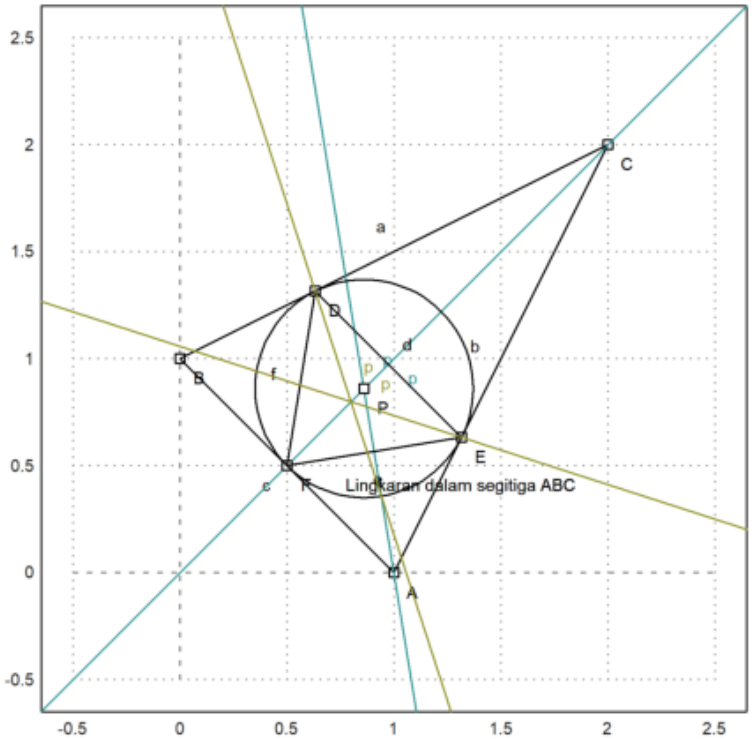
```
[0.683772,  -0.683772,  0]
```

```
>color(6); plotLine(q); plotLine(w); color(t):
```



5. Gambar jari-jari lingkaran dalam.

```
>insimg
```



6. Hitung luas lingkaran luar dan luas lingkaran dalam segitiga ABC.

```
>LuasSegitiga = areaTriangle(A,B,C)
```

```
1.5
```

```
>s = (norm(B-C)+norm(A-C)+norm(A-B))/2
```

```
  2.94317475869
```

```
>r= LuasSegitiga / s; //jari jari lingkaran dalam
>R= (norm(B-C)+norm(A-C)+norm(A-B)) / (4 * LuasSegitiga); //jari jari lingkaran luar
>LuasLingkaranDalam= %pi * r^2
```

```
  0.81601903655
```

```
>LuasLingkaranLuar= %pi * R^2
```

```
  3.02370531784
```

Contoh 2: Geometri Smbolik

Kita dapat menghitung geometri eksak dan simbolik menggunakan Maxima.

File geometri.e menyediakan fungsi-fungsi yang sama (dan lebih banyak lagi) di Maxima. Namun, kita dapat menggunakan komputasi simbolik sekarang.

```
>A &= [1,0]; B &= [0,1]; C &= [2,2]; // menentukan tiga titik A, B, C
```

Fungsi untuk garis dan lingkaran bekerja seperti fungsi Euler, tetapi menyediakan komputasi simbolis.

```
>c &= lineThrough(B,C) // c=BC
```

```
[- 1, 2, 2]
```

Kita bisa mendapatkan persamaan untuk sebuah garis dengan mudah.

```
>$getLineEquation(c,x,y), $solve(%,y) | expand // persamaan garis c
```

$$\left[y=\frac{x}{2}+1\right]$$

$$\left[y=\frac{x}{2}+1\right]$$

```
>$getLineEquation(lineThrough([x1,y1],[x2,y2]),x,y), $solve(%,y) // persamaan garis melalui(x1, y1)
```

$$\left[y=\frac{-\left(x_1-x\right)\ y_2-\left(x-x_2\right)\ y_1}{x_2-x_1}\right]$$

$$\left[y=\frac{-\left(x_1-x\right)\ y_2-\left(x-x_2\right)\ y_1}{x_2-x_1}\right]$$

```
>$getLineEquation(lineThrough(A,[x1,y1]),x,y) // persamaan garis melalui A dan (x1, y1)
```

$$\left(x_1-1\right)\ y-x\ y_1=-y_1$$

```
>h &= perpendicular(A,lineThrough(B,C)) // h melalui A tegak lurus BC
```

```
[2, 1, 2]
```

```
>Q &= lineIntersection(c,h) // Q titik potong garis c=BC dan h
```

$$\left[\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right]$$

```
>$projectToLine(A,lineThrough(B,C)) // proyeksi A pada BC
```

$$\left[\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right]$$

```
>$distance(A,Q) // jarak AQ
```

$$\frac{3}{\sqrt{5}}$$

```
>cc &= circleThrough(A,B,C); $cc // (titik pusat dan jari-jari) lingkaran melalui A, B, C
```

$$\left[\frac{7}{6}, \frac{7}{6}, \frac{5}{3\sqrt{2}}\right]$$

```
>r&=getCircleRadius(cc); $r , $float(r) // tampilkan nilai jari-jari
```

$$1.178511301977579$$

```
>$computeAngle(A,C,B) // nilai <ACB
```

$$\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$$

```
>$solve(getLineEquation(angleBisector(A,C,B),x,y),y)[1] // persamaan garis bagi <ACB
```

$$y = x$$

```
>P &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A)); $P // titik potong 2 garis bagi s
```

$$\left[\frac{\sqrt{2}\sqrt{5}+2}{6}, \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}+2}{6}\right]$$

```
>P() // hasilnya sama dengan perhitungan sebelumnya
```

```
  [0.86038,  0.86038]
```

Garis dan Lingkaran yang Berpotongan

Tentu saja, kita juga bisa memotong garis dengan lingkaran, dan lingkaran dengan lingkaran.

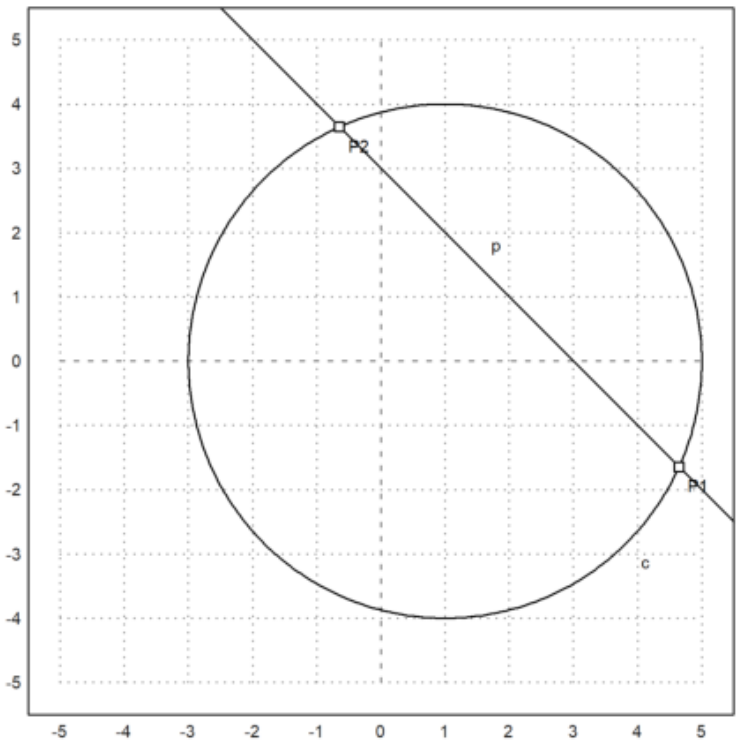
```
>A &:= [1,0]; c=circleWithCenter(A,4);
>B &:= [1,2]; C &:= [2,1]; l=lineThrough(B,C);
>setPlotRange(5); plotCircle(c); plotLine(l);
```

Perpotongan garis dengan lingkaran menghasilkan dua titik dan jumlah titik perpotongan.

```
>{P1,P2,f}=lineCircleIntersections(l,c);
>P1, P2, f
```

```
  [4.64575,  -1.64575]
  [-0.645751,  3.64575]
  2
```

```
>plotPoint(P1); plotPoint(P2):
```



Hal yang sama pada Maxima.

```
>c &= circleWithCenter(A,4) // lingkaran dengan pusat A jari-jari 4
```

[1, 0, 4]

```
>l &= lineThrough(B,C) // garis l melalui B dan C
```

[1, 1, 3]

```
>$lineCircleIntersections(l,c) | radcan, // titik potong lingkaran c dan garis l
```

$$\left[\left[\sqrt{7}+2, 1-\sqrt{7}\right], \left[2-\sqrt{7}, \sqrt{7}+1\right]\right]$$

Akan ditunjukkan bahwa sudut-sudut yang menghadap bsuusr yang sama adalah sama besar.

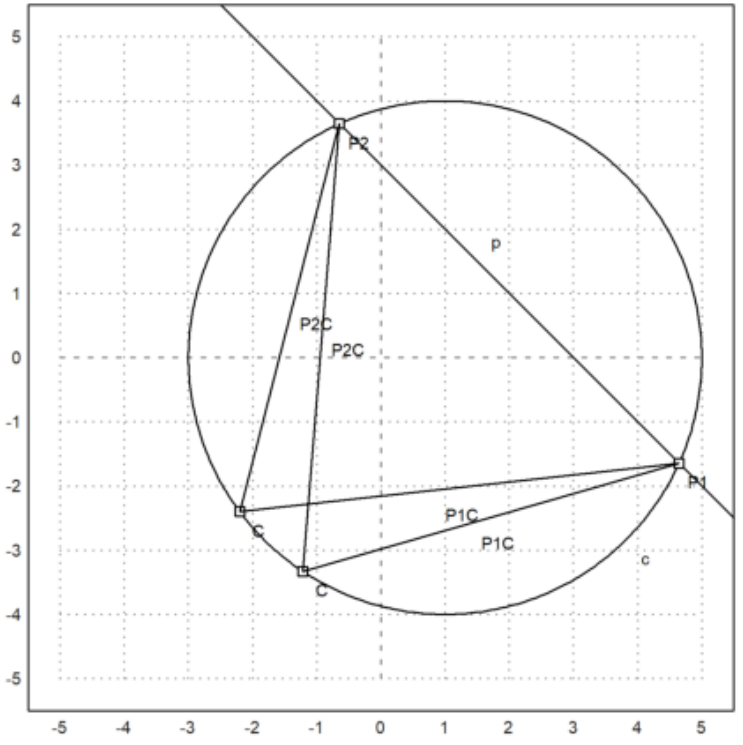
```
>C=A+normalize([-2,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

```
  69°17’42.68’’
```

```
>C=A+normalize([-4,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

```
  69°17’42.68’’
```

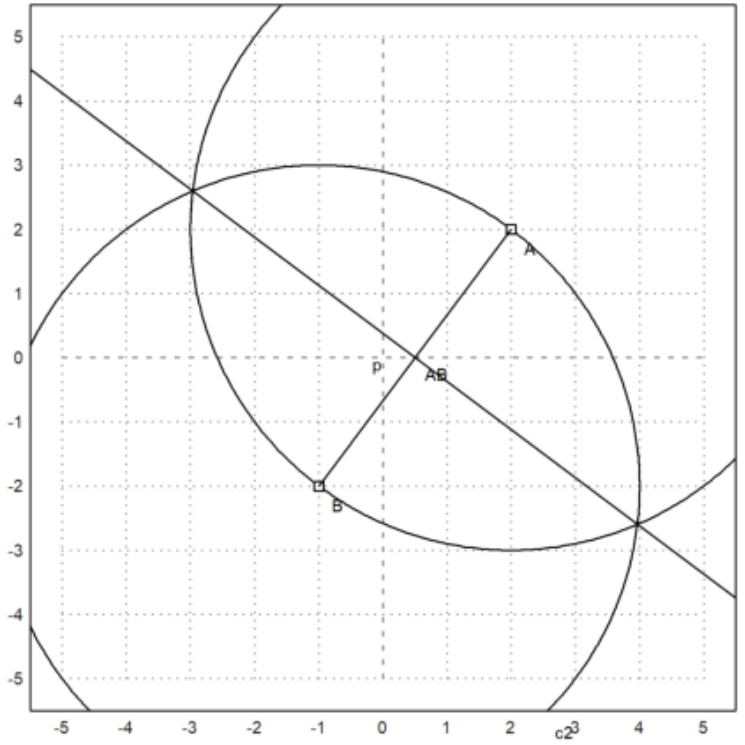
```
>insimg;
```


P2
p
P2C
P2C
P1
P1C
P1C
C
C
c

Berikut adalah langkah-langkah menggambar garis sumbu ruas garis AB:

1. Gambar lingkaran dengan pusat A melalui B.
2. Gambar lingkaran dengan pusat B melalui A.
3. Tarik garis melallui kedua titik potong kedua lingkaran tersebut. Garis ini merupakan garis sumbu (melalui titik tengah dan tegak lurus) AB.

```
>A=[2,2]; B=[-1,-2];
>c1=circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2=circleWithCenter(B,distance(A,B));
>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);
>l=lineThrough(P1,P2);
>setPlotRange(5); plotCircle(c1); plotCircle(c2);
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l):
```




```
Selanjutnya, kami melakukan hal yang sama di Maxima dengan koordinat umum.
```

Selanjutnya, kami melakukan hal yang sama di Maxima dengan koordinat umum.

```
>A &= [a1,a2]; B &= [b1,b2];
>c1 &= circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2 &= circleWithCenter(B,distance(A,B));
>P &= circleCircleIntersections(c1,c2); P1 &= P[1]; P2 &= P[2];
```

Persamaan untuk persimpangan cukup rumit. Tetapi kita dapat menyederhanakannya, jika kita menyelesaikan untuk y.

```
>g &= getLineEquation(lineThrough(P1,P2),x,y);
>$solve(g,y)
```

$$\left[y=\frac{-\left(2\,b_1-2\,a_1\right)\,x+{b_2}^2+{b_1}^2-{a_2}^2-{a_1}^2}{2\,b_2-2\,a_2}\right]$$

Ini memang sama dengan tegak lurus tengah, yang dihitung dengan cara yang sama sekali berbeda.

```
>$solve(getLineEquation(middlePerpendicular(A,B),x,y),y)
```

$$\left[y=\frac{-\left(2\,b_1-2\,a_1\right)\,x+{b_2}^2+{b_1}^2-{a_2}^2-{a_1}^2}{2\,b_2-2\,a_2}\right]$$

```
>h &=getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y);
>$solve(h,y)
```

$$\left[y = \frac{(b_2 - a_2)\ x - a_1\ b_2 + a_2\ b_1}{b_1 - a_1} \right]$$

Perhatikan hasil kali gradien garis g dan h adalah:

$$\frac{-(b_1 - a_1)}{(b_2 - a_2)} \times \frac{(b_2 - a_2)}{(b_1 - a_1)} = -1.$$

Artinya kedua garis tegak lurus.

Contoh 3: Rumus Heron

Rumus Heron menyatakan bahwa luas segitiga dengan panjang sisi-sisi a, b dan c adalah:

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{dengan } s = (a+b+c)/2,$$

atau bisa ditulis dalam bentuk lain:

$$L = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$$

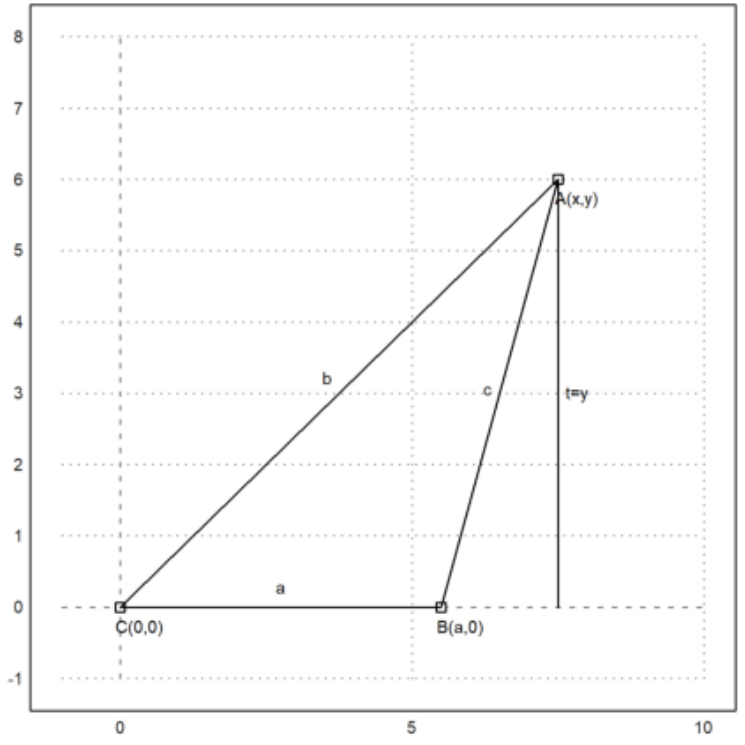
Untuk membuktikan hal ini kita misalkan C(0,0), B(a,0) dan A(x,y), b=AC, c=AB. Luas segitiga ABC adalah

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a \times y.$$

Nilai y didapat dengan menyelesaikan sistem persamaan:

$$x^2 + y^2 = b^2, \quad (x-a)^2 + y^2 = c^2.$$

```
>setPlotRange(-1,10,-1,8); plotPoint([0,0], "C(0,0)"); plotPoint([5.5,0], "B(a,0)");  ...
> plotPoint([7.5,6], "A(x,y)");
>plotSegment([0,0],[5.5,0], "a",25); plotSegment([5.5,0],[7.5,6],"c",15);  ...
>plotSegment([0,0],[7.5,6],"b",25);
>plotSegment([7.5,6],[7.5,0],"t=y",25):
```




```
>&assume(a>0); sol &= solve([x^2+y^2=b^2,(x-a)^2+y^2=c^2],[x,y])
```

```
                2    2    2
             - c  + b  + a
[[x = --------------, y =
```

```
                  2 a
          4      2  2      2  2    4      2  2    4
  sqrt(- c  + 2 b  c  + 2 a  c  - b  + 2 a  b  - a )
- ----------------------------------------------],
                       2 a
        2    2    2
     - c  + b  + a
[x = --------------, y =
          2 a
        4      2  2      2  2    4      2  2    4
sqrt(- c  + 2 b  c  + 2 a  c  - b  + 2 a  b  - a )
----------------------------------------------]]
                      2 a
```

Ekstrak solusi y.

```
>ysol &= y with sol[2][2]; $'y=sqrt(factor(ysol^2))
```

$$y=\frac{\sqrt{(-c+b+a)\,(c-b+a)\,(c+b-a)\,(c+b+a)}}{2\,a}$$

Kami mendapatkan rumus Heron.

```
>function H(a,b,c) &= sqrt(factor((ysol*a/2)^2)); $'H(a,b,c)=H(a,b,c)
```

$$H\left(a,b,c\right)=\frac{\sqrt{\left(-c+b+a\right)\,\left(c-b+a\right)\,\left(c+b-a\right)\,\left(c+b+a\right)}}{4}$$

```
>$'Luas=H(2,5,6) // luas segitiga dengan panjang sisi-sisi 2, 5, 6
```

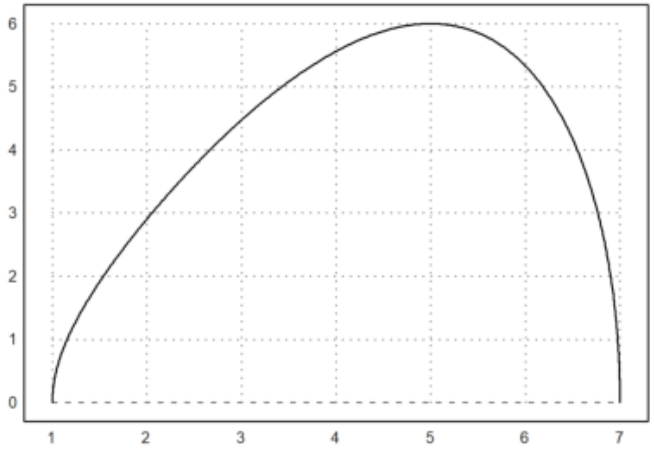
$$Luas=\frac{3\sqrt{39}}{4}$$

Tentu saja, setiap segitiga persegi panjang adalah kasus yang terkenal.

```
>H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5
```

Dan juga jelas, bahwa ini adalah segitiga dengan luas maksimal dan kedua sisi 3 dan 4.

```
>aspect (1.5); plot2d(&H(3,4,x),1,7): // Kurva luas segitiga sengan panjang sisi 3, 4, x (1<= x <=7)
```



Kasus umum juga bisa digunakan.

```
>$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c)
```

$$\left[c=-\sqrt{b^2+a^2},c=\sqrt{b^2+a^2},c=0\right]$$

Sekarang mari kita cari himpunan semua titik di mana b+c=d untuk suatu konstanta d. Sudah diketahui bahwa ini adalah sebuah elips.

```
>s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1
```

$$\left[x=\frac{(d-c)^2-c^2+a^2}{2\,a},y=\frac{\sqrt{-(d-c)^4+2\,c^2\,(d-c)^2+2\,a^2\,(d-c)^2-c^4+2\,a^2\,c^2-a^4}}{2\,a}\right]$$

Dan membuat fungsi-fungsi ini.

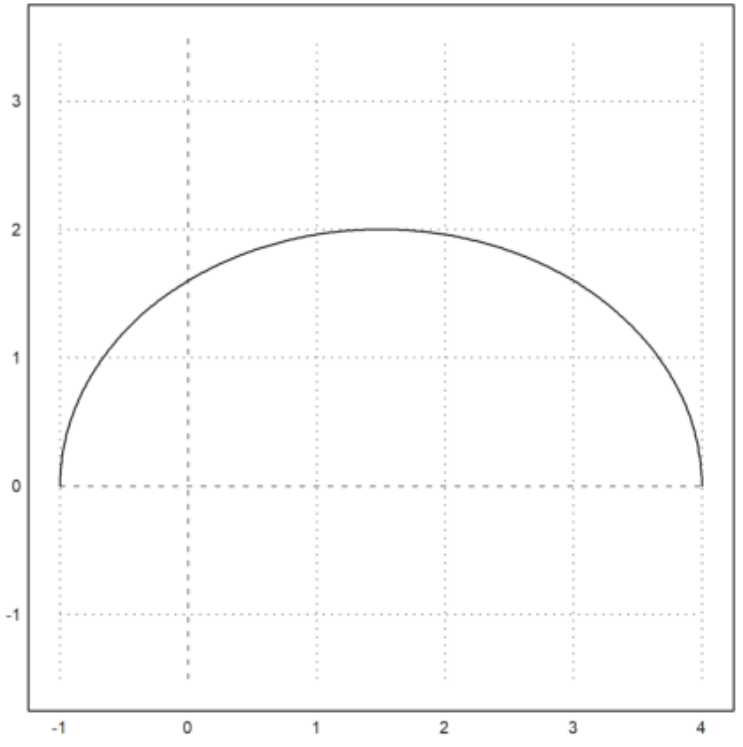
```
>function fx(a,c,d) &= rhs(s1[1]); $fx(a,c,d), function fy(a,c,d) &= rhs(s1[2]); $fy(a,c,d)
```

$$\frac{\sqrt{-(d-c)^4+2\,c^2\,(d-c)^2+2\,a^2\,(d-c)^2-c^4+2\,a^2\,c^2-a^4}}{2\,a}$$

$$\frac{\sqrt{-(d-c)^4+2\,c^2\,(d-c)^2+2\,a^2\,(d-c)^2-c^4+2\,a^2\,c^2-a^4}}{2\,a}$$

Sekarang kita dapat menggambar himpunan tersebut. Sisi b bervariasi dari 1 hingga 4. Sudah diketahui bahwa kita mendapatkan sebuah elips.

```
>aspect(1); plot2d(&fx(3,x,5),&fy(3,x,5),xmin=1,xmax=4,square=1):
```



Kita dapat memeriksa persamaan umum untuk elips ini, yaitu

$$\frac{(x-x_m)^2}{u^2}+\frac{(y-y_m)}{v^2}=1,$$

di mana (xm, ym) adalah pusat, dan u dan v adalah setengah sumbu.

```
>$ratsimp((fx(a,c,d)-a/2)^2/u^2+fy(a,c,d)^2/v^2 with [u=d/2,v=sqrt(d^2-a^2)/2])
```

1

Kita melihat bahwa tinggi dan luas segitiga adalah maksimal untuk x=0. Dengan demikian, luas segitiga dengan a+b+c=d adalah maksimal, jika segitiga tersebut sama sisi. Kita ingin membuktikannya secara analitis.

```
>eqns &= [diff(H(a,b,d-(a+b))^2,a)=0,diff(H(a,b,d-(a+b))^2,b)=0]; $eqns
```

$$\left[\frac{d\,(d-2\,a)\,(d-2\,b)}{8}-\frac{(-d+2\,b+2\,a)\,d\,(d-2\,b)}{8}=0,\frac{d\,(d-2\,a)\,(d-2\,b)}{8}-\frac{(-d+2\,b+2\,a)\,d\,(d-2\,a)}{8}=0\right]$$

Kita mendapatkan beberapa minima, yang termasuk dalam segitiga dengan satu sisi 0, dan solusi a = b = c = d / 3.

```
>$solve(eqns,[a,b])
```

$$\left[\left[a=\frac{d}{3},b=\frac{d}{3}\right],\left[a=0,b=\frac{d}{2}\right],\left[a=\frac{d}{2},b=0\right],\left[a=\frac{d}{2},b=\frac{d}{2}\right]\right]$$

Ada juga metode Lagrange, yang memaksimalkan H(a,b,c)^2 sehubungan dengan a+b+d=d.

```
>&solve([diff(H(a,b,c)^2,a)=la,diff(H(a,b,c)^2,b)=la, ...
>   diff(H(a,b,c)^2,c)=la,a+b+c=d],[a,b,c,la])
```

```
                    d      d
        [[a = 0, b = -, c = -, la = 0],
                    2      2
    d             d                d      d
[a = -, b = 0, c = -, la = 0], [a = -, b = -, c = 0, la = 0],
    2             2                2      2
                              3
    d      d      d       d
[a = -, b = -, c = -, la = ---]]
    3      3      3       108
```

Kita bisa membuat plot situasi

Pertama-tama, tetapkan titik-titik di Maxima.

```
>A &= at([x,y],sol[2]); $A
```

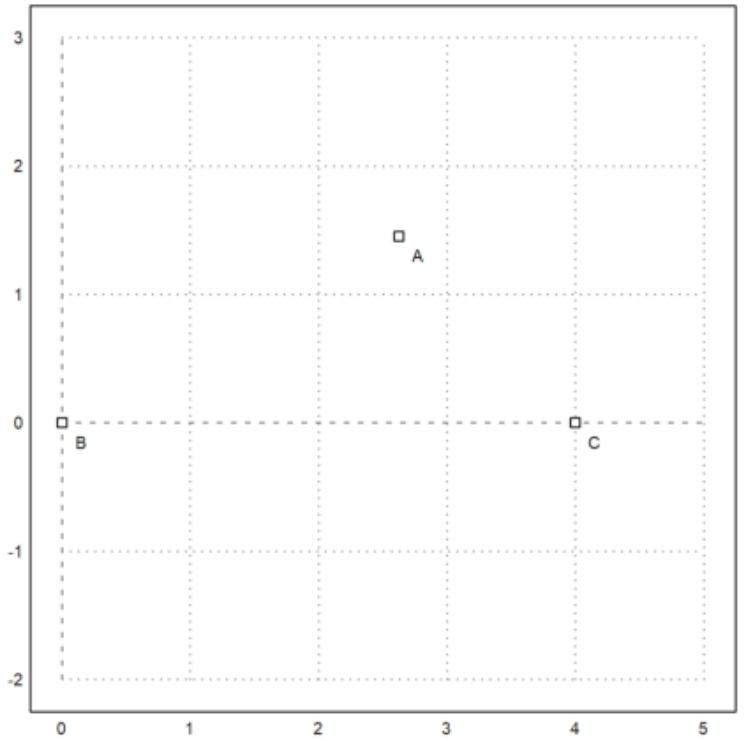
$$\left[\frac{-c^2+b^2+a^2}{2\,a},\frac{\sqrt{-c^4+2\,b^2\,c^2+2\,a^2\,c^2-b^4+2\,a^2\,b^2-a^4}}{2\,a}\right]$$

```
>B &= [0,0]; $B, C &= [a,0]; $C
```

$$[a,0]$$

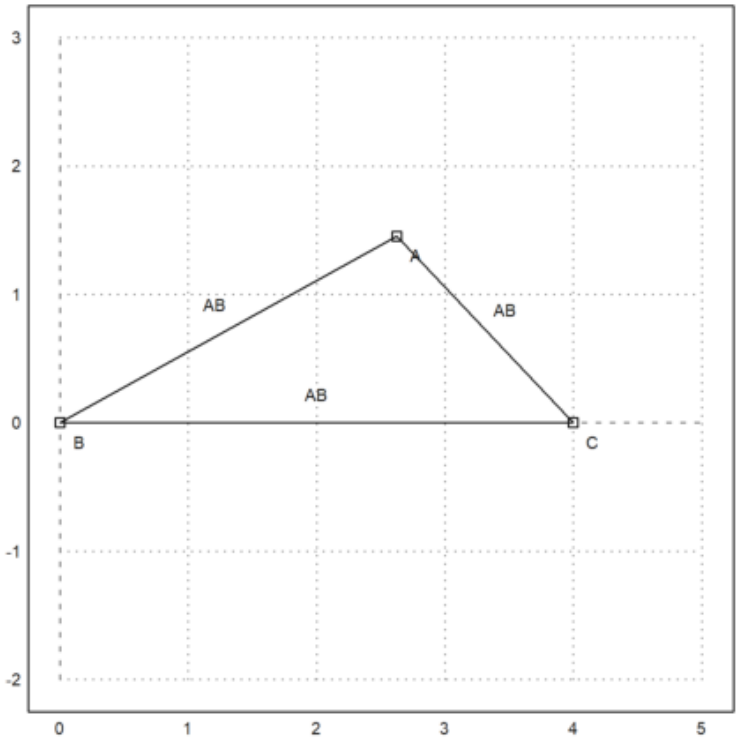
Kemudian, tetapkan kisaran plot, dan plot titik-titiknya.

```
>setPlotRange(0,5,-2,3); ...
>a=4; b=3; c=2; ...
>plotPoint(mxmeval("B"),"B"); plotPoint(mxmeval("C"),"C"); ...
>plotPoint(mxmeval("A"),"A"):
```



Plot segmen-segmen tersebut.

```
>plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); ...
>plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("C")); ...
>plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("A")):
```



Hitung garis tegak lurus tengah dalam Maxima.

```
>h &= middlePerpendicular(A,B); g &= middlePerpendicular(B,C);
```

Dan bagian tengah lingkar.

```
>U &= lineIntersection(h,g);
```

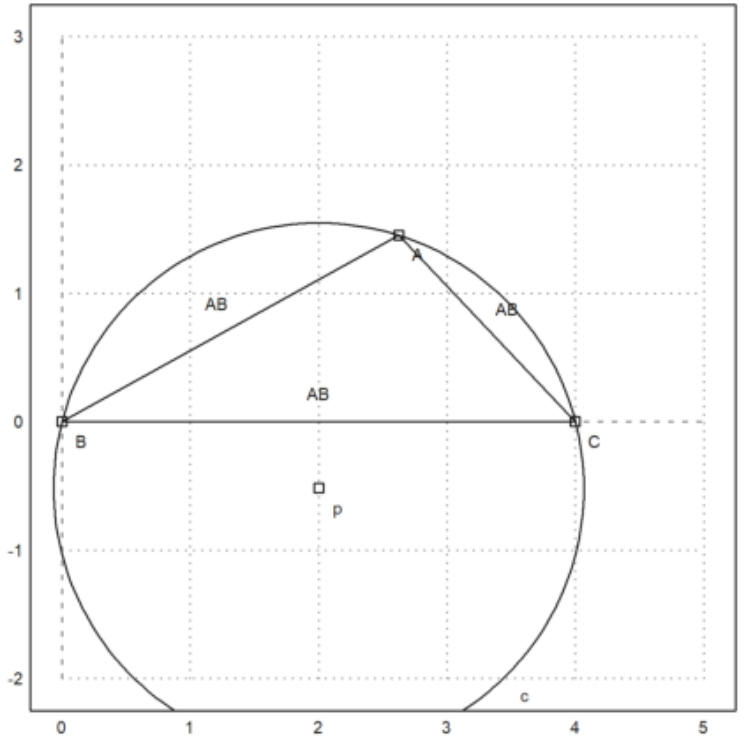
Kita mendapatkan rumus untuk jari-jari lingkaran.

```
>&assume(a>0,b>0,c>0); $distance(U,B) | radcan
```

$$\frac{i\,a\,b\,c}{\sqrt{c-b-a}\,\sqrt{c-b+a}\,\sqrt{c+b-a}\,\sqrt{c+b+a}}$$

Mari kita tambahkan ini ke dalam plot.

```
>plotPoint(U()); ...
>plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"),mxmeval("distance(U,C)"))):
```



Dengan menggunakan geometri, kami memperoleh rumus sederhana

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = 2r$$

untuk jari-jari. Kita bisa mengeceknya dengan Maxima, apakah ini benar dengan Maxima. Maxima akan memfaktorkan ini hanya jika kita mengkuadratkannya.

```
>$c^2/sin(computeAngle(A,B,C))^2  | factor
```

$$-\frac{4\,a^2\,b^2\,c^2}{(c-b-a)\,(c-b+a)\,(c+b-a)\,(c+b+a)}$$

Contoh 4: Garis Euler dan Parabola

Garis Euler adalah garis yang ditentukan dari segitiga apa pun yang tidak sama sisi. Garis ini merupakan garis tengah segitiga, dan melewati beberapa titik penting yang ditentukan dari segitiga, termasuk ortosentrum, circumcentrum, centroid, titik Exeter, dan pusat lingkaran sembilan titik segitiga.

Sebagai demonstrasi, kami menghitung dan memplot garis Euler dalam sebuah segitiga.

Pertama, kita mendefinisikan sudut-sudut segitiga dalam Euler. Kami menggunakan definisi, yang terlihat dalam ekspresi simbolis.

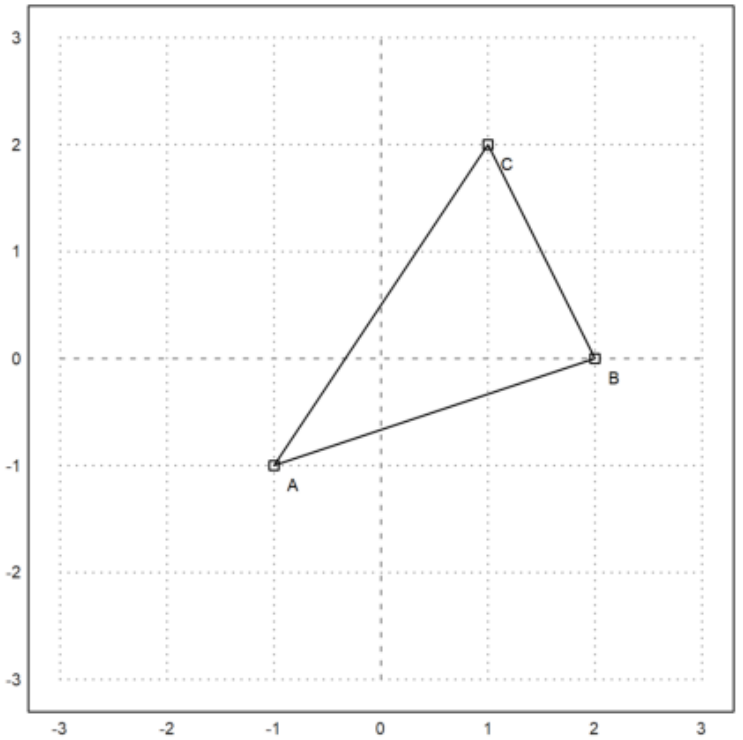
```
>A::=[-1,-1]; B::=[2,0]; C::=[1,2];
```

Untuk memplot objek geometris, kita menyiapkan area plot, dan menambahkan titik-titiknya. Semua plot objek geometris ditambahkan ke plot saat ini.

```
>setPlotRange(3); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
```

Kita juga bisa menambahkan sisi-sisi segitiga.

```
>plotSegment(A,B,""); plotSegment(B,C,""); plotSegment(C,A,""):
```



Berikut ini adalah luas area segitiga, dengan menggunakan rumus determinan. Tentu saja, kita harus mengambil nilai absolut dari hasil ini.

```
>$areaTriangle(A,B,C)
```

$$-\frac{7}{2}$$

Kita dapat menghitung koefisien dari sisi c.

```
>c &= lineThrough(A,B)
```

```
[- 1, 3, - 2]
```

Dan juga mendapatkan formula untuk baris ini.

```
>$getLineEquation(c,x,y)
```

$$3\,y - x = -2$$

Untuk bentuk Hesse, kita perlu menentukan sebuah titik, sehingga titik tersebut berada di sisi positif dari bentuk Hesse. Memasukkan titik tersebut akan menghasilkan jarak positif ke garis.

```
>$getHesseForm(c,x,y,C), $at(%,[x=C[1],y=C[2]])
```

$$\frac{7}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{7}{\sqrt{10}}$$

Sekarang kita menghitung keliling ABC.

```
>LL &= circleThrough(A,B,C); $getCircleEquation(LL,x,y)
```

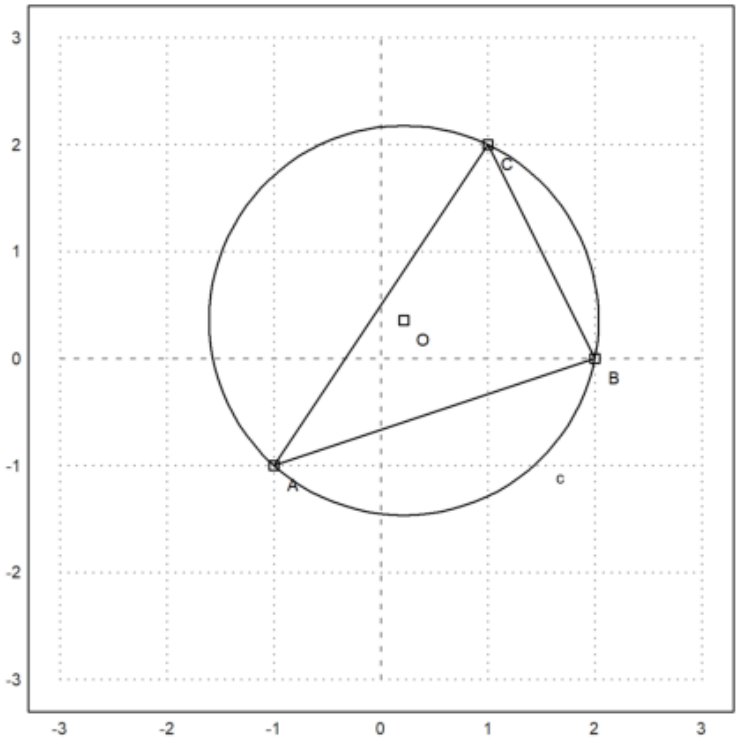
$$\left(y-\frac{5}{14}\right)^2+\left(x-\frac{3}{14}\right)^2=\frac{325}{98}$$

```
>O &= getCircleCenter(LL); $O
```

$$\left[\frac{3}{14},\frac{5}{14}\right]$$

Plot lingkaran dan pusatnya. Cu dan U adalah simbolik. Kami mengevaluasi ekspresi ini untuk Euler.

```
>plotCircle(LL()); plotPoint(O(),"O"):
```



Kita dapat menghitung perpotongan ketinggian di ABC (pusat ortosentrum) secara numerik dengan perintah berikut ini.

```
>H &= lineIntersection(perpendicular(A,lineThrough(C,B)),...
>  perpendicular(B,lineThrough(A,C))); $H
```

$$\left[\frac{11}{7},\frac{2}{7}\right]$$

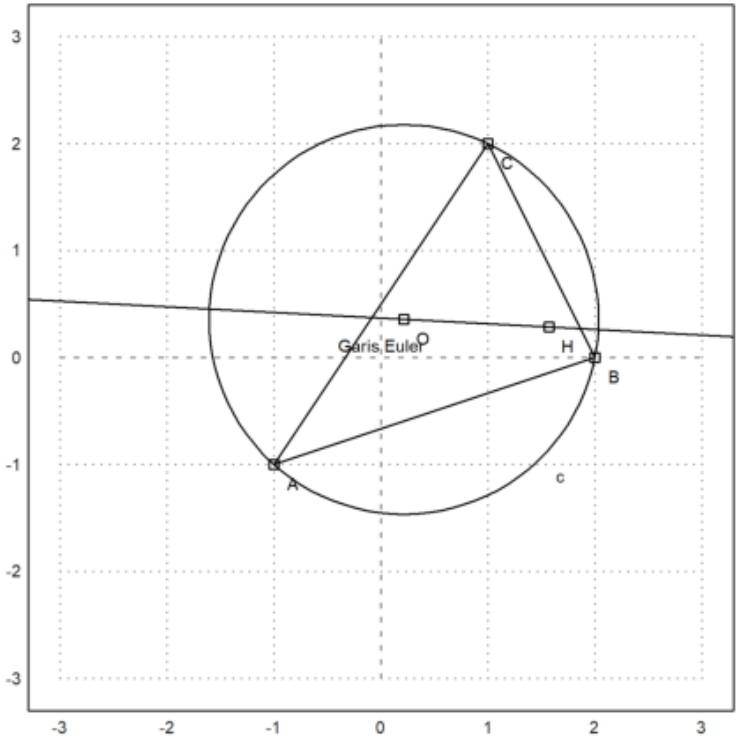
Sekarang kita dapat menghitung garis Euler dari segitiga tersebut.

```
>el &= lineThrough(H,O); $getLineEquation(el,x,y)
```

$$-\frac{19\,y}{14}-\frac{x}{14}=-\frac{1}{2}$$

Tambahkan ke plot kami.

```
>plotPoint(H(),"H"); plotLine(el(),"Garis Euler"):
```

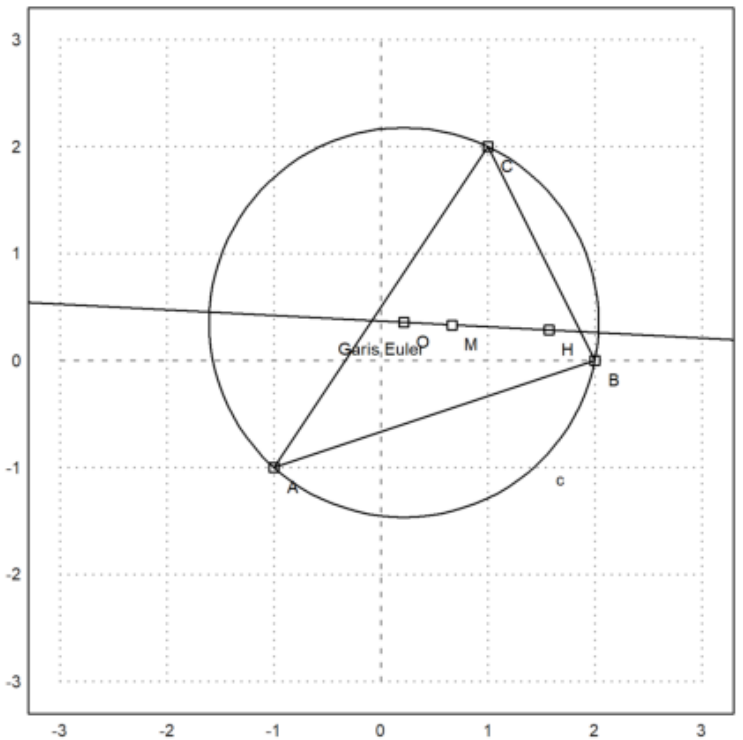


Pusat gravitasi harus berada pada garis ini.

```
>M &= (A+B+C)/3; $getLineEquation(el,x,y) with [x=M[1],y=M[2]]
```

$$-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

```
>plotPoint(M(),"M"): // titik berat
```



Teori mengatakan bahwa MH = 2*MO. Kita perlu menyederhanakan dengan radcan untuk mencapai hal ini.

```
>$distance(M,H)/distance(M,O)|radcan
```

$$2$$

Fungsi-fungsi ini juga mencakup fungsi untuk sudut.

```
>$computeAngle(A,C,B), degprint(%())
```

$$\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{13}}\right)$$

```
60°15’18.43’’
```

Persamaan untuk bagian tengah lingkaran tidak terlalu bagus.

```
>Q &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A))|radcan; $Q
```

$$\left[\frac{\left(2^{\frac{3}{2}}+1\right)\ \sqrt{5}\sqrt{13}-15\sqrt{2}+3}{14},\frac{\left(\sqrt{2}-3\right)\ \sqrt{5}\sqrt{13}+5\,2^{\frac{3}{2}}+5}{14}\right]$$

Mari kita hitung juga ekspresi untuk jari-jari lingkaran yang tertulis.

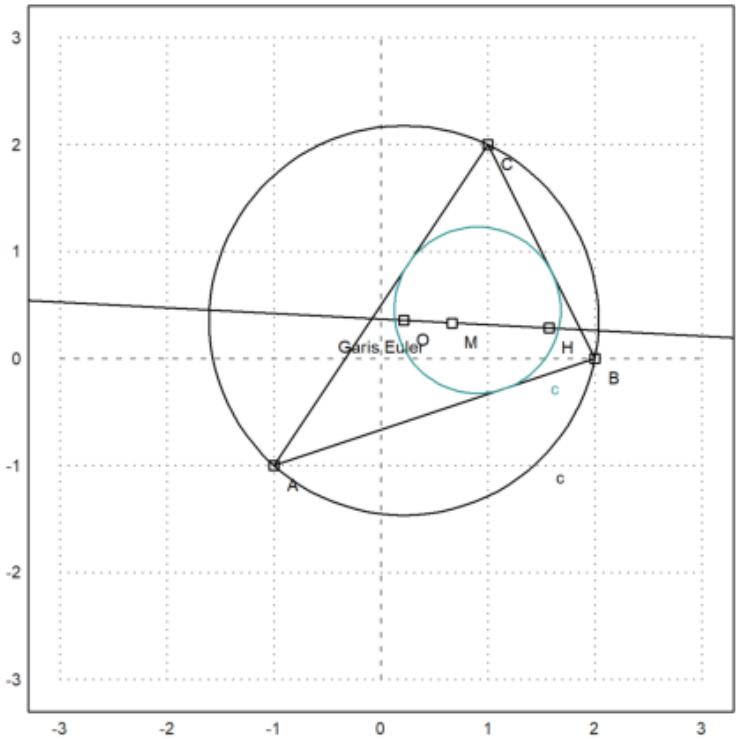
```
>r &= distance(Q,projectToLine(Q,lineThrough(A,B)))|ratsimp; $r
```

$$\frac{\sqrt{\left(-41\sqrt{2}-31\right)\ \sqrt{5}\sqrt{13}+115\sqrt{2}+614}}{7\sqrt{2}}$$

```
>LD &=  circleWithCenter(Q,r); // Lingkaran dalam
```

Mari kita tambahkan ini ke dalam plot.

```
>color(5); plotCircle(LD()):
```



Parabola

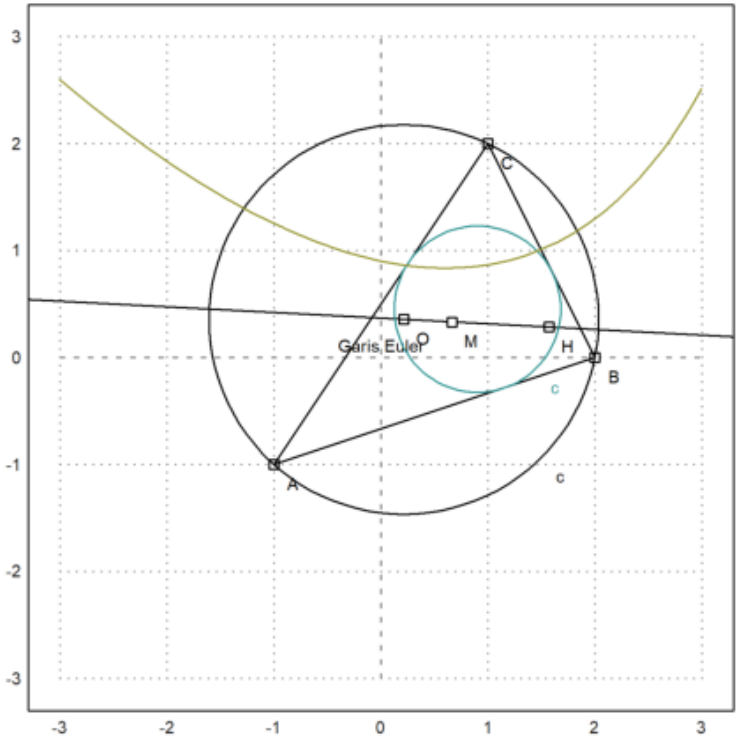
Selanjutnya akan dicari persamaan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama ke titik C dan ke garis AB.

```
>p &= getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

$$\frac{3\,y-x+2}{\sqrt{10}}-\sqrt{(2-y)^2+(1-x)^2}=0$$

Persamaan tersebut dapat digambar menjadi satu dengan gambar sebelumnya.

```
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=6):
```



Ini seharusnya merupakan suatu fungsi, tetapi solver default Maxima hanya bisa menemukan solusinya jika kita mengkuadratkan persamaannya. Akibatnya, kita mendapatkan solusi palsu.

```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y)
```

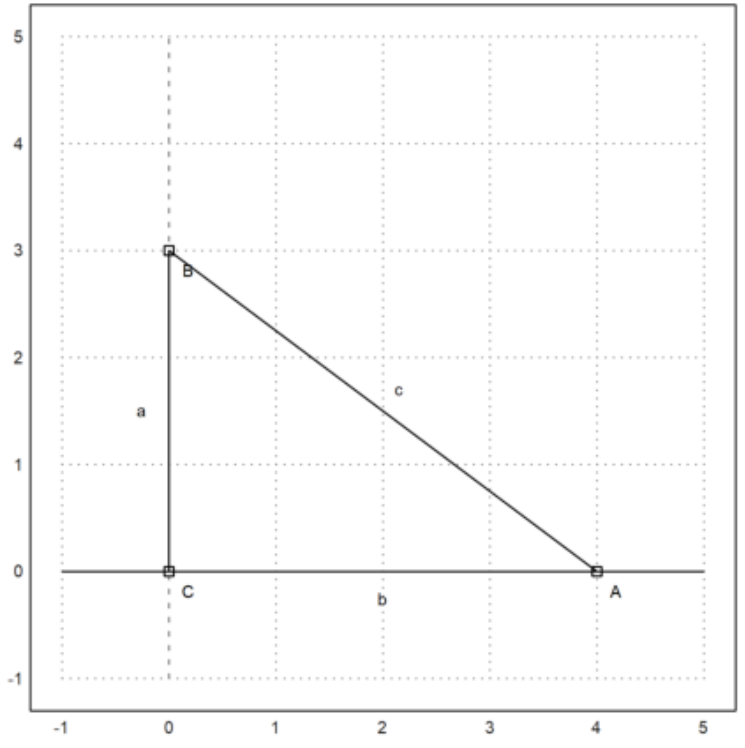
```
[y = - 3 x - sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) + 26,
                      y = - 3 x + sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) + 26]
```

Solusi pertama adalah

$$y = -3\,x - \sqrt{70}\,\sqrt{9 - 2\,x} + 26$$

Menambahkan solusi pertama ke dalam plot menunjukkan, bahwa itu memang jalur yang kita cari. Teori mengatakan bahwa itu adalah parabola yang diputar.

```
>plot2d(&rhs(akar[1]),add=1):
```




```
>function g(x) &= rhs(akar[1]); $'g(x)= g(x)// fungsi yang mendefinisikan kurva di atas
```

$$g\left(x\right)=-3\,x-\sqrt{70}\,\sqrt{9-2\,x}+26$$

```
>T &=[-1, g(-1)]; // ambil sebarang titik pada kurva tersebut
>dTC &= distance(T,C); $fullratsimp(dTC), $float(%) // jarak T ke C
```

$$2.135605779339061$$

```
>U &= projectToLine(T,lineThrough(A,B)); $U // proyeksi T pada garis AB
```

$$\left[\frac{80-3\sqrt{11}\sqrt{70}}{10},\frac{20-\sqrt{11}\sqrt{70}}{10}\right]$$

```
>dU2AB &= distance(T,U); $fullratsimp(dU2AB), $float(%) // jatak T ke AB
```

$$2.135605779339061$$

Ternyata jarak T ke C sama dengan jarak T ke AB. Coba Anda pilih titik T yang lain dan ulangi perhitungan-perhitungan di atas untuk menunjukkan bahwa hasilnya juga sama.

Contoh 5: Trigonometri Rasional

Ini terinspirasi dari sebuah ceramah N.J. Wildberger. Dalam bukunya "Proporsi Ilahi", Wildberger mengusulkan untuk mengganti gagasan klasik tentang jarak dan sudut dengan kuadransi dan penyebaran. Dengan menggunakan ini, memang memungkinkan untuk menghindari fungsi trigonometri dalam banyak contoh, dan tetap "rasional".

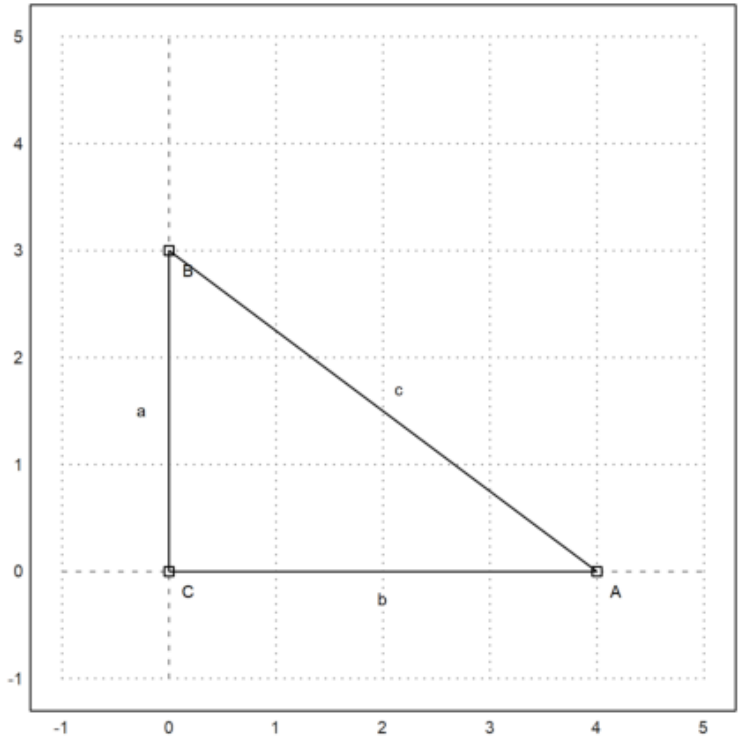
Berikut ini, saya akan memperkenalkan konsep-konsep tersebut, dan memecahkan beberapa masalah. Saya menggunakan komputasi simbolik Maxima di sini, yang menyembunyikan keuntungan utama dari trigonometri rasional yaitu komputasi dapat dilakukan dengan kertas dan pensil saja. Anda dipersilakan untuk memeriksa hasilnya tanpa komputer.

Intinya adalah bahwa komputasi rasional simbolik sering kali memberikan hasil yang sederhana. Sebaliknya, trigonometri klasik menghasilkan hasil trigonometri yang rumit, yang dievaluasi dengan pendekatan numerik saja.

```
>load geometry;
```

Untuk pengenalan pertama, kita menggunakan segitiga persegi panjang dengan proporsi Mesir yang terkenal 3, 4, dan 5. Perintah berikut ini adalah perintah Euler untuk memplot geometri bidang yang terdapat pada file Euler "geometry.e".

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
>setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg(30);
```



Tentu saja,

$$\sin(w_a) = \frac{a}{c},$$

di mana wa adalah sudut di A. Cara biasa untuk menghitung sudut ini, adalah dengan mengambil kebalikan dari fungsi sinus. Hasilnya adalah sudut yang tidak dapat dicerna, yang hanya dapat dicetak kira-kira.

```
>wa := arcsin(3/5); degprint(wa)
```

```
  36°52’11.63’’
```

Trigonometri rasional mencoba menghindari hal ini.

Gagasan pertama trigonometri rasional adalah kuadrat, yang menggantikan jarak. Sebenarnya, ini hanyalah jarak yang dikuadratkan. Berikut ini, a, b, dan c menunjukkan kuadran sisi-sisinya.

Teorema Pythogoras menjadi a + b = c.

```
>a &= 3^2; b &= 4^2; c &= 5^2; &a+b=c
```

$$25 = 25$$

Gagasan kedua dari trigonometri rasional adalah penyebaran. Penyebaran mengukur bukaan di antara garis-garis. Ini adalah 0, jika garis-garisnya sejajar, dan 1, jika garis-garisnya persegi panjang. Ini adalah kuadrat dari sinus sudut antara dua garis.

Penyebaran garis AB dan AC pada gambar di atas didefinisikan sebagai

$$s_a = \sin(\alpha)^2 = \frac{a}{c},$$

di mana a dan c adalah kuadran dari segitiga persegi panjang dengan satu sudut di A.

```
>sa &= a/c; $sa
```

$$\frac{9}{25}$$

Tentu saja, hal ini lebih mudah dihitung daripada sudut. Tetapi Anda kehilangan sifat bahwa sudut dapat ditambahkan dengan mudah.

Tentu saja, kita bisa mengonversi nilai perkiraan kita untuk sudut wa ke sprad, dan mencetaknya sebagai pecahan.

```
>fracprint(sin(wa)^2)
```

```
Variable or function wa not found.
Error in:
fracprint(sin(wa)^2) ...
                ^
```

Hukum kosinus trgonometri klasik diterjemahkan ke dalam "hukum silang" berikut ini.

$$(c+b-a)^2 = 4bc\,(1-s_a)$$

Di sini a, b, dan c adalah kuadran dari sisi-sisi segitiga, dan sa adalah penyebaran di sudut A. Sisi a, seperti biasa, berlawanan dengan sudut A.

Hukum-hukum ini diimplementasikan dalam file geometri.e yang kita masukkan ke dalam Euler.

```
>$crosslaw(aa,bb,cc,saa)
```

$$(cc + bb - aa)^2 = 4\, bb\, cc\, (1 - saa)$$

In our case we get

```
>$crosslaw(a,b,c,sa)
```

$$1024 = 1024$$

Mari kita gunakan crosslaw ini untuk mencari sebaran di A. Untuk melakukannya, kita buat crosslaw untuk kuadran a, b, dan c, dan selesaikan untuk sebaran sa yang tidak diketahui.

Anda bisa melakukan ini dengan tangan dengan mudah, tapi saya menggunakan Maxima. Tentu saja, kita mendapatkan hasil yang sudah kita dapatkan.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x)
```

$$\left[x = \frac{9}{25}\right]$$

$$\left[x=\frac{9}{25}\right]$$

Kita sudah mengetahui hal ini. Definisi penyebaran adalah kasus khusus dari crosslaw.

Kita juga dapat menyelesaikannya untuk a, b, c secara umum. Hasilnya adalah sebuah rumus yang menghitung penyebaran sudut sebuah segitiga dengan kuadran ketiga sisinya.

```
>$solve(crosslaw(aa,bb,cc,x),x)
```

$$\left[x=\frac{-cc^2-(-2\,bb-2\,aa)\;cc-bb^2+2\,aa\,bb-aa^2}{4\,bb\,cc}\right]$$

Kita dapat membuat sebuah fungsi dari hasil tersebut. Fungsi seperti itu sudah didefinisikan dalam file geometry.e dari Euler.

```
>$spread(a,b,c)
```

$$\frac{9}{25}$$

Sebagai contoh, kita dapat menggunakannya untuk menghitung sudut segitiga dengan sisi

$$a,\quad a,\quad \frac{4a}{7}$$

Hasilnya adalah rasional, yang tidak mudah didapat jika kita menggunakan trigonometri klasik.

```
>$spread(a,a,4*a/7)
```

$$\frac{6}{7}$$

Ini adalah sudut dalam derajat.

```
>degprint(arcsin(sqrt(6/7)))
```

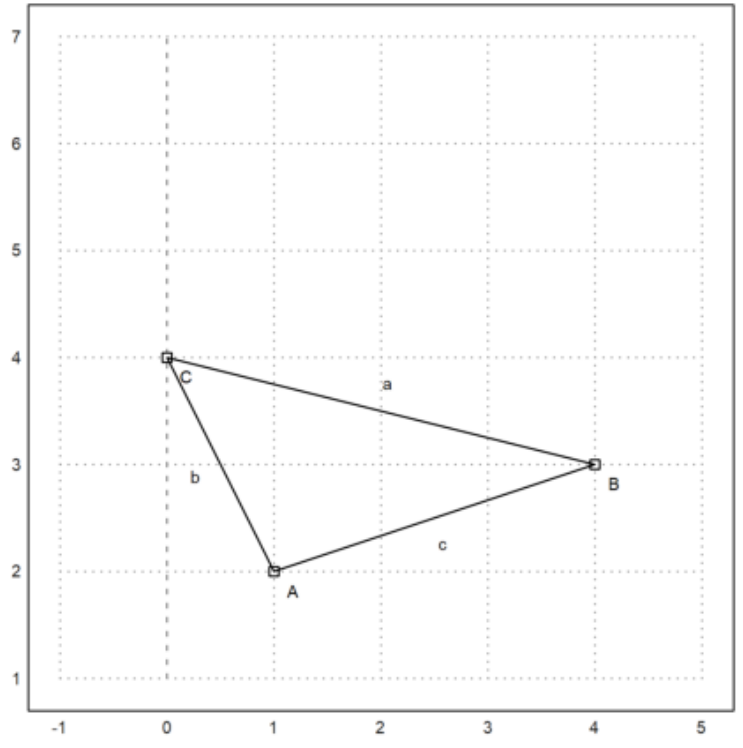
```
  67°47'32.44''
```

Contoh Lain

Sekarang, mari kita coba contoh yang lebih lanjut.

Kita tentukan tiga sudut segitiga sebagai berikut.

```
>A&:=[1,2]; B&:=[4,3]; C&:=[0,4]; ...
>setPlotRange(-1,5,1,7); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg;
```



Dengan menggunakan Pythogoras, mudah untuk menghitung jarak antara dua titik. Pertama-tama saya menggunakan jarak fungsi dari file Euler untuk geometri. Jarak fungsi menggunakan geometri klasik.

```
>$distance(A,B)
```

$$\sqrt{10}$$

Euler juga memiliki fungsi untuk kuadranan antara dua titik.

Pada contoh berikut, karena c+b bukan a, maka segitiga tersebut tidak berbentuk persegi panjang.

```
>c &= quad(A,B); $c, b &= quad(A,C); $b, a &= quad(B,C); $a,
```


Pertama, mari kita menghitung sudut tradisional. Fungsi computeAngle menggunakan metode yang biasa berdasarkan hasil kali titik dari dua vektor. Hasilnya adalah beberapa perkiraan titik mengambang.

$$A =< 1, 2 > \quad B =< 4, 3 >, \quad C =< 0, 4 >$$

$$\mathbf{a} = C - B =< -4, 1 >, \quad \mathbf{c} = A - B =< -3, -1 >, \quad \beta = \angle ABC$$

$$\mathbf{a}.\mathbf{c} = |\mathbf{a}|.|\mathbf{c}| \cos\beta$$

$$\cos\angle ABC = \cos\beta = \frac{\mathbf{a}.\mathbf{c}}{|\mathbf{a}|.|\mathbf{c}|} = \frac{12-1}{\sqrt{17}\sqrt{10}} = \frac{11}{\sqrt{17}\sqrt{10}}$$

```
>wb &= computeAngle(A,B,C); $wb, $(wb/pi*180)()
```

$$\arccos\left(\frac{11}{\sqrt{10}\sqrt{17}}\right)$$

```
32.4711922908
```

Dengan menggunakan pensil dan kertas, kita dapat melakukan hal yang sama dengan hukum silang. Kita masukkan kuadran a, b, dan c ke dalam hukum silang dan selesaikan untuk x.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x), //(b+c-a)^=4b.c(1-x)
```

$$\left[x=\frac{49}{50}\right]$$



Itulah yang dilakukan oleh fungsi spread yang didefinisikan dalam ”geometry.e”.

```
>sb &= spread(b,a,c); $sb
```

$$\frac{49}{170}$$

Maxima mendapatkan hasil yang sama dengan menggunakan trigonometri biasa, jika kita memaksakannya. Ia menyelesaikan suku sin(arccos(...)) menjadi hasil pecahan. Sebagian besar siswa tidak dapat melakukan ini.

```
>$sin(computeAngle(A,B,C))^2
```

$$\frac{49}{170}$$

Setelah kita memiliki penyebaran di B, kita dapat menghitung tinggi ha di sisi a. Ingatlah bahwa

$$s_b = \frac{h_a}{c}$$

menurut definisi.

```
>ha &= c*sb; $ha
```

$$\frac{49}{17}$$

Gambar berikut ini dibuat dengan program geometri C.a.R., yang dapat menggambar kuadran dan penyebaran.

image: (20) Rational_Geometry_CaR.png

Menurut definisi, panjang ha adalah akar kuadrat dari kuadrannya.

```
>$sqrt(ha)
```

$$\frac{7}{\sqrt{17}}$$

Sekarang kita dapat menghitung luas segitiga. Jangan lupa, bahwa kita berurusan dengan kuadran!

```
>$sqrt(ha)*sqrt(a)/2
```

$$\frac{7}{2}$$

Rumus penentu yang biasa menghasilkan hasil yang sama.

```
>$areaTriangle(B,A,C)
```

$$\frac{7}{2}$$

The Heron Formula

Sekarang, mari kita selesaikan masalah ini secara umum!

```
>&remvalue(a,b,c,sb,ha);
```

Pertama-tama kita menghitung penyebaran di B untuk segitiga dengan sisi a, b, dan c. Kemudian kita menghitung luas kuadrat (”quadrea”?), memfaktorkannya dengan Maxima, dan kita mendapatkan rumus Heron yang terkenal.

Memang, hal ini sulit dilakukan dengan pensil dan kertas.

```
>$spread(b^2,c^2,a^2), $factor(%*c^2*a^2/4)
```

$$\frac{(-c+b+a)\,(c-b+a)\,(c+b-a)\,(c+b+a)}{16}$$

$$\frac{(-c+b+a)\,(c-b+a)\,(c+b-a)\,(c+b+a)}{16}$$

Aturan Tiga Sudut Triangular

kekurangan dari sudut-sudut segitiga adalah bahwa mereka tidak lagi hanya dijumlahkan seperti sudut-sudut biasa.

namun, ketiga sudut segitiga mematuhi aturan "tiga sudut" berikut ini.

```
>&remvalue(sa,sb,sc); $triplespread(sa,sb,sc)
```

$$(sc+sb+sa)^2=2\left(sc^2+sb^2+sa^2\right)+4\,sa\,sb\,sc$$

Aturan ini berlaku untuk tiga sudut apa pun yang jumlahnya 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

Karena selisih sudut

$$\alpha,\pi-\alpha$$

sama, aturan selisih tiga sudut juga berlaku, jika

$$\alpha+\beta=\gamma$$

Karena selisih sudut negatif sama, aturan selisih tiga sudut juga berlaku, jika

$$\alpha+\beta+\gamma=0$$

misalnya, kita dapat menghitung selisih sudut 60°. Nilainya 3/4. Persamaan tersebut memiliki solusi kedua, di mana semua selisih sudut sama dengan 0.

```
>$solve(triplespread(x,x,x),x)
```

$$\left[x=\frac{3}{4},x=0\right]$$

Jarak antara dua sudut yang jumlahnya 90° jelas sama dengan 1. Jika dua sudut jumlahnya 90°, jarak antara keduanya memenuhi persamaan jarak tiga sudut dengan a, b, dan 1. Dengan perhitungan berikut, kita mendapatkan a + b = 1.

```
>$triplespread(x,y,1), $solve(%,x)
```

$$[x=1-y]$$

Karena selisih 180°-t sama dengan selisih t, rumus selisih tiga sudut juga berlaku, jika salah satu sudut merupakan penjumlahan atau pengurangan dari dua sudut lainnya.
Jadi, kita dapat menemukan selisih sudut yang digandakan. Perhatikan bahwa ada dua solusi lagi. Kita jadikan ini sebagai fungsi.

```
>$solve(triplespread(a,a,x),x), function doublespread(a) &= factor(rhs(%[1]))
```

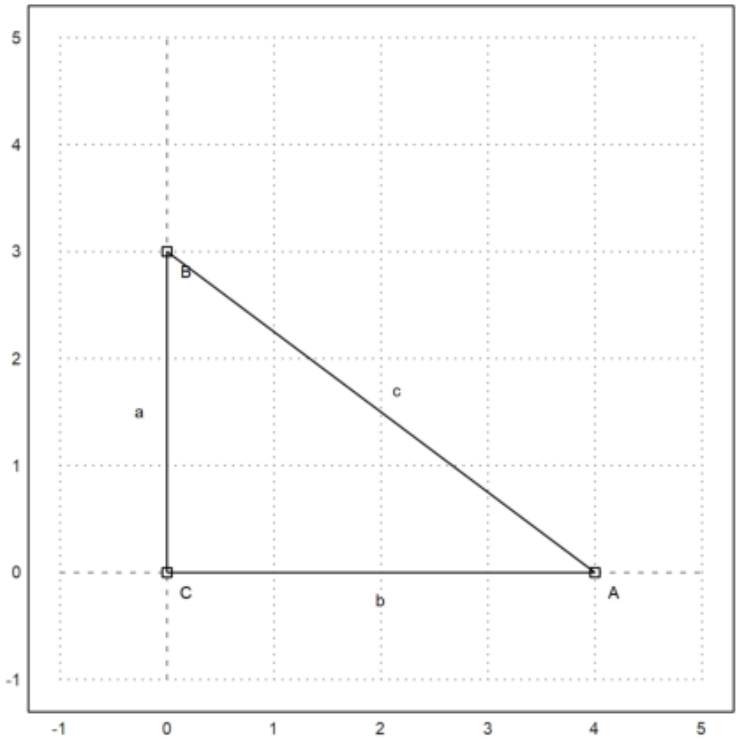
$$[x = 4\,a - 4\,a^2, x = 0]$$

```
- 4 (a - 1) a
```

Pembagi Sudut

Inilah situasinya, kita sudah tahu.

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
>setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg;
```



Mari kita hitung panjang pembagi sudut di titik A. Namun, kita ingin menyelesaikan persamaan tersebut untuk nilai a, b, dan c yang umum.

```
>&remvalue(a,b,c);
```

Jadi, kita terlebih dahulu menghitung selisih sudut yang dibagi dua di titik A menggunakan rumus selisih tiga sudut.
Masalah dengan rumus ini muncul lagi. Rumus ini memiliki dua solusi. Kita harus memilih solusi yang benar. Solusi lainnya merujuk pada sudut yang dibagi dua 180°-wa.

```
>$triplespread(x,x,a/(a+b)), $solve(%,x), sa2 &= rhs(%[1]); $sa2
```

$$\frac{-\sqrt{b^2+a\,b}+b+a}{2\,b+2\,a}$$

$$\left[x=\frac{-\sqrt{b^2+a\,b}+b+a}{2\,b+2\,a},x=\frac{\sqrt{b^2+a\,b}+b+a}{2\,b+2\,a}\right]$$

$$\frac{-\sqrt{b^2+a\,b}+b+a}{2\,b+2\,a}$$

Mari kita periksa persegi panjang Mesir.

```
>$sa2 with [a=3^2,b=4^2]
```

$$\frac{1}{10}$$

Kita dapat mencetak sudut dalam bentuk Euler, setelah mengubah sudut tersebut ke dalam radian.

```
>wa2 := arcsin(sqrt(1/10)); degprint(wa2)
```

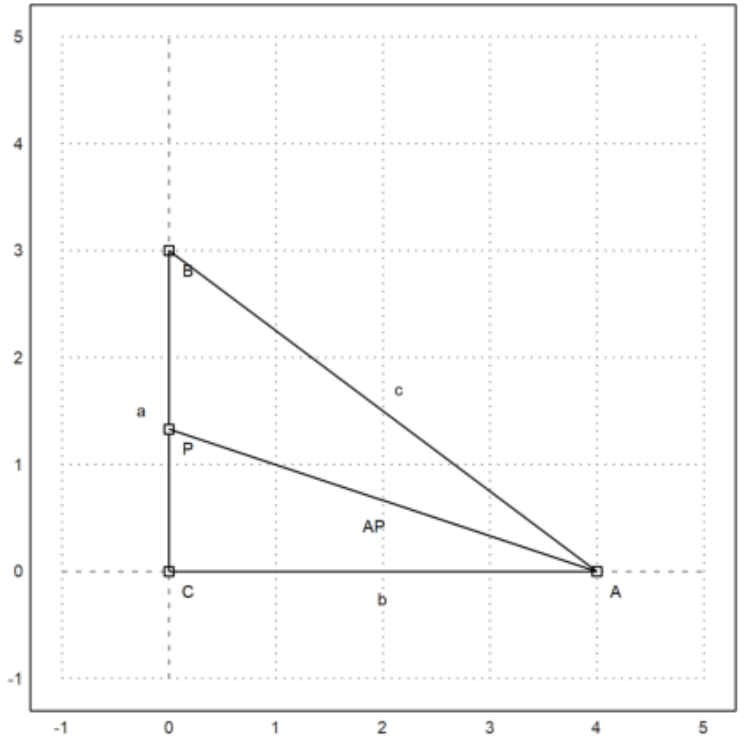
```
  18°26’5.82’’
```

Titik P adalah titik potong antara garis pembagi sudut dengan sumbu y.

```
>P := [0,tan(wa2)*4]
```

```
  [0,  1.33333]
```

```
>plotPoint(P,"P"); plotSegment(A,P):
```



Mari kita periksa sudut-sudut dalam contoh spesifik kita.

```
>computeAngle(C,A,P), computeAngle(P,A,B)
```

```
0.321750554397
0.321750554397
```

Sekarang kita menghitung panjang bisektor AP.

ita menggunakan teorema sinus pada segitiga APC. Teorema ini menyatakan bahwa

$$\frac{BC}{\sin(w_a)} = \frac{AC}{\sin(w_b)} = \frac{AB}{\sin(w_c)}$$

berlaku pada segitiga mana pun. Kuadratkan, hal ini diterjemahkan ke dalam yang disebut "hukum penyebaran"

$$\frac{a}{s_a} = \frac{b}{s_b} = \frac{c}{s_b}$$

di mana a, b, c mewakili kuadran.

Karena spread CPA adalah 1-sa^2, kita mendapatkan dari itu bisa/1 = b/(1-sa^2) dan dapat menghitung bisa (kuadran pembagi sudut).
*** Translated with www.DeepL.com/Translator (free version) ***

```
>&factor(ratsimp(b/(1-sa2))); bisa &= %; $bisa
```

$$\frac{2\,b\,(b+a)}{\sqrt{b\,(b+a)}+b+a}$$

Mari kita periksa rumus ini untuk nilai-nilai Mesir kita.

```
>sqrt(mxmeval("at(bisa,[a=3^2,b=4^2])")), distance(A,P)
```

```
  4.21637021356
  4.21637021356
```

We can also compute P using the spread formula.

```
>py&=factor(ratsimp(sa2*bisa)); $py
```

$$-\frac{b\left(\sqrt{b\ (b+a)}-b-a\right)}{\sqrt{b\ (b+a)}+b+a}$$

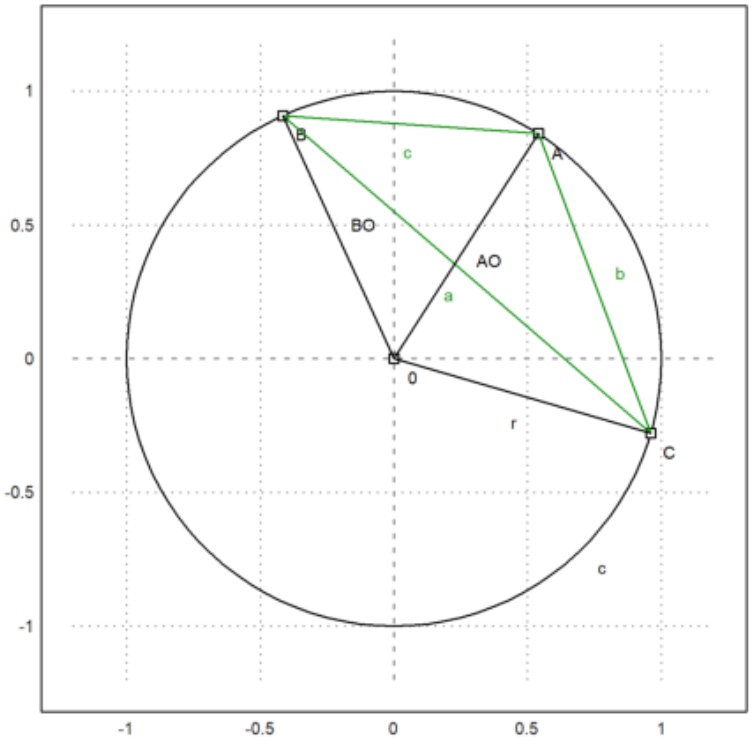
Nilai tersebut sama dengan yang kita dapatkan menggunakan rumus trigonometri.

```
>sqrt(mxmeval("at(py,[a=3^2,b=4^2])"))
```

```
  1.33333333333
```

Perhatikan situasi berikut.

```
>setPlotRange(1.2); ...
>color(1); plotCircle(circleWithCenter([0,0],1)); ...
>A:=[cos(1),sin(1)]; B:=[cos(2),sin(2)]; C:=[cos(6),sin(6)]; ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>color(3); plotSegment(A,B,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>color(1); O:=[0,0];  plotPoint(O,"0"); ...
>plotSegment(A,O); plotSegment(B,O); plotSegment(C,O,"r"); ...
>insimg;
```



Kita dapat menggunakan Maxima untuk menyelesaikan rumus penyebaran tiga sudut di pusat O untuk r. Dengan demikian, kita mendapatkan rumus untuk jari-jari kuadrat lingkaran periklim dalam hal kuadran sisi-sisinya.
Kali ini, Maxima menghasilkan beberapa nol kompleks, yang kita abaikan.

```
>&remvalue(a,b,c,r); // hapus nilai-nilai sebelumnya untuk perhitungan baru
>rabc &= rhs(solve(triplespread(spread(b,r,r),spread(a,r,r),spread(c,r,r)),r)[4]); $rabc
```

$$-\frac{a\,b\,c}{c^2-2\,b\,c+a\,(-2\,c-2\,b)+b^2+a^2}$$

Kita dapat menjadikannya sebagai fungsi Euler.

```
>function periradius(a,b,c) &= rabc;
```

Mari kita periksa hasilnya untuk titik-titik A, B, dan C.

```
>a:=quadrance(B,C); b:=quadrance(A,C); c:=quadrance(A,B);
```

Jari-jari memang 1.

```
>periradius(a,b,c)
```

Faktanya, selisih CBA hanya bergantung pada b dan c. Ini adalah teorema sudut tali busur.

```
>$spread(b,a,c)*rabc | ratsimp
```

$$\frac{b}{4}$$

Sebenarnya, selisihnya adalah b/(4r), dan kita lihat bahwa sudut tali busur b adalah setengah dari sudut pusat.

```
>$doublespread(b/(4*r))-spread(b,r,r) | ratsimp
```

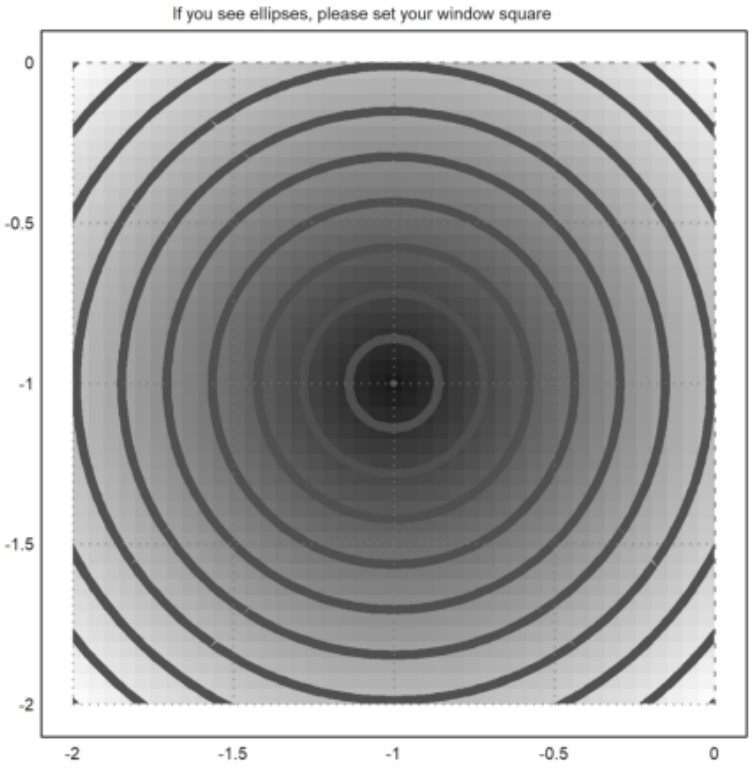
$$0$$

Contoh 6: Jarak Minimal pada Bidang

Catatan pendahuluan

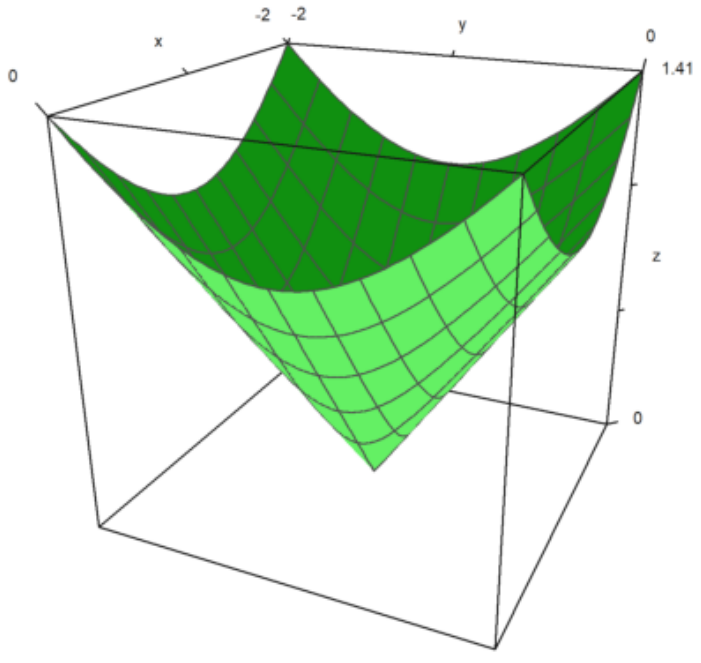
Fungsi yang, untuk suatu titik M di bidang, menetapkan jarak AM antara titik tetap A dan M, memiliki garis tingkat yang cukup sederhana: lingkaran berpusat di A.

```
>&remvalue();
>A=[-1,-1];
>function d1(x,y):=sqrt((x-A[1])^2+(y-A[2])^2)
>fcontour("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0,hue=1, ...
>title="If you see ellipses, please set your window square"):
```



dan grafiknya juga cukup sederhana: bagian atas kerucut:

```
>plot3d("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0):
```

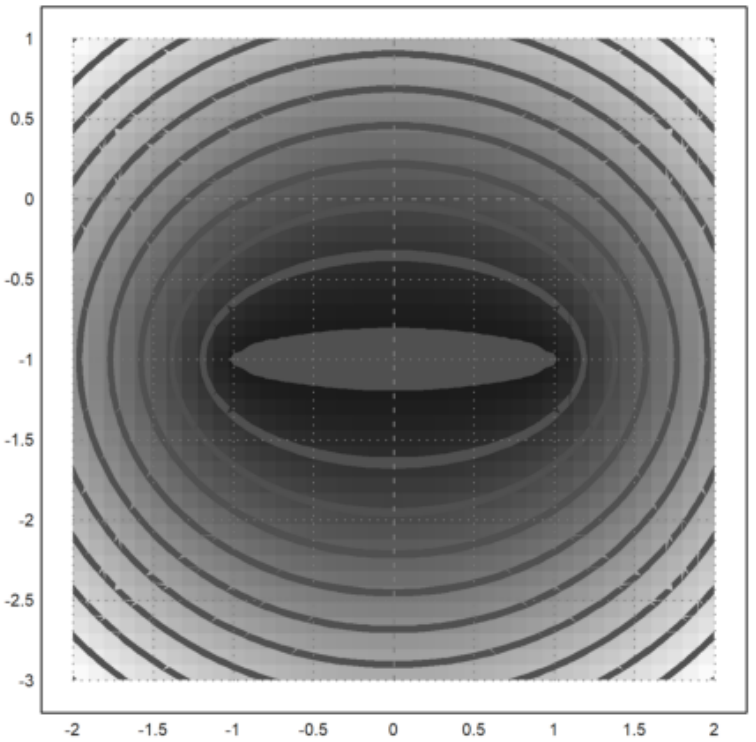


Tentu saja nilai minimum 0 tercapai di A.

Dua titik

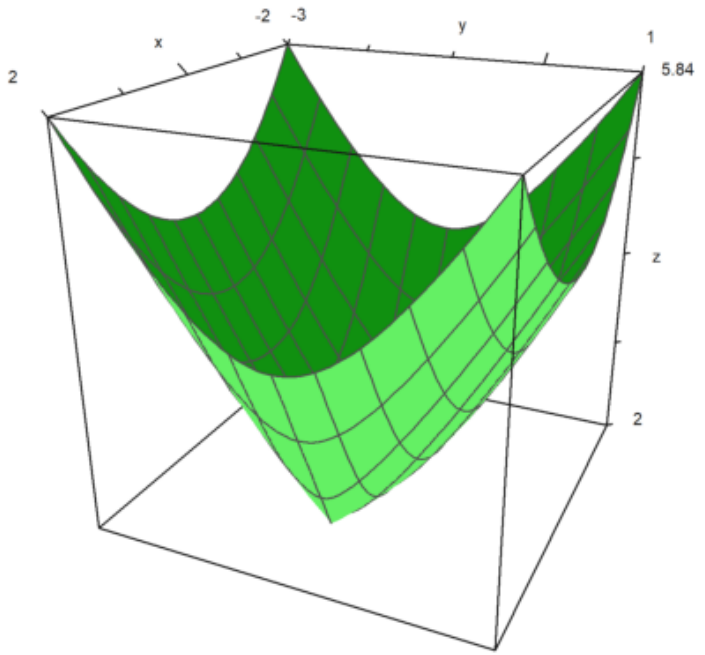
Sekarang kita melihat fungsi MA+MB di mana A dan B adalah dua titik (tetap). Merupakan "fakta yang sudah diketahui" bahwa kurva tingkatnya adalah elips, dengan titik fokus A dan B; kecuali untuk minimum AB yang konstan pada segmen [AB]:

```
>B=[1,-1];
>function d2(x,y):=d1(x,y)+sqrt((x-B[1])^2+(y-B[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```



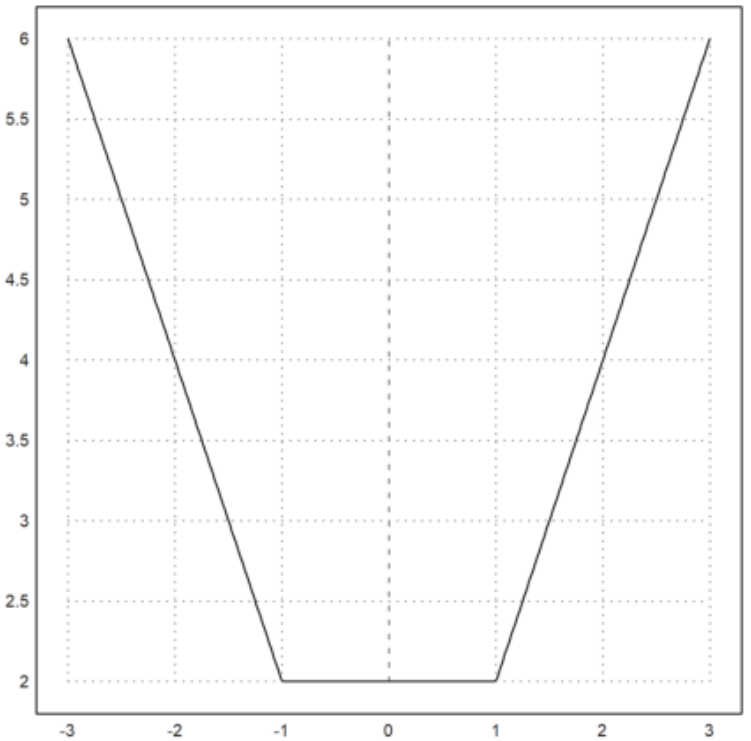
Grafiknya lebih menarik:

```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```



Pembatasan pada garis (AB) lebih terkenal:

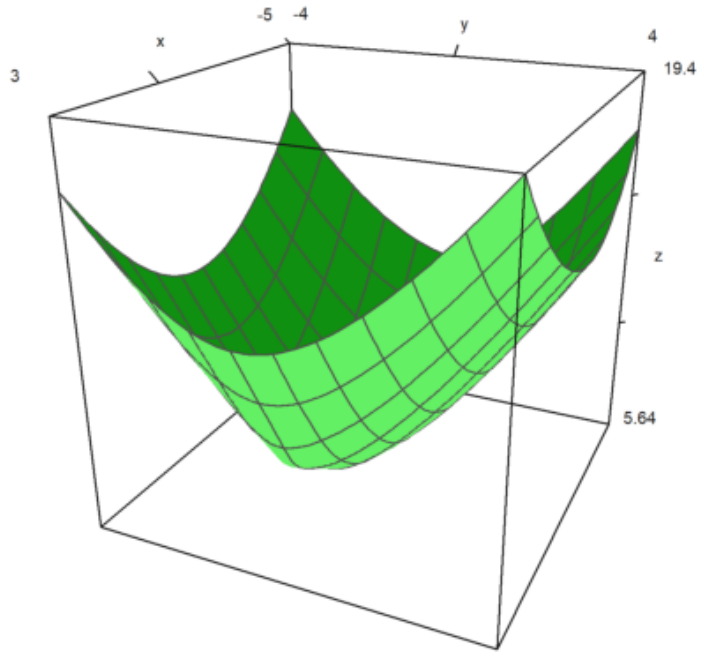
```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```



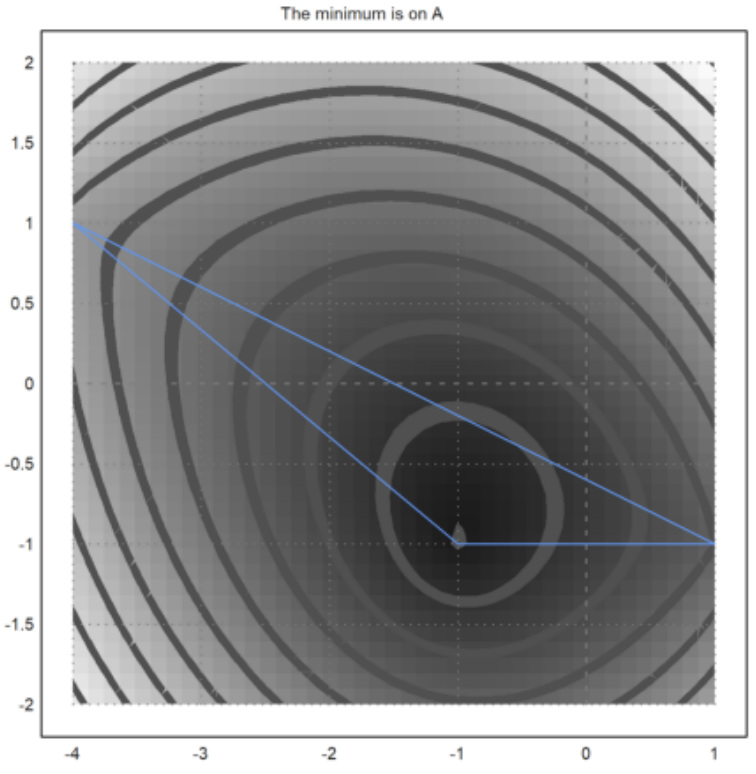
Sekarang hal-hal menjadi lebih rumit: Tidak banyak yang tahu bahwa MA+MB+MC mencapai minimumnya di satu titik pada bidang, tetapi untuk menentukannya tidak semudah itu:
1) Jika salah satu sudut segitiga ABC lebih dari 120° (misalnya di A), maka minimumnya tercapai di titik tersebut (misalnya AB+AC).

Contoh:

```
>C=[-4,1];
>function d3(x,y):=d2(x,y)+sqrt((x-C[1])^2+(y-C[2])^2)
>plot3d("d3",xmin=-5,xmax=3,ymin=-4,ymax=4);
>insimg;
```

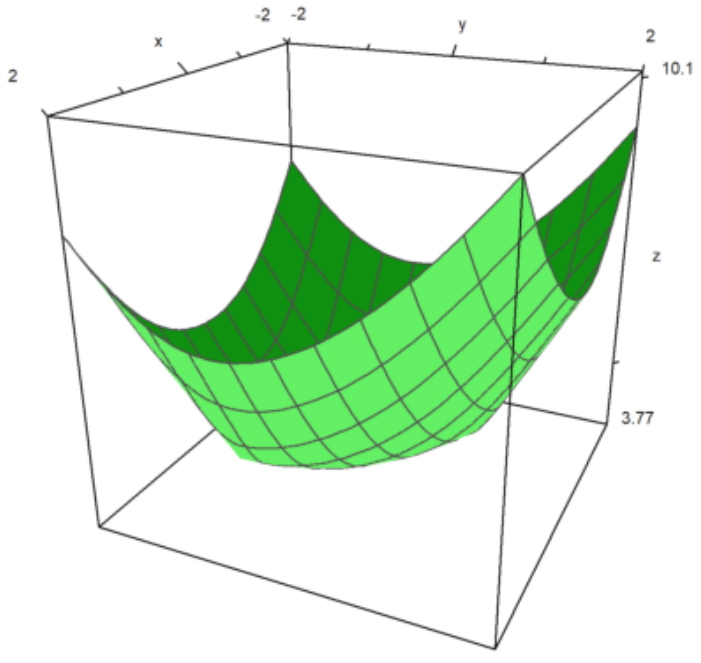



```
>fcontour("d3",xmin=-4,xmax=1,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The minimum is on A");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

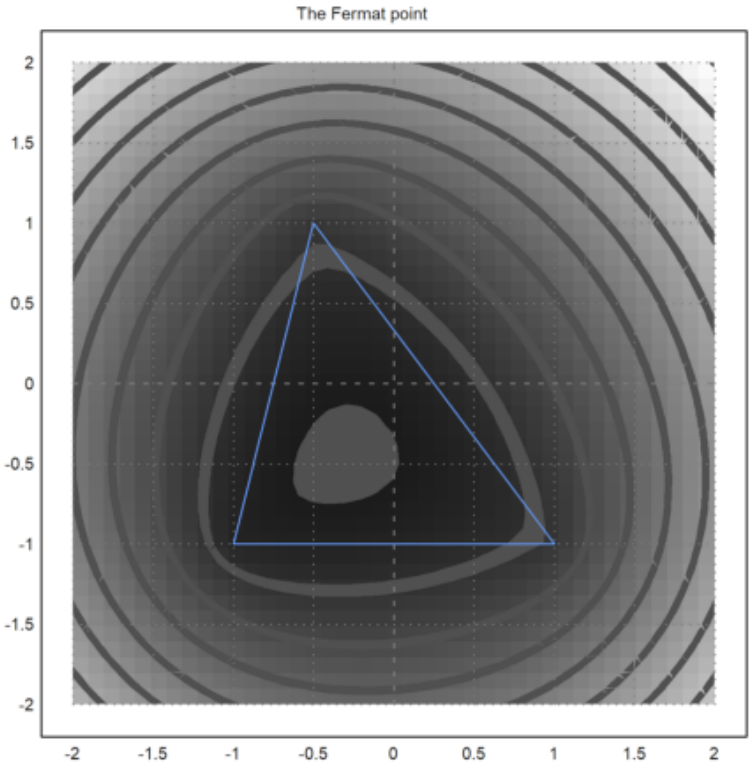


2) Namun, jika semua sudut segitiga ABC kurang dari 120˚, titik minimum terletak pada titik F di dalam segitiga, yang merupakan satu-satunya titik yang melihat sisi-sisi ABC dengan sudut yang sama (masing-masing 120˚):

```
>C=[-0.5,1];
>plot3d("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2):
```




```
>fcontour("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The Fermat point");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```



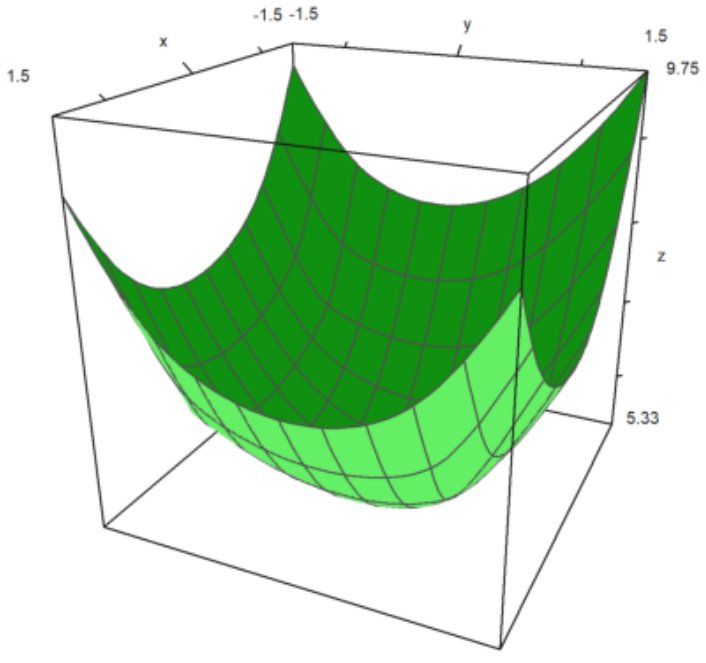
Ini adalah kegiatan yang menarik untuk merealisasikan gambar di atas menggunakan perangkat lunak geometri; misalnya, saya tahu ada perangkat lunak yang ditulis dalam bahasa Java yang memiliki perintah ”garis kontur”...

Semua hal di atas ditemukan oleh seorang hakim Prancis bernama Pierre de Fermat; ia menulis surat kepada para amatir seperti pendeta Marin Mersenne dan Blaise Pascal yang bekerja di bidang pajak penghasilan. Titik unik F sedemikian rupa sehingga FA+FB+FC minimal, disebut titik Fermat segitiga. Namun, sepertinya beberapa tahun sebelumnya, Torriccelli dari Italia telah menemukan titik ini sebelum Fermat! Bagaimanapun, tradisi mencatat titik F ini...

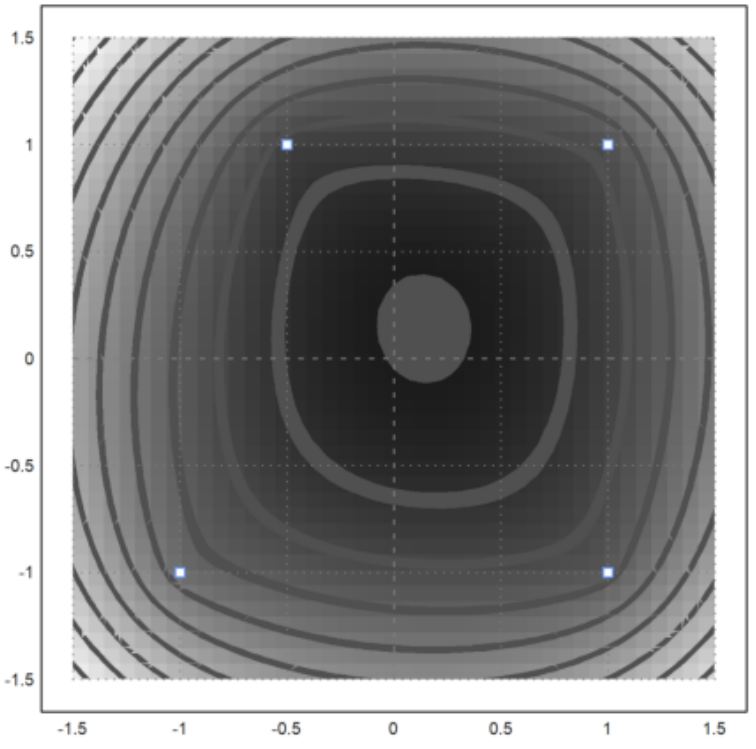
Empat titik

Langkah berikutnya adalah menambahkan titik keempat D dan mencoba meminimalkan MA+MB+MC+MD; bayangkan Anda adalah operator TV kabel yang ingin menemukan di mana harus menempatkan antena agar dapat melayani empat desa dengan menggunakan panjang kabel seminimal mungkin!

```
>D=[1,1];
>function d4(x,y):=d3(x,y)+sqrt((x-D[1])^2+(y-D[2])^2)
>plot3d("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5):
```




```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],points=1,add=1,color=12);
>insimg;
```



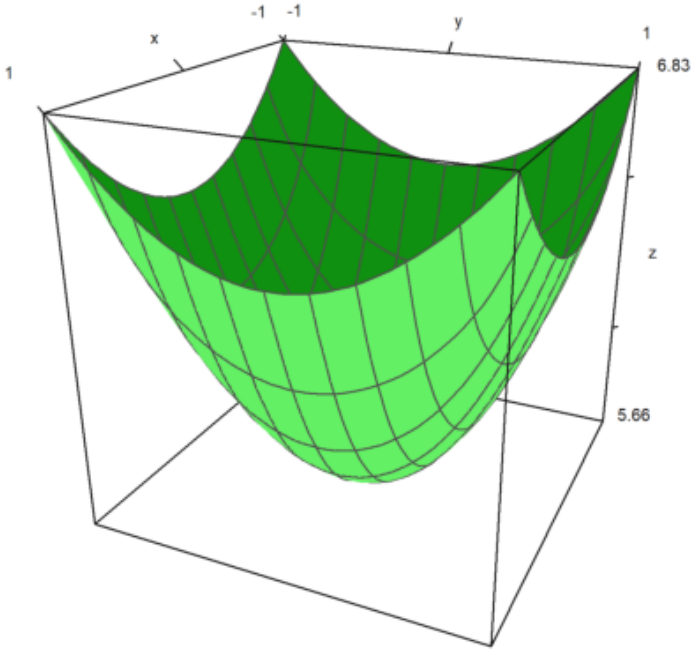
Masih ada nilai minimum, dan nilai tersebut tidak tercapai di salah satu dari titik sudut A, B, C, atau D:

```
>function f(x):=d4(x[1],x[2])
>neldermin("f",[0.2,0.2])
```

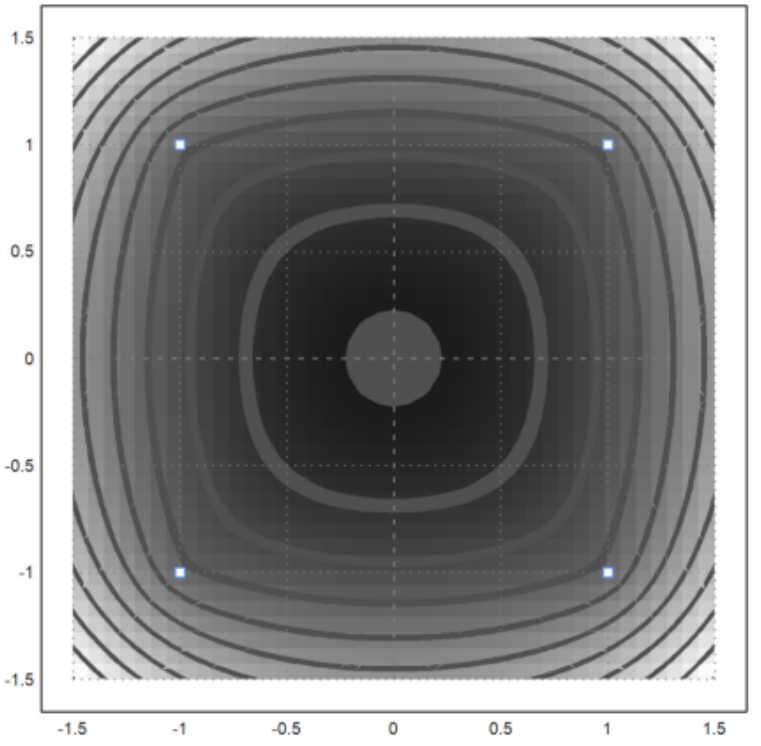
```
[0.142858,  0.142857]
```

Sepertinya dalam kasus ini, koordinat titik optimal adalah rasional atau hampir rasional...
Sekarang ABCD adalah persegi, kita mengharapkan bahwa titik optimal akan menjadi pusat ABCD:

```
>C=[-1,1];
>plot3d("d4",xmin=-1,xmax=1,ymin=-1,ymax=1):
```




```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12,points=1);
>insimg;
```


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5

Contoh 7: Bola Dandelin dengan Povray Anda dapat menjalankan

demonstrasi ini jika Povray telah terinstal dan pvengine.exe berada di jalur program.
Pertama, kita menghitung jari-jari bola.

Jika Anda melihat gambar di bawah ini, Anda akan melihat bahwa kita membutuhkan dua lingkaran yang menyentuh dua garis yang membentuk kerucut, dan satu garis yang membentuk bidang yang memotong kerucut.
Kita menggunakan berkas geometry.e dari Euler untuk ini.

```
>load geometry;
```

First the two lines forming the cone.

```
>g1 &= lineThrough([0,0],[1,a])
```

```
[- a, 1, 0]
```

```
>g2 &= lineThrough([0,0],[-1,a])
```

```
[- a, - 1, 0]
```

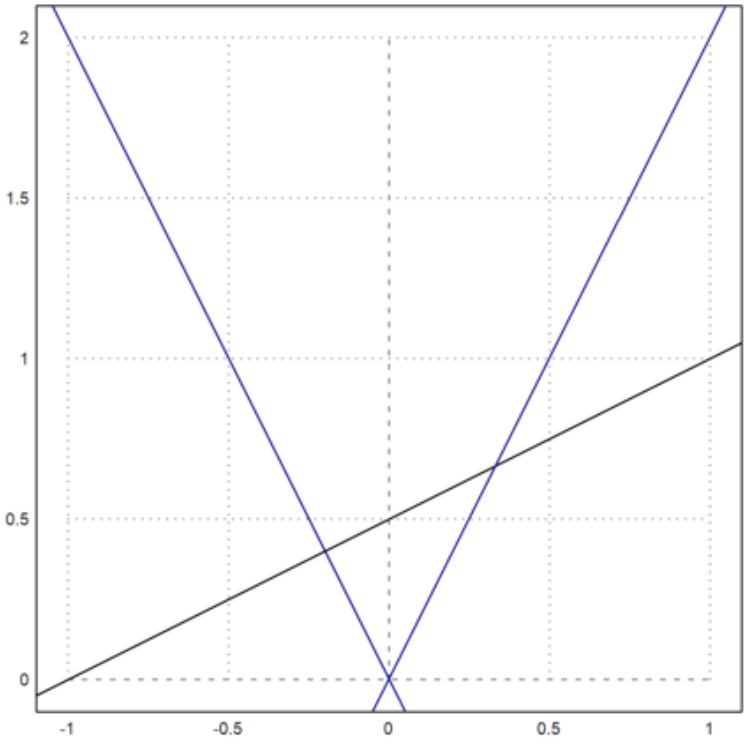
Kemudian baris ketiga.

```
>g &= lineThrough([-1,0],[1,1])
```

```
[- 1, 2, 1]
```

Kami telah mencatat semua hal yang telah terjadi sejauh ini.

```
>setPlotRange(-1,1,0,2);
>color(black); plotLine(g(),"")
>a:=2; color(blue); plotLine(g1(),""), plotLine(g2(),""):
```



Sekarang kita ambil titik umum pada sumbu y.

```
>P &= [0,u]
```

```
[0, u]
```

Hitung jarak ke g1.

```
>d1 &= distance(P,projectToLine(P,g1)); $d1
```

$$\sqrt{\left(\frac{a^2\,u}{a^2+1}-u\right)^2+\frac{a^2\,u^2}{\left(a^2+1\right)^2}}$$

Hitung jarak ke g.

```
>d &= distance(P,projectToLine(P,g)); $d
```

$$\sqrt{\left(\frac{u+2}{5}-u\right)^2+\frac{\left(2\,u-1\right)^2}{25}}$$

Dan temukan pusat dari kedua lingkaran, di mana jaraknya sama.

```
>sol &= solve(d1^2=d^2,u); $sol
```

$$\left[u=\frac{-\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+1}+2\,a^2+2}{4\,a^2-1},u=\frac{\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+1}+2\,a^2+2}{4\,a^2-1}\right]$$

Ada dua solusi.
Kami mengevaluasi solusi simbolik, dan menemukan kedua pusat, serta kedua jarak.

```
>u := sol()
```

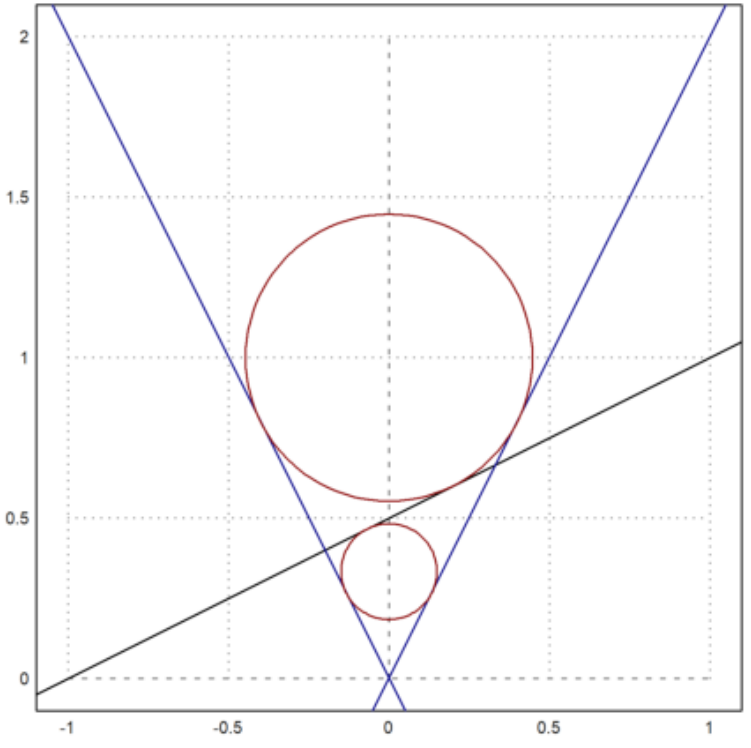
```
  [0.333333,  1]
```

```
>dd := d()
```

```
  [0.149071,  0.447214]
```

Gambarlah lingkaran-lingkaran tersebut ke dalam gambar.

```
>color(red);
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[1]],dd[1]),"");
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[2]],dd[2]),"");
>insimg;
```


2
1.5
1
0.5
0
-1
-0.5
0
0.5
1

Selanjutnya, kita membuat plot semua objek dengan Povray. Perhatikan bahwa jika Anda mengubah perintah apa pun dalam urutan perintah Povray berikut, Anda harus menjalankan ulang semua perintah dengan menekan Shift-Return.
Pertama, kita memuat fungsi-fungsi Povray.

```
>load povray;
>defaultpovray="D:\tools\povray\bin\pvengine.exe"
```

```
  D:\tools\povray\bin\pvengine.exe
```

Kami menyiapkan adegan dengan tepat.

```
>povstart(zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```

Selanjutnya, kita menuliskan kedua bola tersebut ke dalam berkas Povray.

```
>writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
>writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
```

Dan kerucut, transparan.

```
>writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
```

Kami menghasilkan sebuah bidang yang dibatasi oleh kerucut.

```
>gp=g();
>pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
>vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
>writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
```

Sekarang kita menentukan dua titik pada lingkaran, di mana bola-bola tersebut menyentuh kerucut.

```
>function turnz(v) := return [-v[2],v[1],v[3]]
>P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
>writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
>P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
>writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
```

Kemudian kita menentukan dua titik di mana bola-bola tersebut menyentuh bidang. Titik-titik ini merupakan fokus-fokus elips.

```
>P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
>writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
>P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
>writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
```

Selanjutnya, kita menghitung irisan P1P2 dengan bidang.

```
>t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
>writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
```

Kami menghubungkan titik-titik dengan segmen garis.

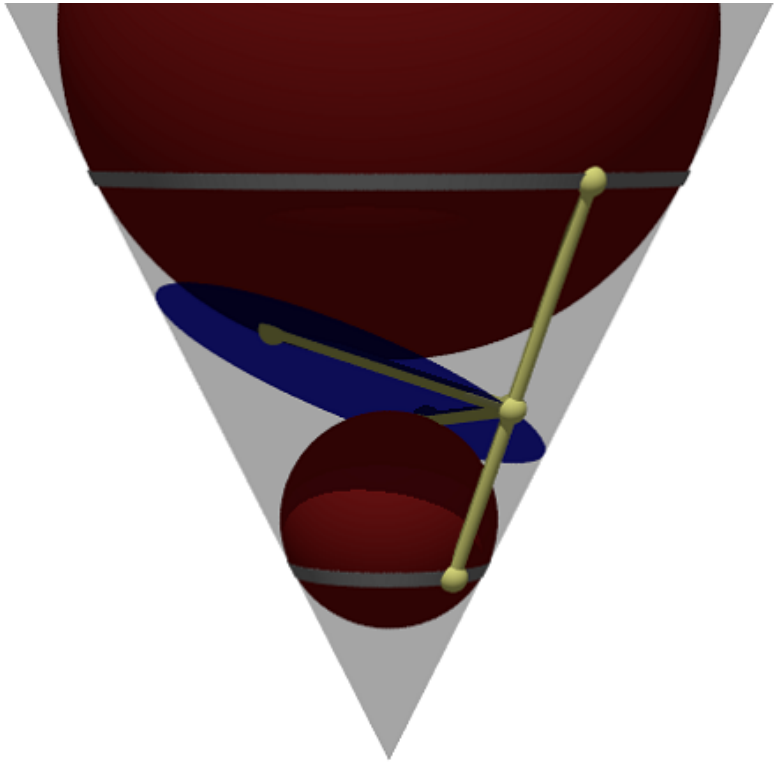
```
>writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
```

Sekarang kita menghasilkan pita abu-abu di mana bola-bola menyentuh kerucut.

```
>pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
>pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
>pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
```

Jalankan program Povray.

```
>povend();
```



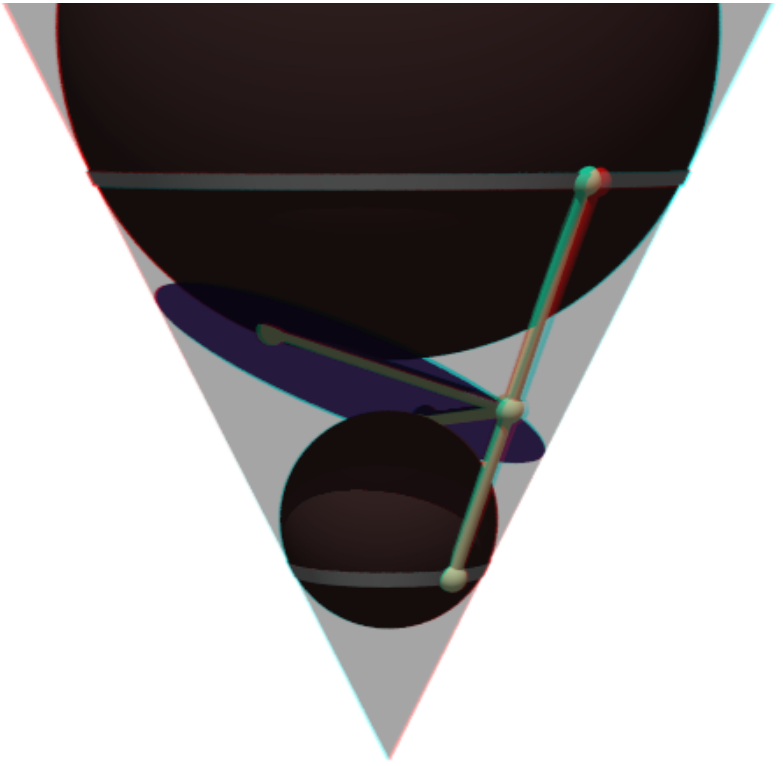
Untuk mendapatkan anaglyph dari ini, kita perlu memasukkan semuanya ke dalam fungsi scene. Fungsi ini akan digunakan dua kali nanti.

```
>function scene () ...
```

```
global a,u,dd,g,g1,defaultpointsize;
writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
gp=g();
pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
endfunction
```

Anda memerlukan kacamata merah/biru untuk menikmati efek berikut ini.

```
>povanaglyph("scene",zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```



Contoh 8: Geometri Bumi

Dalam buku catatan ini, kita ingin melakukan beberapa perhitungan bola. Fungsi-fungsi tersebut terdapat dalam berkas "spherical.e" di folder contoh. Kita perlu memuat berkas tersebut terlebih dahulu.

```
>load "spherical.e";
```

Untuk memasukkan posisi geografis, kita menggunakan vektor dengan dua koordinat dalam satuan radian (utara dan timur, nilai negatif untuk selatan dan barat). Berikut adalah koordinat untuk Kampus FMIPA UNY.

```
>FMIPA=[rad(-7,-46.467),rad(110,23.05)]
```

```
  [-0.13569,  1.92657]
```

Anda dapat mencetak posisi ini menggunakan sposprint (cetak posisi bola).

```
>sposprint(FMIPA) // posisi garis lintang dan garis bujur FMIPA UNY
```

```
  S 7°46.467' E 110°23.050'
```

Mari kita tambahkan dua kota lagi, Solo dan Semarang.

```
>Solo=[rad(-7,-34.333),rad(110,49.683)]; Semarang=[rad(-6,-59.05),rad(110,24.533)];
>sposprint(Solo), sposprint(Semarang),
```

```
  S 7°34.333' E 110°49.683'
  S 6°59.050' E 110°24.533'
```

Pertama, kita menghitung vektor dari satu titik ke titik lain pada bola ideal. Vektor ini berupa [arah, jarak] dalam radian. Untuk menghitung jarak di Bumi, kita mengalikan dengan jari-jari Bumi pada lintang 7°.

```
>br=svector(FMIPA,Solo); degprint(br[1]), br[2]*rearth(7°)->km // perkiraan jarak FMIPA-Solo
```

```
  65°20'26.60''
  53.8945384608
```

Ini adalah perkiraan yang baik. Rutin-rutin berikut menggunakan perkiraan yang lebih baik lagi. Pada jarak yang begitu pendek, hasilnya hampir sama.

```
>esdist(FMIPA,Semarang)->" km"; // perkiraan jarak FMIPA-Semarang
```

Ada fungsi untuk judul, yang memperhitungkan bentuk elips Bumi. Sekali lagi, kami mencetak dengan cara yang canggih.

```
>sdegprint(esdir(FMIPA,Solo))
```

```
       65.34°
```

Sudut segitiga melebihi 180˚ pada bola.

```
>asum=sangle(Solo,FMIPA,Semarang)+sangle(FMIPA,Solo,Semarang)+sangle(FMIPA,Semarang,Solo); degprint(
```

```
  180°0’10.77’’
```

Ini dapat digunakan untuk menghitung luas segitiga. Catatan: Untuk segitiga kecil, perhitungan ini tidak akurat karena adanya kesalahan pengurangan dalam asumsi pi.

```
>(asum-pi)*rearth(48°)^2->" km^2"; // perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Semarang
```

Ada fungsi untuk ini, yang menggunakan rata-rata lintang segitiga untuk menghitung jari-jari Bumi, dan menangani kesalahan pembulatan untuk segitiga yang sangat kecil.

```
>esarea(Solo,FMIPA,Semarang)->" km^2", //perkiraan yang sama dengan fungsi esarea()
```

```
  2123.64310526 km^2
```

Kita juga dapat menambahkan vektor ke posisi. Sebuah vektor berisi arah dan jarak, keduanya dalam radian. Untuk mendapatkan vektor, kita menggunakan svector. Untuk menambahkan vektor ke posisi, kita menggunakan saddvector.

```
>v=svector(FMIPA,Solo); sposprint(saddvector(FMIPA,v)), sposprint(Solo),
```

```
  S 7°34.333' E 110°49.683'
  S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Fungsi-fungsi ini mengasumsikan bola ideal. Hal yang sama berlaku di Bumi.

```
>sposprint(esadd(FMIPA,esdir(FMIPA,Solo),esdist(FMIPA,Solo))), sposprint(Solo),
```

```
  S 7°34.333' E 110°49.683'
  S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Let us turn to a larger example, Tugu Jogja dan Monas Jakarta (menggunakan Google Earth untuk mencari koordinatnya).

```
>Tugu=[-7.7833°,110.3661°]; Monas=[-6.175°,106.811944°];
>sposprint(Tugu), sposprint(Monas)
```

```
  S 7°46.998’ E 110°21.966’
  S 6°10.500’ E 106°48.717’
```

Menurut Google Earth, jaraknya adalah 429,66 km. Kita mendapatkan perkiraan yang cukup akurat.

```
>esdist(Tugu,Monas)->" km"; // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta
```

Judulnya sama dengan yang dihitung di Google Earth.

```
>degprint(esdir(Tugu,Monas))
```

```
  294°17’2.85’’
```

Namun, kita tidak lagi mendapatkan posisi target yang tepat jika kita menambahkan arah dan jarak ke posisi asli. Hal ini terjadi karena kita tidak menghitung fungsi invers secara tepat, melainkan menggunakan perkiraan jari-jari bumi sepanjang jalur tersebut.

```
>sposprint(esadd(Tugu,esdir(Tugu,Monas),esdist(Tugu,Monas)))
```

```
  S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Kesalahan tersebut tidak terlalu besar, namun.

```
>sposprint(Monas),
```

```
  S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Tentu saja, kita tidak bisa berlayar dengan arah yang sama dari satu tujuan ke tujuan lain jika kita ingin mengambil rute terpendek. Bayangkan, Anda terbang ke arah timur laut (NE) dari titik mana pun di bumi. Maka Anda akan berputar spiral menuju Kutub Utara. Lingkaran besar tidak mengikuti arah yang konstan!
Perhitungan berikut menunjukkan bahwa kita akan jauh dari tujuan yang benar jika kita menggunakan arah yang sama selama perjalanan.

```
>dist=esdist(Tugu,Monas); hd=esdir(Tugu,Monas);
```

Sekarang kita tambahkan 10 kali sepersepuluh jarak, menggunakan arah ke Monas, kita sampai di Tugu.

```
>p=Tugu; loop 1 to 10; p=esadd(p,hd,dist/10); end;
```

Hasilnya masih jauh.

```
>sposprint(p), skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
  S 6°11.250' E 106°48.372'
       1.529km
```

Sebagai contoh lain, mari kita ambil dua titik di bumi pada lintang yang sama.

```
>P1=[30°,10°]; P2=[30°,50°];
```

Jalur terpendek dari P1 ke P2 bukanlah lingkaran lintang 30°, melainkan jalur yang lebih pendek yang dimulai 10° lebih utara di P1.

```
>sdegprint(esdir(P1,P2))
```

```
       79.69°
```

Namun, jika kita mengikuti pembacaan kompas ini, kita akan berputar ke Kutub Utara! Oleh karena itu, kita harus menyesuaikan arah kita sepanjang perjalanan. Untuk perkiraan kasar, kita menyesuaikannya pada 1/10 dari jarak total.

```
>p=P1;  dist=esdist(P1,P2); ...
>  loop 1 to 10; dir=esdir(p,P2); sdegprint(dir), p=esadd(p,dir,dist/10); end;
```

```
       79.69°
       81.67°
       83.71°
       85.78°
       87.89°
       90.00°
       92.12°
       94.22°
       96.29°
       98.33°
```

Jarak-jaraknya tidak tepat, karena kita akan menambahkan sedikit kesalahan jika kita terus mengikuti arah yang sama terlalu lama.

```
>skmprint(esdist(p,P2))
```

```
       0.203km
```

Kita mendapatkan perkiraan yang cukup akurat jika kita menyesuaikan arah kita setelah setiap 1/100 dari jarak total antara Tugu dan Monas.

```
>p=Tugu; dist=esdist(Tugu,Monas); ...
>  loop 1 to 100; p=esadd(p,esdir(p,Monas),dist/100); end;
>skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
       0.000km
```

Untuk tujuan navigasi, kita dapat memperoleh urutan posisi GPS sepanjang lingkaran besar menuju Monas menggunakan fungsi navigate.

```
>load spherical; v=navigate(Tugu,Monas,10); ...
>  loop 1 to rows(v); sposprint(v[#]), end;
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'
S 7°37.422' E 110°0.573'
S 7°27.829' E 109°39.196'
S 7°18.219' E 109°17.834'
S 7°8.592' E 108°56.488'
S 6°58.948' E 108°35.157'
S 6°49.289' E 108°13.841'
S 6°39.614' E 107°52.539'
S 6°29.924' E 107°31.251'
S 6°20.219' E 107°9.977'
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

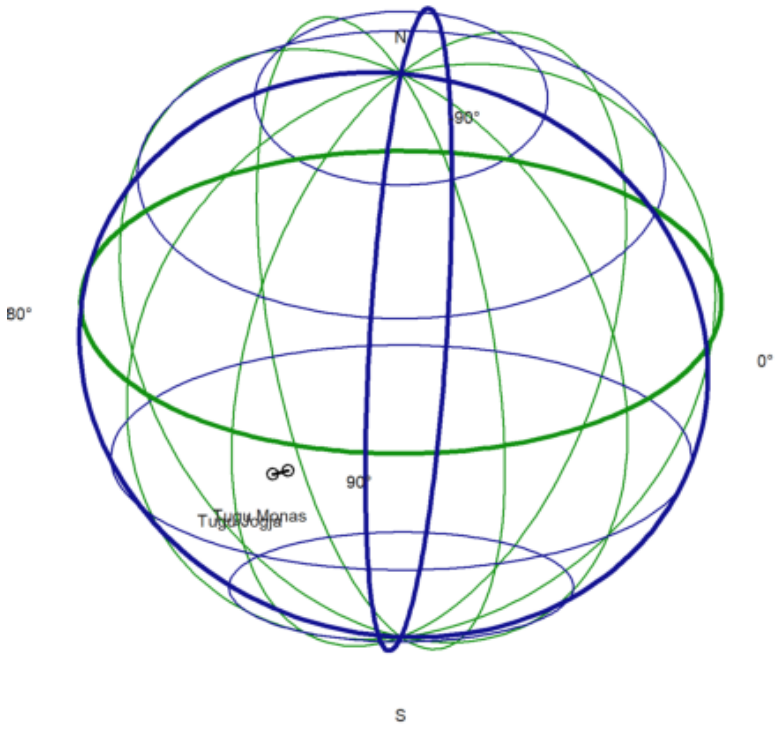
cKami menulis sebuah fungsi yang menggambar Bumi, dua posisi, dan posisi di antara keduanya.

```
>function testplot ...
```

```
useglobal;
plotearth;
plotpos(Tugu,"Tugu Jogja"); plotpos(Monas,"Tugu Monas");
plotposline(v);
endfunction
```

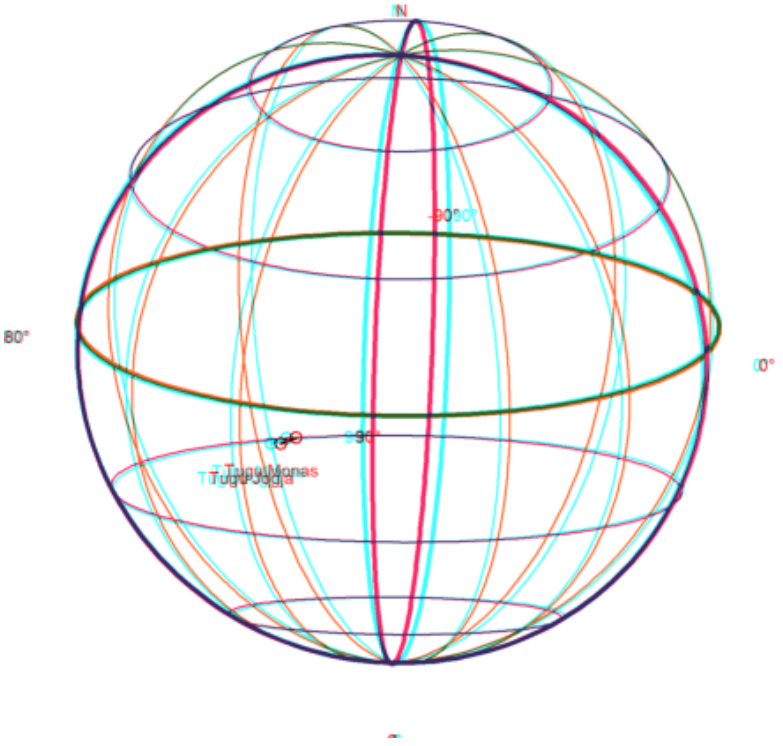
Sekarang gambarkan semuanya.

```
>plot3d("testplot",angle=25, height=6,>own,>user,zoom=4):
```



Atau gunakan plot3d untuk mendapatkan tampilan anaglyph-nya. Tampilan ini terlihat sangat bagus dengan kacamata merah/biru.

```
>plot3d("testplot",angle=25,height=6,distance=5,own=1,anaglyph=1,zoom=4):
```


N
80°
0°
Tugu Monas
Tugu Jogja

Latihan

1. Gambarlah segi-n beraturan jika diketahui titik pusat O, n, dan jarak titik pusat ke titik-titik sudut segi-n tersebut (jari-jari lingkaran luar segi-n), r.

Petunjuk:

- Besar sudut pusat yang menghadap masing-masing sisi segi-n adalah (360/n).
- Titik-titik sudut segi-n merupakan perpotongan lingkaran luar segi-n dan garis-garis yang melalui pusat dan saling membentuk sudut sebesar kelipatan (360/n).
- Untuk n ganjil, pilih salah satu titik sudut adalah di atas.
- Untuk n genap, pilih 2 titik di kanan dan kiri lurus dengan titik pusat.
- Anda dapat menggambar segi-3, 4, 5, 6, 7, dst beraturan.

2. Gambarlah suatu parabola yang melalui 3 titik yang diketahui.

Petunjuk:
- Misalkan persamaan parabolanya y= axˆ2+bx+c.
- Substitusikan koordinat titik-titik yang diketahui ke persamaan tersebut.
- Selesaikan SPL yang terbentuk untuk mendapatkan nilai-nilai a, b, c.

3. Gambarlah suatu segi-4 yang diketahui keempat titik sudutnya, misalnya A, B, C, D.

```
- Tentukan apakah segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung
```

(sisinya-sisintya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yakni lingkaran dalam segi-4 tersebut).

```
- Suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila keempat
```

garis bagi sudutnya bertemu di satu titik.

- Jika segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung, gambar

lingkaran dalamnya.

- Tunjukkan bahwa syarat suatu segi-4 merupakan segi-4 garis

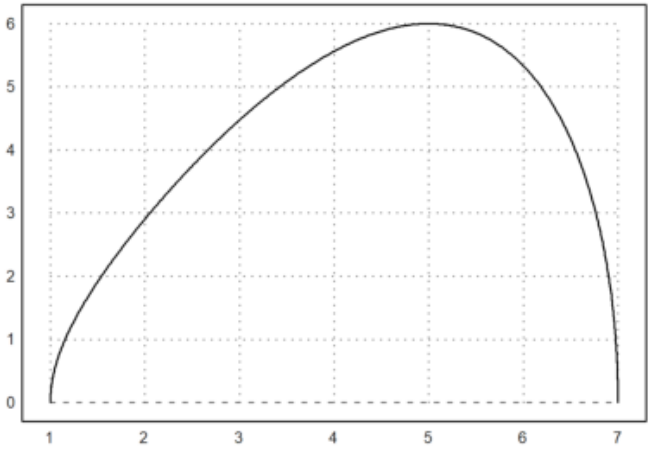
singgung apabila hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

4. Gambarlah suatu ellips jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

5. Gambarlah suatu hiperbola jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

2. gambar kurva 3,4,5

```
>aspect (1.5); plot2d(&H(3,4,x),1,7):
```



4. gambar ellips

```
> a = 5; b = 3
```

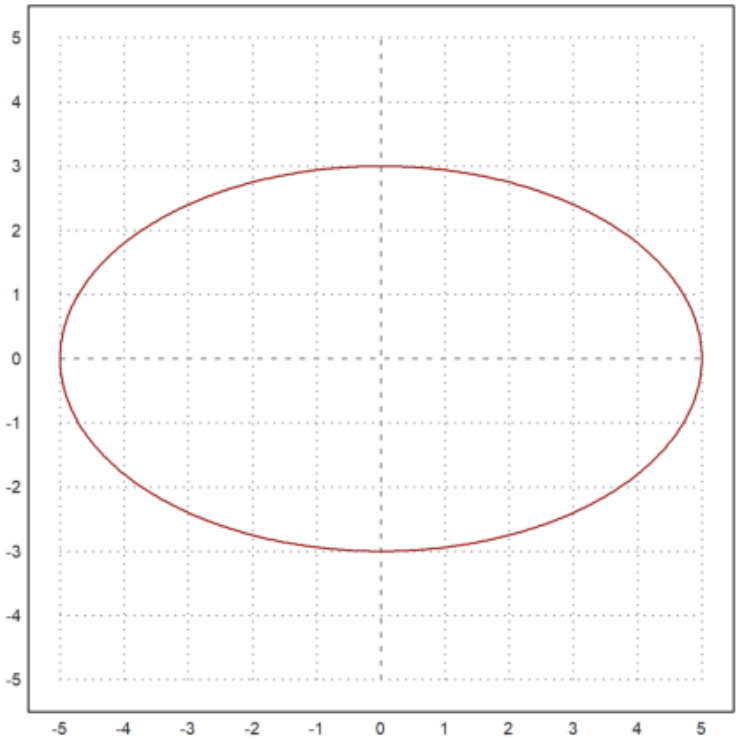
```
>function fx(a,t,b)&= a * cos(t)
```

a cos(t)

```
>function fy(a, t, b) &= b * sin(t)
```

b sin(t)

```
> plot2d(&fx(a, x, b), &fy(a, x, b), xmin=0, xmax=2*pi, square=1, color=red):
```


5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

materi 1. Segitiga dan Titik-titik Istimewanya Dalam geometri

Euclid, setiap segitiga memiliki beberapa titik istimewa (special points) yang diperoleh dari perpotongan garis-garis tertentu. Titik-titik ini memiliki sifat geometris penting dan saling berhubungan.
a. Centroid (Titik Berat, G)
Definisi: Titik potong ketiga median segitiga.
Median adalah garis dari satu titik sudut menuju titik tengah sisi yang berhadapan.
Sifat penting: membagi setiap median dengan perbandingan 2:1 dari titik sudut ke sisi.

b. Circumcenter (Titik Pusat Lingkaran Luar, O)
Definisi: Titik perpotongan ketiga garis bagi tegak (perpendicular bisector) dari sisi-sisi segitiga.
Sifat: Berjarak sama dari ketiga titik sudut segitiga.

A=OB=OC=R
di mana R adalah jari-jari lingkaran luar (circumradius).
Letak:
Di dalam segitiga (jika segitiga lancip),
Di luar (jika tumpul),
Tepat di tengah sisi miring (jika segitiga siku-siku).

c. Incenter (Titik Pusat Lingkaran Dalam, I)
Definisi: Titik perpotongan ketiga garis bagi sudut dalam segitiga.
Sifat: Berjarak sama dari ketiga sisi segitiga.

d. Orthocenter (Titik Potong Garis Tinggi, H)
Definisi: Titik potong ketiga garis tinggi (altitude), yaitu garis yang ditarik dari satu sudut dan tegak lurus terhadap sisi di depannya.
Letak:
Di dalam segitiga (jika segitiga lancip),
Di luar (jika tumpul),
Berimpit dengan titik sudut siku-siku (jika segitiga siku-siku).

2. Garis Euler (Euler Line)
Ditemukan oleh Leonhard Euler, matematikawan Swiss abad ke-18.
Definisi: Garis lurus yang melalui tiga titik penting dari setiap segitiga tak sama sisi,
Sifat-sifat:

a. O,G, dan Hkolinear (terletak pada satu garis lurus).
b. Rasio jarak: 0G:GH=1:2