4.7. Potencial eléctrico

Para mover una carga puntual de un punto A al B en presencia de un campo eléctrico **E**, requiere de un trabajo externo dado por:

$$\boxed{W = -Q\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}}$$

(Ec.4.59,p.133).

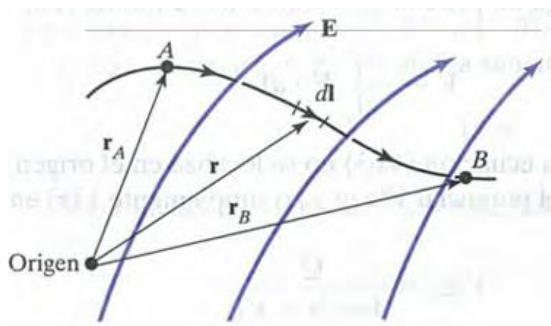

Figura 4.18. Desplazamiento de una carga puntual Q en un campo electrostático **E**.

La división W/Q da por resultado la energía potencial por unidad de carga, denotada como V_{AB} y conocida como ***diferencia de potencial*** entre los puntos A (inicial) y B (final)

$$\boxed{V_{AB} = \frac{W}{Q} = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}}$$

(Ec.4.60,p.133).

Aclaraciones:

- V_{AB} **es independiente de la trayectoria seguida**.
- Si V_{AB} es negativo, implica una pérdida de Ep en el desplazamiento (el trabajo es realizado por **E**)
- Si V_{AB} es positivo, implica una ganancia de Ep (un agente externo es el que realiza trabajo)
- La unidad de V_{AB} es el volt (V).

En el caso de una **carga puntual situada en el origen**, con $\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r$

$$V_{AB} = -\int_{r_A}^{r_B} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r \cdot dr\,\mathbf{a}_r$$

(Ec.4.62a,p.134).

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

$$\boxed{V_{AB} = V_B - V_A}$$

(Ec.4.62b,p.134).

Donde V_B y V_A son los potenciales (absolutos) en B y A, entendiéndose V_{AB} como el potencial en B respecto a A.

En *problemas de cargas puntuales* se acostumbra elegir *el infinito como referencia* (V_A=0), por lo que el potencial en cualquier punto B debido a una carga puntual Q en (0,0,0) es:

$$\boxed{V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r}} \qquad \text{(Ec.4.63,p.134).}$$

Definiéndose así **el potencial** en cualquier punto como *"la diferencia de potencial entre ese punto y un punto elegido como referencia en el que el potencial sea cero"*.

Potencial de una carga puntual NO ubicada en el origen:

Ahora, si la carga puntual Q no se ubica en el origen sino en un punto dado por el vector posición **r**`, el potencial V(x,y,z)=V(r) en **r** es:

$$\boxed{V(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}} \qquad \text{(Ec.4.65,p.134).}$$

Y en el caso de n cargas puntuales, continúa siendo válido en **principio de superposición**:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + \cdots + \frac{Q_n}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|}$$

$$\boxed{V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum_{k=1}^{n}\frac{Q_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|}} \qquad \text{(Ec.4.66,p.135).}$$

En el caso de distribuciones continuas de cargas, el potencial en r está dado por:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_L \frac{\rho_L(\mathbf{r}')dl'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \qquad \text{(carga de línea)} \qquad (4.67)$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_S \frac{\rho_S(\mathbf{r}')dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \qquad \text{(carga superficial)} \qquad (4.68)$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_v \frac{\rho_v(\mathbf{r}')dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \qquad \text{(carga volumétrica)} \qquad (4.69)$$

(p.135)

P.d.: las ecuaciones anteriores se eligió el infinito como punto (de referencia) de potencial cero. De no ser así a cada expresión hay que sumarle una **constante C** que se determina en el punto de referencia elegido.

En resumen, para hallar el potencial en un punto, si se conoce la distribución de carga se emplean las ecuaciones 4.65 en delante; y si se conoce **E**,

$$V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + C \qquad \text{(Ec.4.71,p.135).}$$

Y la diferencia de potencial;

$$V_{AB} = V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{W}{Q} \qquad \text{(Ec.4.72,p.135).}$$

4.8. Relación entre E y V-Ecuación de Maxwell

Como V_{AB} es independiente de la trayectoria seguida, $V_{AB} = -V_{BA}$, por lo que $V_{AB} + V_{BA} = 0$, es decir que en una trayectoria cerrada:

2da Ec. de Maxwell para campos eléctricos estáticos (forma integral)

$$\boxed{\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0} \qquad \text{(Ec.4.73,p.139).}$$

esto implica que en un campo electrostático el desplazamiento de una carga a lo largo de una trayectoria cerrada no supone la realización de ningún trabajo neto.

Aplicando el Teorema de Stokes,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

2da Ec. de Maxwell para campos eléctricos estáticos (forma diferencial)

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = 0} \qquad \text{(Ec.4.74,p.139).}$$

Todo **E** que satisface la ecuación (4.73) o (4.74) se dice que es **conservativo** o irrotacional.

A su vez, se demuestra que la intensidad de campo eléctrico es el (opuesto del) gradiente del potencial,

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V} \qquad \text{(Ec.4.76,p.140).}$$

donde *el signo negativo indica que la dirección de* ***E*** *es la opuesta a la dirección del incremento de V*. Se constituye así otro medio para obtener **E** aparte de las leyes de Coulomb y de Gauss, que consiste en aplicar la ecuación 4.76 conociendo previamente V.