Problemas sobre representación de funciones

CURSO	**TEMA**	**WWW.DANIPARTAL.NET**
2ºBach CCSS	Tema 1: Funciones, límites y derivadas	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

PROBLEMA 1

Sea la función

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}-x^2+4x+3 & si \quad x<4\\ 2x-5 & si \quad x\geq 4\end{cases}}$$

a) Estudie su continuidad y derivabilidad.

b) Estudie su monotonía y calcule sus extremos relativos.

c) Represente la región del plano limitada por la gráfica de la función, las rectas $x=3$, $x=5$ y el eje de abscisas.

a) Los dos tramos de la función vienen expresados por polinomios. Las funciones polinómicas son continuas y derivables en toda la recta real. Solo debemos comprobar la condición de continuidad y de derivabilidad en el punto frontera $x=4$.

$$Existe\ f(4)\rightarrow f(4)=2\cdot 4-5\rightarrow f(4)=3$$

$$L^-=L^+=L$$

$$L^-=\lim_{x\to 4^-}(-x^2+4x+3)=evaluar=-4^2+4\cdot 4+3=3$$

$$L^+=\lim_{x\to 4^+}(2x-5)=evaluar=2\cdot 4-5=3$$

$$f(4)=L\rightarrow 3=3$$

La función es continua en el punto frontera.

Será derivable si coinciden las derivadas laterales en el punto frontera.

$$f'(x)=\begin{cases}-2x+4 & si \quad x<4\\ 2 & si \quad x>4\end{cases}$$

$$f'(4^-)=-2(4)+4=-4$$

$$f'(4^+)=2$$

Las derivadas laterales no coinciden. Encontramos un punto anguloso en $x=4$. La función no es suave (no es derivable) en el punto frontera.

b) Calculamos los puntos críticos igualando la derivada a cero.

$$(-\infty,4)\rightarrow -2x+4=0\rightarrow x=2\in(-\infty,4)$$

$$(4,\infty)\rightarrow 2=0\rightarrow absurdo$$

Miramos el signo de la derivada en los siguientes intervalos:

$$(-\infty,2)\rightarrow f'(0)=4>0\rightarrow f(x)\ estrictamente\ creciente$$

$$(2,4)\rightarrow f'(3)=-2<0\rightarrow f(x)\ estrictamente\ decreciente$$

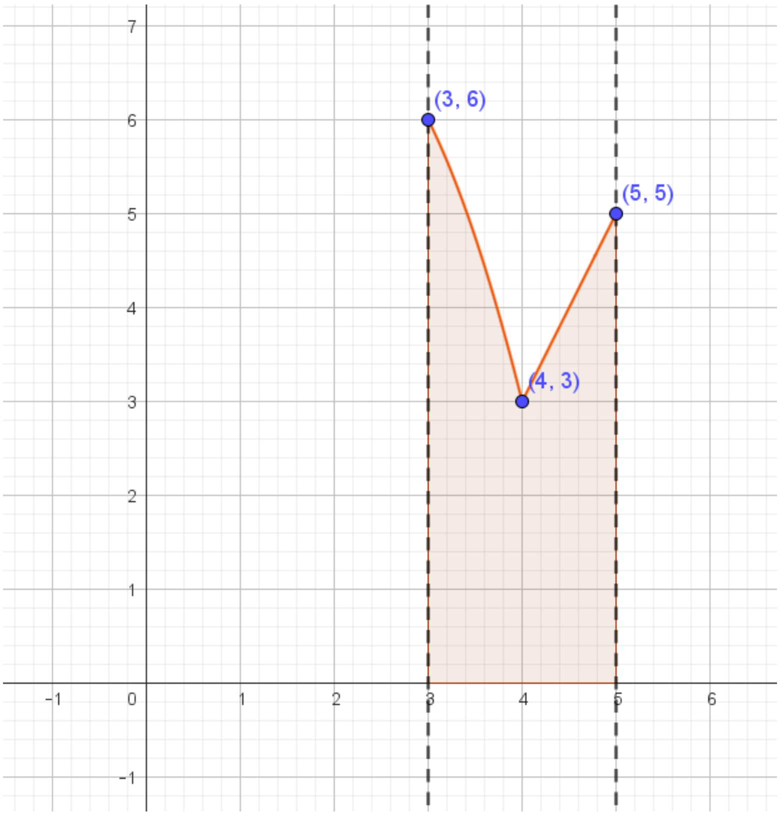
$$(4,\infty)\rightarrow f'(10)=2>0\rightarrow f(x)\ estrictamente\ creciente$$

$$x=2\ máximo\ relativo\rightarrow imagen\rightarrow f(2)=-2^2+4(2)+3\rightarrow f(2)=7\rightarrow punto\ (2,7)$$

c) Dibujamos la gráfica de la función en el extremo [3,5].

A la izquierda de x=4 tenemos la parábola, donde ya hemos sacado su vértice (máximo relativo).

A la derecha de x=4 tenemos la recta, que se puede dibujar obteniendo dos puntos.



PROBLEMA 2

La superficie de ampliación de un parque de atracciones, en decímetros cuadrados, coincide con el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 6x$ y $g(x) = \frac{x^2}{5}$. Represente gráficamente la superficie de ampliación del parque de atracciones.

Las dos funciones son parabólicas. La gráfica de $f(x) = -x^2 + 6x$ se obtiene con los cortes con los ejes y con el vértice (extremo relativo).

$$-x^2 + 6x = 0 \to x = 0, x = 6 \to cortes\ (0,0), (6,0)$$

$$f(0) = 0 \to (0,0)$$

$$f'(x) = -2x + 6 \to f'(x) = 0 \to -2x + 6 = 0 \to x = 3 \to máximo\ relativo\ de\ una\ parábola\ convexa$$

$$Imagen\ de\ x = 3 \to f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 = 9 \to (3,9)\ vértice\ que\ es\ máximo\ relativo\ y\ absoluto$$

La gráfica de $g(x) = \frac{x^2}{5}$ se deduce de la gráfica de $y = x^2$, sabiendo que las ramas de la parábola serán más abiertas por estar dividiendo el polinomio de grado dos por un número mayor que 1.

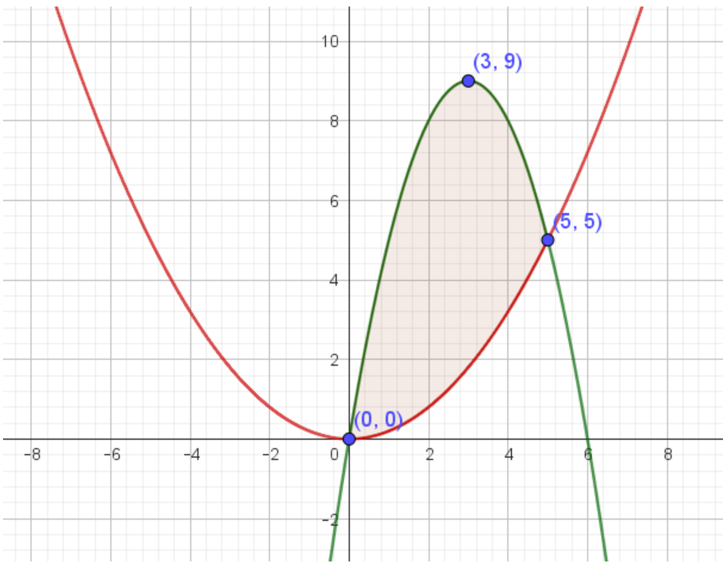
Los puntos de corte de ambas funciones se obtienen igualando las fórmulas de ambas funciones

.

$$f(x) = g(x)$$

$$-x^2 + 6x = \frac{x^2}{5} \to -5x^2 + 30x = x^2 \to -6x^2 + 30x = 0 \to x = 0, x = 5$$

$$Imagen\ puntos\ de\ corte: g(0) = 0\ , g(5) = 5 \to puntos\ (0,0), (5,5)$$



PROBLEMA 3

Sean las funciones:

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}2-x^2 & si\quad -1\le x\le 1\\(x-2)^2 & si\quad 1<x\le 3\end{cases}}$$

$$\boldsymbol{g(x)=1\ \ si\ -1\le x\le 3}$$

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de ambas funciones en sus dominios.

b) Represente el reciento limitado por las gráficas de ambas funciones.

a) Los dos tramos de la función $f(x)$ vienen expresados por polinomios. Las funciones polinómicas son continuas y derivables en toda la recta real. Solo debemos comprobar la condición de continuidad y de derivabilidad en los puntos frontera.

$$Existe\ f(-1)\rightarrow f(-1)=2-(-1)^2\rightarrow f(-1)=1$$

$$Solo\ tiene\ sentido\ plantear\ L^+=L\ porque\ no\ hay\ función\ a\ la\ izquierda\ de\ x=-1$$

$$L^+=\lim_{x\to(-1)^+}(2-x^2)=evaluar=1$$

$$f(-1)=L\rightarrow 1=1$$

La función es continua en $x=-1$.

$$Existe\ f(1)\rightarrow f(1)=2-(1)^2\rightarrow f(1)=1$$

$$L^-=L^+=L$$

$$L^-=\lim_{x\to(1)^-}(2-x^2)=evaluar=1$$

$$L^+=\lim_{x\to(1)^+}(x-2)^2=evaluar=1$$

$$f(1)=L\rightarrow 1=1$$

La función es continua en $x=1$.

$$Existe\ f(3)\rightarrow f(3)=(3-2)^2\rightarrow f(3)=1$$

$$Solo\ tiene\ sentido\ plantear\ L^-=L\ porque\ no\ hay\ función\ a\ la\ derecha\ de\ x=3$$

$$L^-=\lim_{x\to(3)^-}(2-x^2)=evaluar=1$$

$$f(3)=L\rightarrow 1=1$$

La función es continua en $x=3$.

La derivabilidad se estudia sobre la función derivada.

$$f'(x)=\begin{cases}-2x & si\quad -1<x<1\\2(x-2) & si\quad 1<x<3\end{cases}$$

La derivada lateral a la derecha de $x=-1$ tiende a 2.

La derivada lateral a la izquierda de $x=3$ tiende a 2.

En el punto frontera $x=1$ estudiamos las derivadas laterales.

$$f'(1^-)=-2$$

$$f'(1^+)=-2$$

Por lo tanto, la función es derivable en $x=1$.

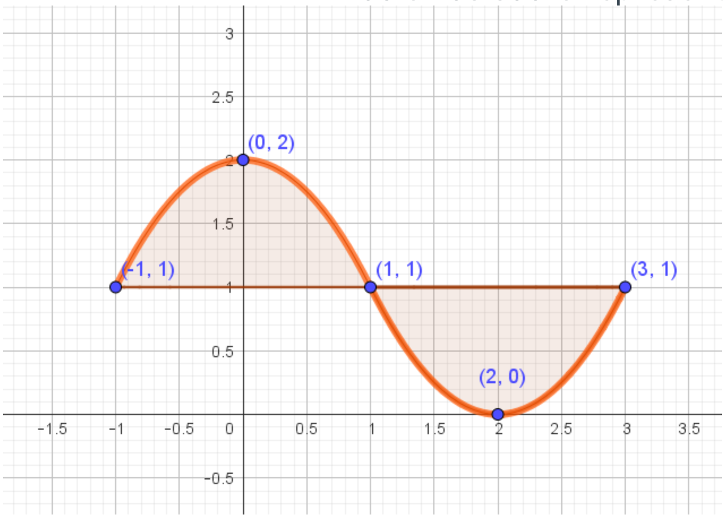
La función $g(x)$ es continua y derivable por ser un polinomio de grado cero.

b) La parábola $f(x)=2-x^2$ se puede dibujar subiendo dos unidades la gráfica de la parábola cóncava $y=-x^2$.

La parábola $f(x)=(x-2)^2$ es un desplazamiento de dos unidades hacia la derecha de la parábola convexa $y=x^2$.

La función $f(x)$ es continua y suave en $x=1$.

La función $g(x)=1$ es una recta horizontal que pasa por el punto $(0,1)$.


(0, 2)
(-1, 1)
(1, 1)
(3, 1)
(2, 0)
3
2.5
2
1.5
1
0.5
-0.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5

PROBLEMA 4

Se considera la función $f(x) = 1 - \frac{4}{3+x}$

a) Halle el dominio de la función y los puntos de corte de su gráfica con los ejes de coordenadas.

b) Calcule las asíntotas de la función.

c) Obtenga los puntos donde la recta tangente a la gráfica de la función tiene pendiente 1.

d) Estudie la curvatura de la función.

a) Encontramos un número más un cociente de polinomios, por lo que el dominio es igual a toda la recta real menos los valores que anulan al denominador:

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$$

Cortes con el eje horizontal:

$$f(x) = 0 \to 1 - \frac{4}{3+x} = 0 \to 1 = \frac{4}{3+x} \to 3 + x = 4 \to x = 1 \to (1,0)$$

Corte con el eje vertical:

$$f(0) = 1 - \frac{4}{3+0} \to f(0) = 1 - \frac{4}{3} \to f(0) = -\frac{1}{3} \to (0, -1/3)$$

b) Encontramos AV en la recta vertical $x = -3$.

$$L^- = \lim_{x\to(-3)^-} (1 - \frac{4}{3+x}) = evaluar = 1 - \frac{4}{0^-} = 1 + \infty = \infty$$

$$L^+ = \lim_{x\to(-3)^+} (1 - \frac{4}{3+x}) = evaluar = 1 - \frac{4}{0^+} = 1 - \infty = -\infty$$

Si escribimos la función en una sola fracción:

$$f(x) = 1 - \frac{4}{3+x} = \frac{3+x-4}{3+x} = \frac{x-1}{3+x}$$

Encontramos un cociente de polinomios del mismo grado, por lo que tendremos AH y no AO. Además, la AH cuando x tiende a infinito coincide con la AX cuando x tiende a menos infinito.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{3+x} = evaluar = \frac{\infty}{\infty}$$

La indeterminación se resuelve dividiendo los coeficientes que multiplican a la máxima potencia, por ser el mismo grado en numerador y en denominador. En consecuencia, existe AH en la recta horizontal $y = 1$.

c) Por la interpretación geométrica de la derivada, sabemos que la derivada de la función en un punto coincide con la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto. Por lo que debemos igualar la derivada a 1.

$$f(x) = 1 - \frac{4}{3+x}$$

$$f'(x) = \frac{4}{(3+x)^2} \to f'(x) = 1 \to \frac{4}{(3+x)^2} = 1 \to 4 = (3+x)^2 \to x = -5, x = -1$$

Obtenemos la imagen de esos puntos.

$$f(-1) = 1 - \frac{4}{3-1} \to f(-1) = -1 \to punto\ (-1,-1)$$

$$f(-5) = 1 - \frac{4}{3-5} \to f(-5) = 3 \to punto\ (-5,3)$$

d) La curvatura se estudia mirando el signo de la segunda derivada.

$$f'(x) = \frac{4}{(3+x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{4 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (3+x)}{(3+x)^4} \rightarrow f''(x) = \frac{-8}{(3+x)^3}$$

La segunda derivada nunca se anula, ya que al hacer $f''(x) = 0 \rightarrow -8 = 0 \rightarrow absurdo$. Por lo tanto, no hay puntos de inflexión.

Pero sí hay curvatura:

$$(-\infty, -3) \rightarrow x = -10 \rightarrow f''(-10) > 0 \rightarrow f(x)\ convexa$$

$$(-3, \infty) \rightarrow x = 0 \rightarrow f''(0) < 0 \rightarrow f(x)\ cóncava$$

PROBLEMA 5

Se considera la función

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}-x^2+2x & si\ \ x<2\\ x^2-2x & si\ \ x\geq 2\end{cases}}$$

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función.

b) Represente el recinto limitado por las rectas $y=2x$, $x=-1$, $x=1$ y la gráfica de la función.

a) Los dos tramos de la función $f(x)$ vienen expresados por polinomios. Las funciones polinómicas son continuas y derivables en toda la recta real. Solo debemos comprobar la condición de continuidad y de derivabilidad en el punto frontera.

$$Existe\ f(2)\rightarrow f(2)=2^2-2\cdot 2\rightarrow f(2)=0$$

$$L^-=\lim_{x\to(2)^-}(-x^2+2x)=evaluar=0$$

$$L^+=\lim_{x\to(2)^+}(x^2-2x)=evaluar=0$$

$$f(2)=L\rightarrow 0=0$$

La función es continua en $x=2$.

La derivabilidad se estudia sobre la función derivada.

$$f'(x)=\begin{cases}-2x+2 & si\ \ x<2\\ 2x-2 & si\ \ \ x>2\end{cases}$$

La derivada lateral a la izquierda de $x=2$ tiende a $f'(2^-)=-2\cdot 2+2=-2$.

La derivada lateral a la derecha de $x=2$ tiende a $f'(2^+)=2\cdot 2-2=2$.

Las derivadas laterales no coinciden, por lo que la función no es derivable en $x=2$.

b) La recta $y=2x$ pasa por el origen de coordenadas. Tiene una pendiente doble a la bisectriz del primer y tercer cuadrante. Pasa, por ejemplo, por los puntos $(-1,-2),(0,0)\ y\ (1,2)$.

Cada tramo de la función $f(x)$ es una parábola. De hecho, las fórmulas de ambas parábolas son opuestas entre sí.

$$si\ x<2$$

$$y=-x^2+2x$$

Parábola cóncava

Corte con eje horizontal: $y=0\rightarrow -x^2+2x=0\rightarrow x=0,x=2\rightarrow(0,0),(2,0)$

Vértice: $y'=-2x+2\rightarrow y'=0\rightarrow -2x+2=0\rightarrow x=1\rightarrow máximo\ relativo\ y\ absoluto\ en\ (1,1)$

$$si\ x\geq 2$$

$$y=x^2-2x$$

Parábola convexa

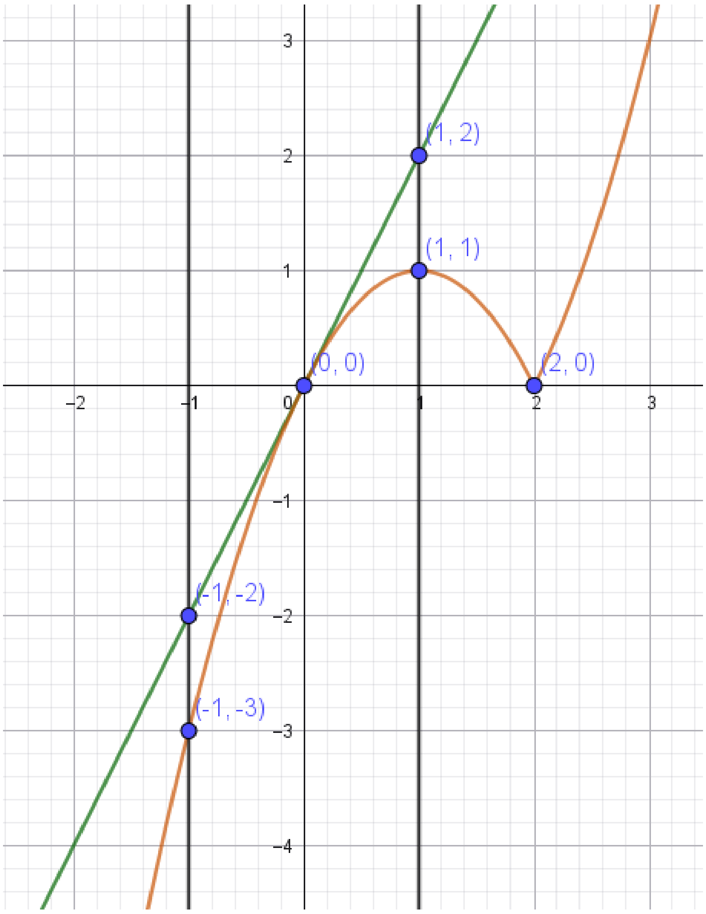
Corte con eje horizontal: $y=0\rightarrow x^2-2x=0\rightarrow x=0,x=2\rightarrow(0,0),(2,0)$

Vértice: $y'=2x-2\rightarrow y'=0\rightarrow 2x-2=0\rightarrow x=1\rightarrow mínimo\ relativo\ y\ absoluto\ en\ (1,-1)$

Dando valores x=-1 y x=1 en el tramo de la función para $x<2$, podemos obtener los cortes de las rectas verticales con la función $f(x)$ y con la recta $y=2x$.

$$si\ x=-1\rightarrow f(-1)=-3\rightarrow y(1)=-2$$

$$si\ x=1\rightarrow f(1)=1\rightarrow y(1)=2$$


(1, 2)
(1, 1)
(0, 0)
(2, 0)
(-1, -2)
(-1, -3)
-2
-1
0
1
2
3
3
2
1
-1
-2
-3
-4

PROBLEMA 6

Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} 3+e^x & si\ \ x<1 \\ x^2+ax+2 & si\ \ x\geq 1 \end{cases}$$

a) Determine el valor de a para que la función sea continua en toda la recta real. Para ese valor de a, ¿es la función derivable?

b) Para $a=-3$, calcule la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=0$.

c) Para $a=-3$, represente la región limitada por la gráfica de la función, las rectas $x=2$, $x=4$ y el eje de abscisas.

a) En el primer tramo tenemos un polinomio más una exponencial. En el segundo tramo, un polinomio. Por lo tanto, son continuas y derivables en los intervalos abiertos a la izquierda de $x=1$ y a la derecha de $x=1$.

Estudiemos la continuidad en el punto frontera.

$$Existe\ f(1)\rightarrow f(1)=1^2+a\cdot 1+2\rightarrow f(1)=3+a$$

$$L^-=\lim_{x\to(1)^-}(3+e^x)=evaluar=3+e$$

$$L^+=\lim_{x\to(1)^+}(x^2+ax+2)=evaluar=3+a$$

$$L^-=L^+=L\rightarrow 3+e=3+a\rightarrow a=e$$

$$f(1)=L\rightarrow 3+a=3+a$$

Para $a=e$ la función es continua en el punto frontera.

Calculamos la derivada, tomando $a=e$:

$$f'(x)=\begin{cases} e^x & si\ \ x<1 \\ 2x+e & si\ \ x>1 \end{cases}$$

$$f'(1^-)=e^1=e$$

$$f'(1^+)=2+e$$

Las derivadas laterales no son iguales, por lo que la función no es derivable en el punto frontera $x=1$.

b) Para $a=-3$ tenemos:

$$f(x)=\begin{cases} 3+e^x & si\ \ x<1 \\ x^2-3x+2 & si\ \ x\geq 1 \end{cases}$$

Para estudiar la recta tangente en $x=0$ necesitamos solo el tramo de la función a la izquierda de $x=1$.

La ecuación de la recta tangente en $x=0$ se calcula con ayuda de la interpretación geométrica de la derivada.

$$f'(0)=\frac{y-f(0)}{x-0}$$

$$e^0=\frac{y-(3+e^0)}{x-0}\rightarrow 1=\frac{y-4}{x}\rightarrow x=y-4\rightarrow x+4=y$$

c) Para $a=-3$ tenemos:

$$f(x)=\begin{cases} 3+e^x & si\ \ x<1 \\ x^2-3x+2 & si\ \ x\geq 1 \end{cases}$$

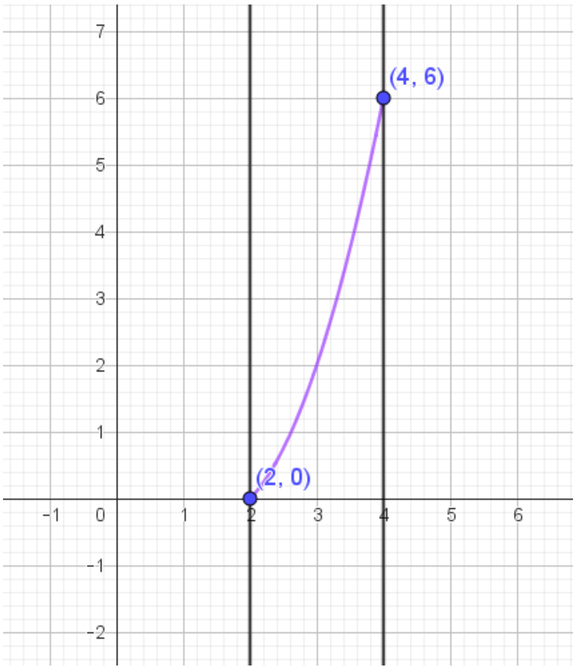
Debemos estudiar la gráfica de la parábola, por estar el intervalo $[2,4]$ a la derecha de $x=1$.

Sacamos los cortes de la parábola convexa con el eje horizontal.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = 1, x = 2 \rightarrow (1,0), (2,0)$$

$$Vértice: f'(x) = 2x - 3 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2} \rightarrow mínimo\ relativo$$

$$Imagen\ en\ los\ extremos\ del\ intervalo: f(2) = 0, f(4) = 6$$



PROBLEMA 7

Trinidad, una persona ahorradora, deposita 5.000€ en un fondo de inversión y el capital final que obtiene cuando transcurren t años viene dado por la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(t)=\begin{cases}5.000\cdot(1+0,05\,t) & si\ \ 0\le t\le 1\\ 5.000\cdot 1,05^{t} & si\ \ t>1\end{cases}}$$

a) ¿Cuánto tiempo debe mantener invertido el dinero si el capital final que se obtiene es de 5.931,19€?

b) Calcule los intereses que obtiene Trinidad entre el año 2 y el año 4, si se conoce que los intereses que genera esta inversión entre el año t_1 y el año t_2 vienen dados por $I=f(t_2)-f(t_1)$.

c) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función f.

d) Estudie la monotonía de la función f y esboce su gráfica.

a) Buscamos que la imagen de la función sea igual a 5.931,19. Por lo tanto:

$$f(t)=5.931{,}19$$

Tenemos dos tramos de funciones. Por lo que debemos igualar ambas funciones a la imagen.

$$[0,1]\to 5.000\cdot(1+0{,}05\cdot t)=5.931{,}19\to 1+0.05\cdot t=1.18\to 0.05\cdot t=0.18\to t=3{,}6\notin[0,1]$$

$$(1,\infty)\to 5.000\cdot 1{,}05^{t}=5.931{,}19\to 1{,}05^{t}=1{,}18\to \ln(1{,}05^{t})=\ln(1{,}18)\to t\cdot\ln(1{,}05)=\ln(1{,}18)\to t=3{,}39\ años$$

b)

$$f(2)=5.000\cdot 1{,}05^{2}=5.512{,}5\ €$$

$$f(4)=5.000\cdot 1{,}05^{4}=6.077{,}5\ €$$

Los intereses se obtienen con la diferencia de ambos valores:

$$I=565\ €$$

c) Los polinomios y las exponenciales son funciones continuas y derivables en toda la recta real. Por lo que solo debemos estudiar lo que pasa en el punto frontera $t=1$.

$$f(1)=5.000\cdot(1+0{,}05)=5.250$$

$$L^{-}=\lim_{t\to 1^{-}}(5.000\cdot[1+0{,}05\cdot t])=5.250$$

$$L^{+}=\lim_{t\to 1^{+}}(5.000\cdot 1{,}05^{t})=5.250$$

$$L^{-}=L^{+}=L$$

$$f(1)=L\to 5.250=5.250$$

Hacemos la derivada de la función:

$$f'(t)=\begin{cases}5.000\cdot 0{,}05 & si\ \ 0<t<1\\ 5.000\cdot 1{,}05^{t}\cdot\ln(1{,}05) & si\ \ t>1\end{cases}\to f'(t)=\begin{cases}250 & si\ \ 0<t<1\\ 243{,}95\cdot 1{,}05^{t} & si\ \ t>1\end{cases}$$

La función es suave en el punto frontera, si las derivadas laterales son iguales:

$$f'(1^{-})=\lim_{t\to 1^{-}}(250)=250$$

$$f'(1^{+})=\lim_{t\to 1^{-}}(243{,}95\cdot 1{,}05^{t})=256{,}15$$

Las derivadas laterales no coinciden, por lo que la función no es derivable en el punto frontera.

d) Para estudiar la monotonía obtenemos los puntos críticos, igualando la primera derivada a cero.

$$f'(t) = 0$$

$$(0,1) \rightarrow f'(t) = 250 \quad \rightarrow 250 = 0 \rightarrow Absurdo \rightarrow no\ hay\ extremos\ relativos$$

$$(1,\infty) \rightarrow f'(t) = \ 243{,}95 \cdot 1{,}05^t \rightarrow 243{,}95 \cdot 1{,}05^t = 0 \rightarrow la\ exponencial\ nunca\ se\ anula$$

No hay extremos relativos. Miramos el signo de la derivada para conocer el crecimiento o decrecimiento.

$$(0,1) \rightarrow f'(t) = 250 \ \rightarrow derivada\ siempre\ positiva \ \rightarrow función\ estrictamente\ creciente$$

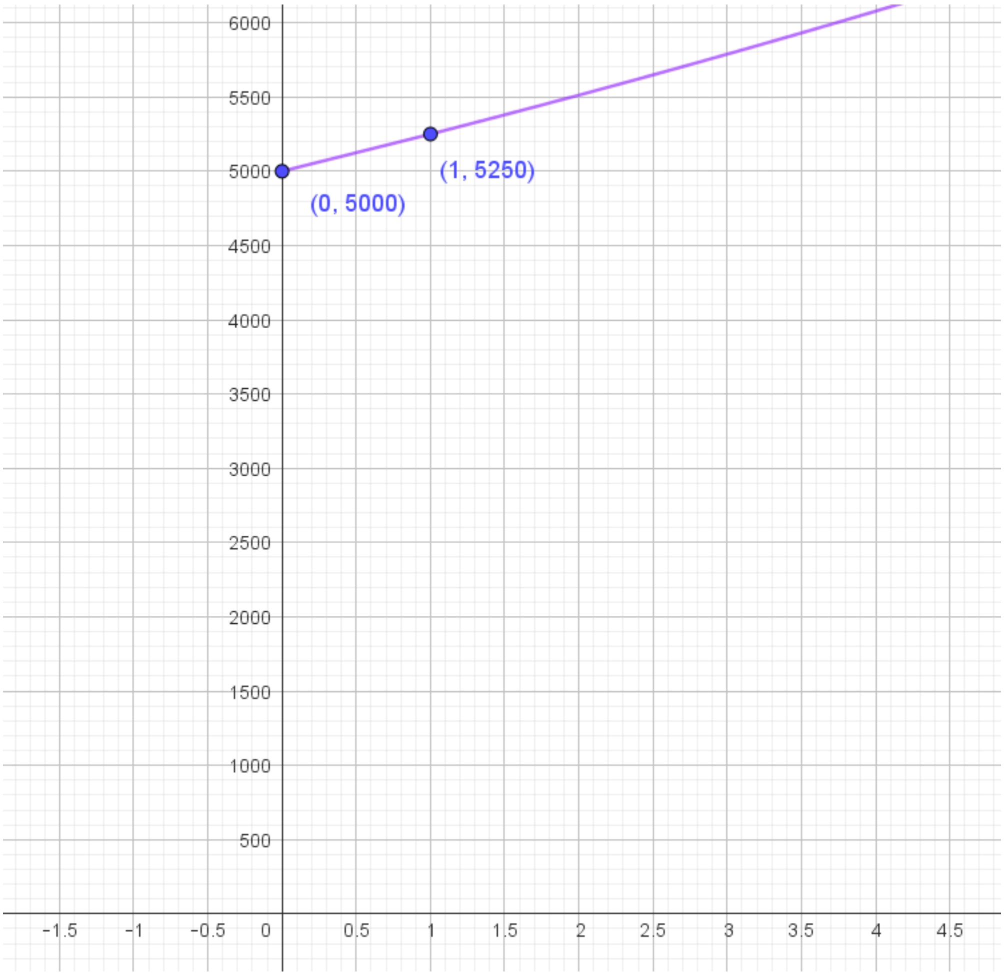
$$(1,\infty) \rightarrow f'(t) = \ 243{,}95 \cdot 1{,}05^t \rightarrow sustituir\ t = 2 \rightarrow f(2) > 0 \rightarrow estrictamente\ creciente$$

Por lo tanto, tenemos la gráfica de una recta en el intervalo $[0,1]$. Y una recta se dibuja con un par de puntos.

$$t = 0 \rightarrow f(0) = 5.000 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot 0) = 5.000$$

$$t = 1 \rightarrow f(1) = 5.000 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot 1) = 5.250$$

La función es continua en el punto frontera. Y a partir de $t = 1$ tenemos la gráfica de una exponencial. Que hemos demostrado que es estrictamente creciente en todos su dominio.



PROBLEMA 8

Un periódico digital ha publicado una noticia de última hora. El número de personas que han visto la noticia t horas después de su lanzamiento viene modelado por la función:

$$\boldsymbol{N(t) = 500.000 \cdot \left(1 - e^{-0.2 \cdot t}\right)}$$

Para $t > 0$.

a) Estudie la monotonía y la curvatura de la función N.

b) Represente gráficamente la función N y describa su tendencia a lo largo del tiempo.

c) ¿Cuánto tiempo ha debido de pasar para que la noticia haya sido vista por 450.000 personas?

d) La velocidad de difusión de la noticia (número de personas por hora que han visto la publicación) es $N'(t)$. ¿Qué conclusión se obtiene al comparar $N'(t)$ en los instantes $t = 1$ y $t = 10$?

a) El dominio de la función es toda la recta real, por ser el exponente de la exponencial un polinomio de grado uno.

Derivamos la función.

$$N' = 500.000 \cdot (-e^{-0,2 \cdot t}) \cdot (-0,2) = 100.000 \cdot e^{-0,2 \cdot t}$$

La primera derivada nunca se anula, porque la función exponencial nunca corta al eje horizontal. Por lo tanto, no hay puntos críticos.

Para conocer el crecimiento, evaluamos la derivada en cualquier punto de la recta real:

$$N'(0) = 100.000 \cdot e^0 > 0$$

$$N(t) \; estrictamente \; creciente \; en \; todo \; su \; dominio$$

Calculamos la segunda derivada:

$$N'' = 100.000 \cdot e^{-0,2 \cdot t} \cdot (-0,2) = -20.000 \cdot e^{-0,2 \cdot t}$$

La segunda derivada nunca se anula. Por lo que no hay candidatos a puntos de inflexión.

Vemos la curvatura evaluando la segunda derivada en cualquier punto del dominio:

$$N''(0) = -20.000 \cdot e^0 < 0$$

$$N(t) \; cóncava \; en \; todo \; su \; dominio$$

b) En $t = 0$ tenemos una estimación de la audiencia inicial, lo cual nos sirve para dibujar la gráfica para $t > 0$.

$$N(0) = 500.000 \cdot (1 - e^0) = 0$$

La función crece de manera cóncava, sin alcanzar un máximo relativo, ya que hemos demostrado en el apartado anterior la ausencia de extremos relativos.

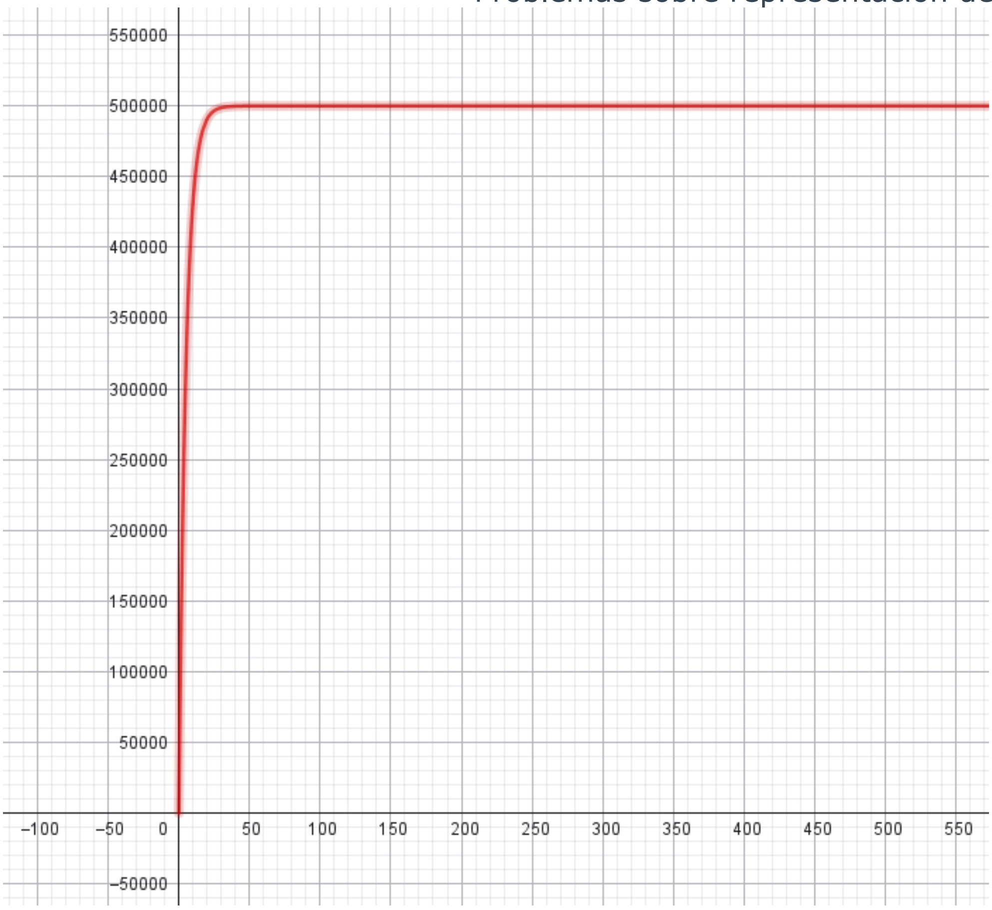
¿Estará limitado su crecimiento por una asíntota horizontal?

Estudiamos el límite de la función cuando el tiempo tiende a infinito.

$$\lim_{t \to \infty} 500.000 \cdot (1 - e^{-0.2 \cdot t}) = evaluar = 500.000 \cdot (1 - e^{-\infty}) = 500.000 \cdot (1 - 0) = 500.000$$

Existe AH en $y = 500.000$.

El crecimiento de la función nunca supera el valor de 500.000 personas.



c) La noticia es vista por 450.000 personas cuando la imagen de la función es igual a 450.000.

$$500.000 \cdot (1 - e^{-0.2 \cdot t}) = 450.000$$

$$(1 - e^{-0.2 \cdot t}) = \frac{9}{10}$$

$$-e^{-0,2t} = -\frac{1}{10}$$

$$e^{-0,2t} = \frac{1}{10}$$

Aplicamos logaritmo neperiano en ambos lados.

$$\ln[e^{-0,2t}] = \ln\left[\frac{1}{10}\right]$$

$$-0,2t = -2,30$$

$$t = 11,5 \; horas$$

d) Evaluamos la derivada en los tiempos $t = 1$ y $t = 10$.

$$N'(t) = 100.000 \cdot e^{-0,2 \cdot t}$$

$$N'(1) = 100.000 \cdot e^{-0,2 \cdot 1} = 81.873,08$$

$$N'(10) = 100.000 \cdot e^{-0,2 \cdot 10} = 13.533,53$$

En ambos tiempos la derivada es positiva, por lo que la función audiencia crece en ambos instantes. Esto ya lo sabíamos de los apartados anteriores.

El valor de la derivada en t=10 es menor que el valor de la derivada en t=1, por lo que la velocidad de crecimiento se atenúa. Es decir, con el paso del tiempo, se ralentiza el crecimiento de la audiencia.

PROBLEMA 9

La velocidad media del viento en la zona de Sierra Nevada, prevista para cierto día, viene dada por la función $v(t)$ expresada en km/h, donde t es el tiempo expresado en horas:

$$\boldsymbol{v(t)=\begin{cases} t^2-8t+60 & si \quad 0\le t\le 10\\ -t^2+32t-140 & si \quad 10<t\le 24\end{cases}}$$

a) Comprueba que la función v es continua y derivable.

b) Represente gráficamente la función, estudiando previamente la monotonía y calculando los extremos absolutos.

c) La Agencia Estatal de Meteorología emite avisos de alerta por vientos siguiendo el código de colores: naranja para vientos entre 100 y 140 km/h, y rojo para vientos de más de 140 km/h. Según la previsión, indique si se debe emitir alguna alerta naranja en Sierra Nevada ese día y durante qué horas estaría activa. ¿Se emitiría alerta roja?

a) $[0,10)$ la función es continua y derivable por ser un polinomio.

$(10,24]$ la función es continua y derivable por ser un polinomio.

Estudiamos las condiciones de continuidad en el punto frontera $t=10$.

$$v(10)=80$$
$$L^-=80$$
$$L^+=80$$
$$L^-=L^+=L=80$$
$$v(10)=L\to 80=80$$

La función es continua en el punto frontera.

Estudiamos la suavidad en el punto frontera.

$$v'(t)=\begin{cases} 2t-8 & si \quad 0\le t<10\\ -2t+32 & si \quad 10<t\le 24\end{cases}$$
$$v'(10^-)=evaluar=12$$
$$v'(10^+)=evaluar=12$$
$$v'(10^-)=v'(10^+)\to 12=12$$

La función es derivable en el punto frontera.

b) Aplicamos la condición necesaria de extremo relativo, anulando la primera derivada.

$$2t-8=0\to t=4\,\epsilon\,[0,10]$$
$$-2t+32=0\to t=16\,\epsilon\,[10,24]$$

Miramos el signo de la derivada en cada uno de los siguientes intervalos abiertos.

$$(0,4)\to v'(2)<0\to f(x)\ estrictamente\ decreciente$$
$$(4,10)\to v'(6)>0\to f(x)\ estrictamente\ creciente$$
$$(10,16)\to v(13)>0\to f(x)\ estrictamente\ creciente$$
$$(16,24)\to v'(2)<0\to f(x)\ estrictamente\ decreciente$$

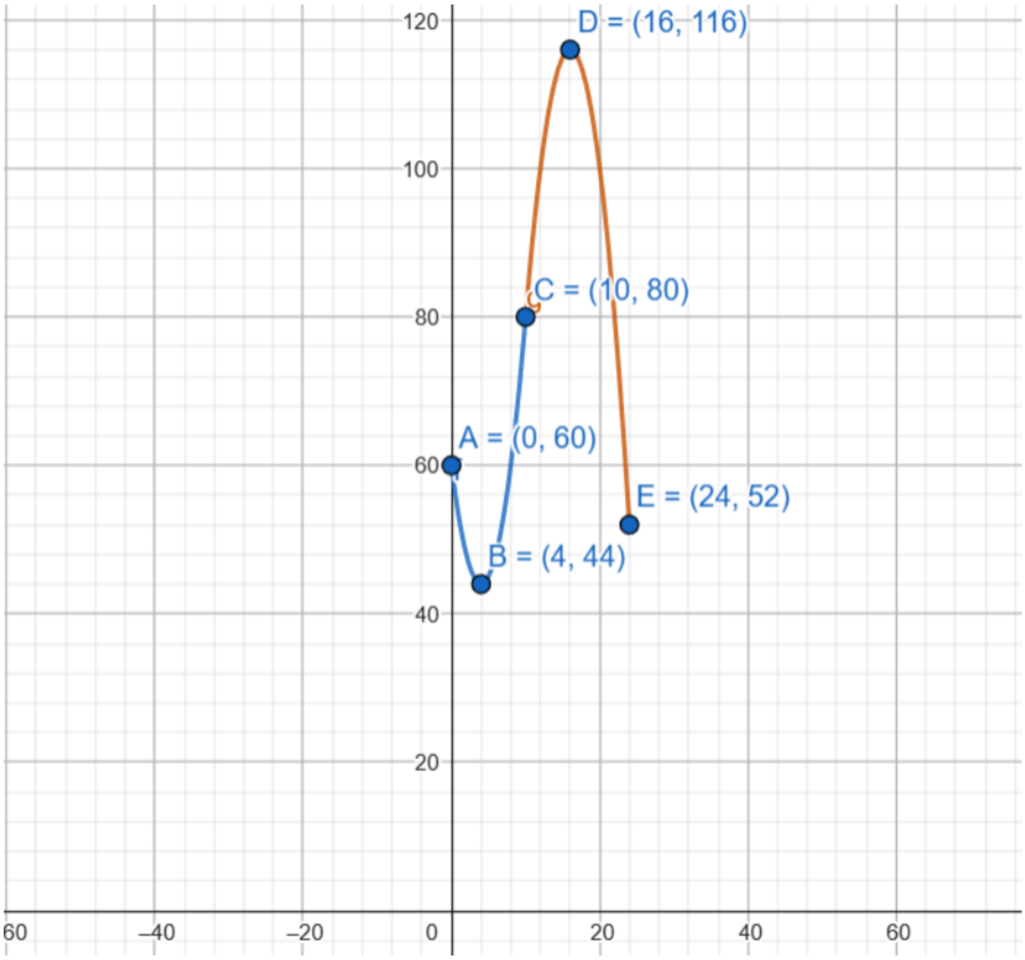
Por lo tanto, en $x=4$ encontramos un mínimo relativo y en $x=16$ un máximo relativo.

Estudiamos la imagen en los extremos relativos y en los valores que delimitan a los intervalos del dominio para estudiar los extremos absolutos.

$$v(0)=60$$
$$v(4)=44\to mínimo\ absoluto$$
$$v(10)=80$$

$$v(16) = 116 \rightarrow máximo\ absoluto$$

$$v(24) = 52$$



c) La alerta roja nunca se activa porque el máximo absoluto es de 116 km/h, por lo que nunca se alcanza el valor de 140 km/h.

Para saber si se activa la alerta naranja, igualamos cada tramo de la función a 100.

$$t^2 - 8t + 60 \ = 100 \rightarrow t^2 - 8t - 40 = 0 \rightarrow soluciones \rightarrow t = \ -3{,}48\,;t = 11{,}48 \ \notin [0{,}10]$$

$$-t^2 + 32t - 140 \ = 100 \rightarrow -t^2 + 32t - 240 = 0 \rightarrow soluciones \rightarrow t = \ 12\,;t = 20 \ \in [12{,}24]$$

Como hay un máximo relativo y absoluto en $t = 16$ significa que la alerta naranja se activa a las 12 horas, se alcanza el máximo de velocidad a las 16 horas, y se desactiva la alerta naranja a las 20 horas.

PROBLEMA 10

Estudia y representa gráficamente la función $f(x)=\frac{x}{x+2}$.

Dominio:

$$Dom(f)=\mathcal{R}-\{x+2=0\}\ \rightarrow\ \mathcal{R}-\{-2\}$$

Cortes con los ejes:

$$(0,0)$$

No hay simetría. La función $f(x)$ no coincide con $f(-x)$ ni tampoco con $-f(-x)$.

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to-2^-}\frac{x}{x+2}=evaluar=\frac{-2}{-2^-+2}=\frac{-2}{0^-}=+\infty$$
$$\lim_{x\to-2^+}\frac{x}{x+2}=evaluar=\frac{-2}{-2^++2}=\frac{-2}{0^-}=+\infty$$

Hay asíntota vertical en $x=-2$.

Hay asíntota horizontal porque el grado del numerador es menor o igual que el grado del denominador.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+2}=\frac{\infty}{\infty}\rightarrow indeterminación$$

Como el grado del numerador es igual al grado del denominador, el límite cuando x tiende a infinito coincide con el cociente de los coeficientes que multiplican la máxima potencia.

Hay asíntota horizontal en $y=1$ cuando x tiende a más y a menos infinito, porque en cociente de polinomios coincide la AH en ambos lados.

Condición necesaria de extremos relativo: anular la primera derivada.

$$f´(x)=\frac{1\cdot(x+2)-1\cdot(x)}{(x+2)^2}=\frac{2}{(x+2)^2}$$
$$f'(x)=0\rightarrow 2=0\rightarrow Absurdo\ matemático$$

No hay puntos críticos. Por lo tanto, no hay extremos relativos.

Miramos el signo de la derivada a la izquierda y a la derecha del punto que no pertenece al domino:

$$(-\infty,-2)\rightarrow f´(-3)>0\rightarrow f(x)\ estrictamente\ creciente$$
$$(2,+\infty)\rightarrow f´(2)>0\rightarrow f(x)\ estrictamente\ creciente$$

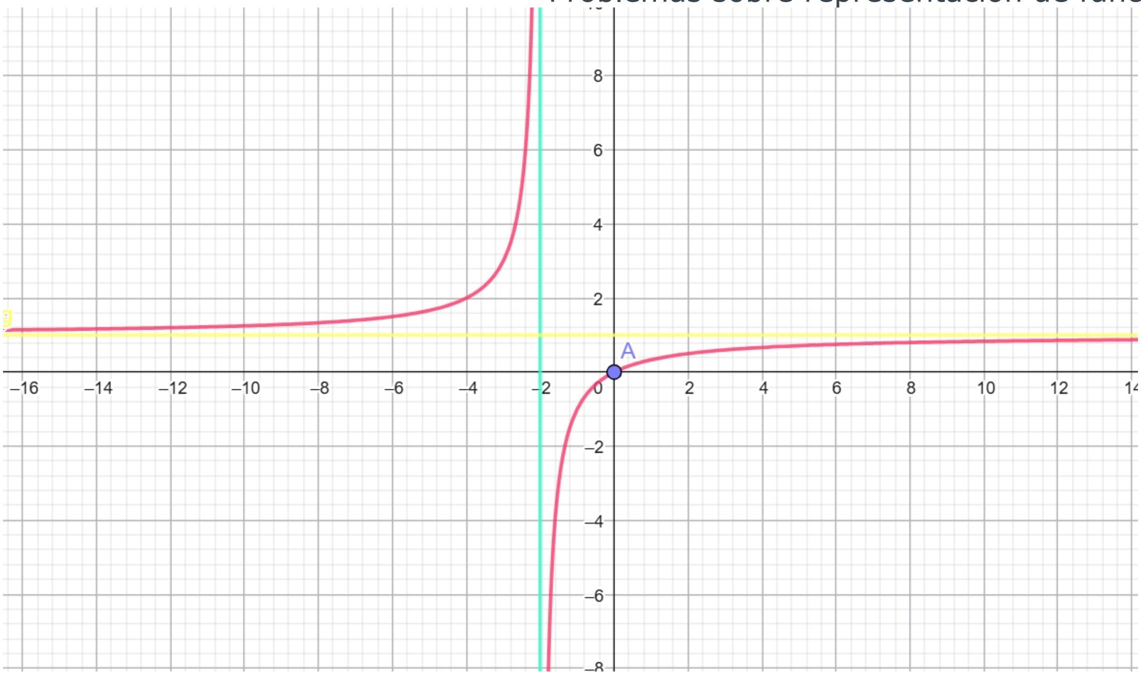
Condición necesaria de punto de inflexión: anular la segunda derivada.

$$f´´(x)=\frac{2\cdot[-2(x+2)]}{((x+2)^2)^2}=\frac{-4}{(x+2)^3}$$
$$f'^{\prime(x)}=0\rightarrow -4=0\rightarrow Absurdo\ matemático$$

No hay candidato a punto de inflexión. Por lo tanto, no hay punto de inflexión.

Miramos el signo de la segunda derivada a la izquierda y a la derecha del punto que no pertenece al domino:

$$(-\infty,-2)\rightarrow f´´(-3)>0\rightarrow f(x)\ convexa$$
$$(2,+\infty)\rightarrow f´´(2)<0\rightarrow f(x)\ cóncava$$


A
8
6
4
2
–16
–14
–12
–10
–8
–6
–4
–2
0
2
4
6
8
10
12
–2
–4
–6
–8