

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**. Indica, en la primera hoja donde resuelves el examen, la opción elegida.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe a bolígrafo (no a lápiz) ordenadamente y con letra clara. Las faltas de ortografía, la mala presentación y no explicar adecuadamente las operaciones pueden restar hasta un máximo de 1 punto de la nota final.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

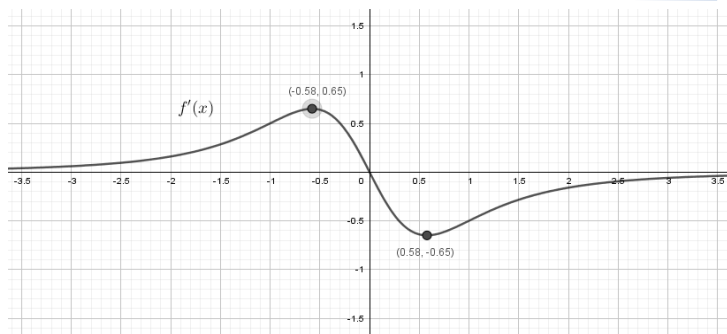
Opción A

Ejercicio 1.- a) [1 punto] Calcula $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{2}{x^2 - 1} \right)$

b) [1,5 puntos] Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{6} - \frac{3}{2} & \text{si } x < 3 \\ \ln(x-2) & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$. Calcular los puntos de la gráfica en que la recta

tangente a la función es paralela a la recta $r: x+3y=0$. Obtener abscisa y ordenada de esos puntos. Obtener la distancia de esos puntos a la recta r .

Ejercicio 2.- a) [1,5 puntos] El dominio de $f(x)$ es toda la recta real. Estudiar la monotonía, extremos relativos y puntos de inflexión de $f(x)$ a partir de la gráfica de su función derivada (imagen derecha). Viendo esta gráfica, ¿tenemos información suficiente para afirmar que existen asíntotas horizontales en $f(x)$?



Razona tu respuesta.

b) [1 punto] Estudiar la monotonía y los extremos relativos de la función $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Ejercicio 3.- a) [1 punto] Obtener el dominio de $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$

b) [1,5 puntos] Halla los coeficientes a, b y c sabiendo que la función $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene en $x=1$ un punto de derivada nula que no es extremo relativo y que la gráfica pasa por el punto $(1,1)$.

Ejercicio 4.- [2,5 puntos] Sea $f(x) = \sqrt{x-1}$. Obtener sus puntos de inflexión. Y obtener el punto de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x-1}$ a menor distancia del punto $P(5,0)$. Obtener dicha distancia mínima.

Opción B

Ejercicio 1.- a) [1,25 puntos] Obtener a para que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(3x)}{x^2} + \frac{a}{x} + 3x \right)$ sea finito. Obtener valor de dicho límite.

b) [1,25 puntos] Calcula las asíntotas horizontales de $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 9}}$.

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Sea la función $f(x) = \frac{x}{e^x}$ definida en toda la recta real. Determina el punto de la gráfica en el que la pendiente de la recta tangente es mínima. Obtener abscisa y su ordenada. Obtener valor de dicha pendiente mínima.

Ejercicio 3.- a) [1,25 puntos] Dadas las funciones $f(x) = x^2 - ax - 4$ y $g(x) = \frac{x^2}{2} + b$, halla los valores de a y b de manera que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ tengan la misma recta tangente en el punto $x = 3$. Halla la ecuación de dicha recta tangente en forma vectorial. ¿Podemos afirmar que esa recta tangente es paralela a una recta que tenga por vector director $\vec{w} = (-2, 6)$? Razona tus respuestas.

b) [1,25 puntos] Obtener la derivada de $f(x) = \frac{x}{x-1}$ mediante la definición formal de derivada.

Ejercicio 4.- [2,5 puntos] Estudia y representa $f(x) = \frac{-1}{4-x^2}$. Calcular dominio, cortes con los ejes, simetría, asíntotas, monotonía, extremos relativos, curvatura, puntos de inflexión y dibujar la gráfica. Explica claramente cada paso y realiza todas las operaciones necesarias para el estudio. Dibujar la gráfica sin detallar los pasos del estudio no será calificado positivamente.