

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
KUNGLIGA TEKNISKA HÖGSKOLAN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
GÖTEBORGS UNIVERSITET

Matematik- och fysikprovet Chalmers, KTH, SU, GU

Matematikprovet SU, GU

CHALMERS: Arkitektur och teknik, Automation och mekatronik,
Elektroteknik, Teknisk fysik, Teknisk kemi, Teknisk matematik

KTH: Design och produktframtagning, Elektroteknik, Farkostteknik,
Maskinteknik, Materialdesign, Teknisk fysik, Teknisk matematik

SU: Kandidatprogrammen i matematik, i matematik och datavetenskap, i
matematik och maskininlärning, i matematisk ekonomi och statistik, i
astronomi, i fysik, i meteorologi, samt Sjukhusfysikerprogrammet

GU: Kandidatprogrammen i fysik, samt i matematik

Antagningsprov 2025 - MATEMATIK

2025-05-10, kl. 9.00 – 12.00

Skrivtid: 180 min

Inga hjälpmedel tillåtna.

Svar på uppgifterna i del A (uppgifter 1 - 20) och del B (uppgifter 21 - 30) lämnas in på utdelat svarsformulär. Den fullständiga lösningen till uppgiften i del C lämnas in på utdelat Lösblad. Tesen med uppgifterna och kladdpapper lämnas *inte* in. Du rekommenderas att ta med dig tesen med dina svar inringade / ifyllda, för att i efterhand kunna jämföra med facit.

A. Markera rätt svar genom att ringa in rätt svarsalternativ på svarsformuläret. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. Givet att $x = (\sqrt[5]{3})^2 \cdot \sqrt{2}$, så gäller att x är lika med

- (a) $6^{\frac{9}{10}}$; (b) $6^{\frac{1}{5}}$; (c) $5^{\frac{1}{5}}$; (d) inget av (a)-(c).

2. Om $a = \sqrt{3}$ och $b = 5$ så är $U = \frac{(a+b)^3 + (a-b)^3}{(a+b)^2 - (a-b)^2}$ lika med

- (a) $\frac{3\sqrt{3}}{25}$; (b) $\frac{17}{5}$; (c) $\frac{39}{5}$; (d) inget av (a)-(c).

3. Polynomet $P(x) = 6x^4 + x^3 - 25x^2 - 4x + 4$ är delbart (utan rest) med

- (a) $x - 1$; (b) $2x - 1$; (c) $3x - 1$; (d) inget av (a)-(c).

4. Talet $\sqrt{8+2\sqrt{7}} - \sqrt{8-2\sqrt{7}}$ är lika med
- (a) 2; (b) $2\sqrt[4]{7}$; (c) $4\sqrt{7}$; (d) inget av (a)-(c).
5. Uttrycket $U = \sqrt{(\sin x - 1)^2} + \sqrt{(\sin x + 1)^2}$ är för alla reella x lika med
- (a) 0; (b) $2 \sin x$; (c) 2; (d) inget av (a)-(c).
6. Om $x \boxplus y = \log_x y$ för alla positiva reella tal $x \neq 1$ och $y \neq 1$, så gäller för alla sådana x, y att
- (a) $x \boxplus y = y \boxplus x$; (b) $x \boxplus y = -y \boxplus x$;
(c) $x \boxplus y = \frac{1}{y \boxplus x}$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.
7. Alla lösningar till olikheten $\log_x \frac{1}{2} > 1$ ges av alla x som uppfyller
- (a) $0 < x < \frac{1}{2}$; (b) $\frac{1}{2} < x < 1$; (c) $x > 1$; (d) inget av (a)-(c).
8. Antalet heltalslösningar till olikheten $\sqrt{2-x} > \sqrt{3x-2}$ är
- (a) 0; (b) 1; (c) ändligt, skilt från 0 och 1; (d) oändligt.
9. Vi söker det minsta av alla reella tal a , för vilka ekvationssystemet $x + y = a$;
 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$ endast har lösningar där både x och y är positiva. Då gäller
- (a) det finns inga tal a med den egenskapen;
(b) det finns sådana tal, men det finns inget minsta bland dem;
(c) det finns ett minsta bland dessa tal, men det går inte att bestämma;
(d) inget av (a)-(c).
10. För alla positiva tal x och alla reella tal y gäller att
- (a) $e^{x^y} = e^{xy}$; (b) $e^{x^y} = (e^x)^y$;
(c) $e^{x^y} = e^{(x^y)}$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.
11. Antalet heltalslösningar till olikheten $e^x + \sqrt{e^x - 1} \leq 13$ är
- (a) oändligt; (b) 2; (c) 3; (d) inget av (a)-(c).
12. För alla positiva reella tal x och y gäller att
- (a) $\ln x + \ln \frac{y}{x} = \ln y$; (b) $\ln x \cdot \ln y = \ln(x + y)$;
(c) $\ln \frac{x}{y} + \ln \frac{y}{x} = 1$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

13. För alla x som uppfyller $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ är $\ln |\sin 2x|$ identiskt lika med
- (a) $\ln 2 + \ln (\sin (\pi + x)) + \ln (-\cos x)$; (b) $\ln 2 + \ln (\sin x) + \ln (\cos (\pi - x))$;
 (c) $\ln 2 + \ln (-\sin x) + \ln (|\cos x|)$; (d) inget av (a)-(c).
14. Om k är ett heltal och likheten $\sin (k\pi - x) = \sin x$ gäller för alla reella x , så kan man dra slutsatsen att talet k är
- (a) positivt; (b) jämnt; (c) udda; (d) inget av (a)-(c).
15. För alla udda heltal k och alla reella x gäller att
- (a) $\sin x = \cos \left(k\frac{\pi}{2} - x\right)$; (b) $\sin x = \cos \left(k\frac{\pi}{2} + x\right)$;
 (c) $\sin x = -\cos \left(k\frac{\pi}{2} - x\right)$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.
16. För triangeln ABC gäller att $|AB| = 5$ längdenheter, $|AC| = 4$ längdenheter samt att vinkeln vid hörnet A är 150° . Då gäller att sidan BC har längden
- (a) $\sqrt{21}$ l.e.; (b) $\sqrt{61}$ l.e.; (c) $\sqrt{41 + 20\sqrt{3}}$ l.e.; (d) inget av (a)-(c).
17. Vinkeln vid hörnet C i triangeln ABC är 40° . Punkten P på sidan AC är sådan att $AP = BP$. Om vinkeln APB är 80° , så gäller att
- (a) vinkeln $\angle ABC$ är 90° ; (b) vinkeln $\angle ABC$ är 80° ;
 (c) det går inte att avgöra; (d) det finns ingen sådan triangel.
18. För triangelarna ABC och $A_1B_1C_1$ gäller att $|AC| = |A_1C_1|$, $|AB| \neq |A_1B_1|$, att vinklarna vid A respektive A_1 är lika, samt att vinklarna vid B respektive B_1 är lika. Då gäller att
- (a) $|AC| \leq |BC|$; (b) $|AC| > |BC|$;
 (c) det går inte att avgöra; (d) det finns inga sådana trianglar.
19. För triangelarna ABC och $A_1B_1C_1$ gäller att $|AC| = |A_1C_1|$, $|BC| = |B_1C_1|$, $|AB| \neq |A_1B_1|$, samt att vinklarna vid A respektive A_1 är lika. Då gäller att
- (a) $|AC| \leq |BC|$; (b) $|AC| > |BC|$;
 (c) det går inte att avgöra; (d) det finns inga sådana trianglar.
20. Betrakta följande **Sats**: *Diagonalerna i en romb skär varandra under rät vinkel.* Av denna sats följer att
- (a) Om vinkeln mellan diagonalerna i en fyrhörning är rät, så är fyrhörningen en romb.
 (b) Om vinkeln mellan diagonalerna i en fyrhörning inte är rät, så är fyrhörningen inte en romb.
 (c) Om en fyrhörning inte är en romb, så är vinkeln mellan dess diagonaler inte rät.
 (d) Inget av (a)-(c).

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar på svarsformuläret. (2p för varje rätt svar)

21. Beräkna

$$\frac{\frac{3}{8} - \frac{5}{7}}{\frac{1}{5} + \frac{3}{4}}.$$

Ange svaret på formen $\frac{p}{q}$, där p, q är heltal och bråket $\frac{p}{q}$ är maximalt förkortat.

22. Bestäm alla reella tal a , för vilka ekvationen $x^2 + 2ax + 3a = 0$ har (minst) en positiv lösning. Ange det största heltalet a med den egenskapen.

23. Givet funktionen $f(x) = \frac{1 + \ln \sqrt{x}}{1 - \ln \sqrt{x}}$, beräkna $f'(x)$ och ange $f'\left(\frac{1}{e}\right)$.

24. Beräkna $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x^3 - \frac{1}{\pi - x} + \sin^2 x \right) dx$.

25. Beräkna och ange $\cos 75^\circ + \sin 15^\circ$.

26. Lös ekvationen

$$2 \ln \frac{1}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{\ln x} = 2.$$

Ange ekvationens största lösning.

27. Lös olikheten

$$\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x-a} > \frac{2}{x}.$$

Ange det största positiva talet a sådant att olikheten har exakt 123 negativa heltalslösningar.

28. Triangeln ABC är rätvinklig med rät vinkel vid hörnet C . Kateten AC har längden b (längdenheter). Cirkeln med medelpunkt C och radie b skär sidan AB i punkterna A och P och sidan BC i punkten Q . Givet att vinkeln $\angle PCQ$ är 30° , bestäm och ange längden av sträckan BQ .

29. Kvadraten $ABCD$ har sidlängd 1 längdenhet. Punkten P ligger på sidan AB och är sådan att $|AP| = \frac{1}{4}$ l.e. Punkten Q ligger på sidan CD . Sträckorna PQ och AC skär varandra i punkten S , där $|AS| = \frac{\sqrt{2}}{3}$ l.e. Bestäm och ange längden av sträckan CQ .

30. Cirklarna k_1 och k_2 med medelpunkter O_1 respektive O_2 har radier 7 längdenheter respektive 4 längdenheter. Avståndet mellan O_1 och O_2 är 9 längdenheter. Linjen t tangerar k_1 i punkten T_1 och k_2 i punkten T_2 . Bestäm längden av sträckan T_1T_2 .

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Bestäm alla reella tal $p \neq 1$ för vilka ekvationerna $x^2 + 2x + p = 0$ och $px^2 + 2x + 1 = 0$ har exakt en gemensam reell lösning.