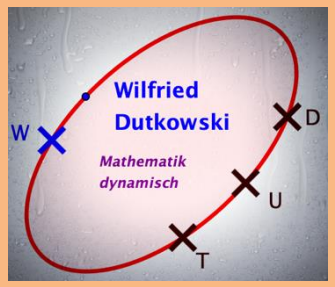


MNU SAARBRÜCKEN 2026



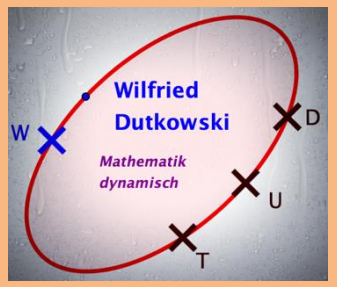
Archimedische Körper und ihre dynamischen Konstruktionen - Geometrie attraktiv

Skizzen zur Regeometrisierung des Mathematikunterrichtes

MNU – Bundeskongress Saarbrücken 2026



Agenda

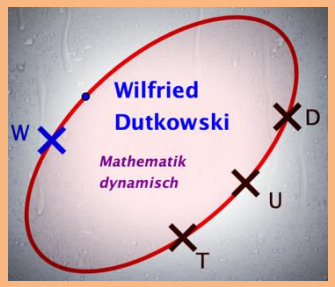


- Was mich umtreibt
- Körpergruppen
- Definition Archimedischer Körper
  - Umkugel
  - Kantenkugel
- Ausgangskörper
- Konstruktionsverfahren
  - Abschneiden
  - Explodieren
  - Drehen
- Platonische Körper verändern
- Mathematische Operationen und deren Auswirkungen auf Körper
- Didaktische Einordnung
- Fazit und Diskussion

© Wilfried Dutkowski



Was mich umtreibt



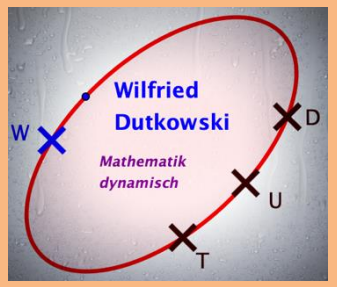
- Es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen,
  es ist nicht das Besitzen, sondern das Erwerben,
  es ist nicht das Dasein, sondern das **Hinkommen**,
  was den großen Genuss gewährt.

  [Schreiben von Gauß an Bolyai, Göttingen, 2. 9. 1808; in: Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauß und Wolfgang Bolyai. Hrsg. Von Franz Schmidt und Paul Stäckel, Leipzig 1899]
  zitiert nach: Martin Mattheis, Mainz, 2020

© Wilfried Dutkowski



Etwas moderner



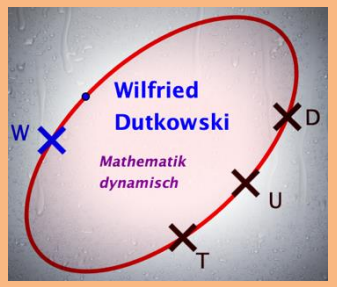
- ...] Der Grundgedanke einer operativen **Gesamtbehandlung** besteht darin, möglichst **verstehend** zu lernen, das Merkwissen auf ein Mindestmaß zu beschränken, Lerninhalte untereinander **funktional zu verbinden** und die Befähigung **selbstständigen** Lernens mit Hilfe des bereits erworbenen zu bestätigen. [...

aus: Weiser, Günter: Der Geometrieunterricht in der Hauptschule. Donauwörth, Auer Verlag, 1981. S. 71

© Wilfried Dutkowski



Geometrieunterricht



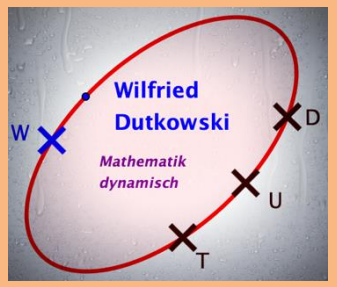
- Ebene
  - Dreiecke
  - Vierecke
  - Vielecke
  - Kreis
  - Spezifikationen
  - Satz des Pythagoras (Längensatz)
- Viel Berechnung wenig geometrische Inhalte
- Gebrauch der Formelsammlung

- Raum
  - Prismen
  - Würfel
  - Quader
  - Zylinder
  - Pyramide/Kegel
  - Kugel
  - Zentrische Streckung
- Viel Berechnungen wenig geometrische Inhalte
- Gebrauch der Formelsammlung

© Wilfried Dutkowski



Die Körpergruppen



- Konvexe Polyeder sind keine Sterne
- Ausgelassen sind :
  - Prismen bzw. Antiprismen
  - Johnson-Körper

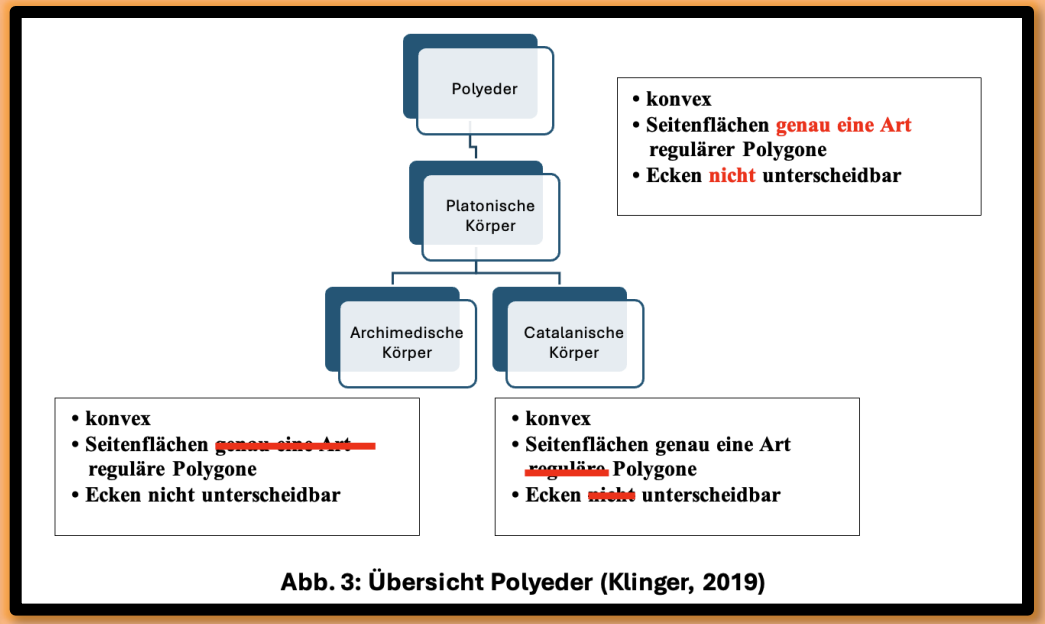
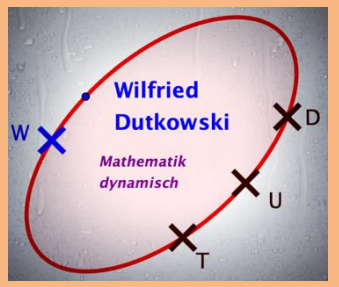


Abb. 3: Übersicht Polyeder (Klinger, 2019)

© Wilfried Dutkowski



Experimentieren im MU

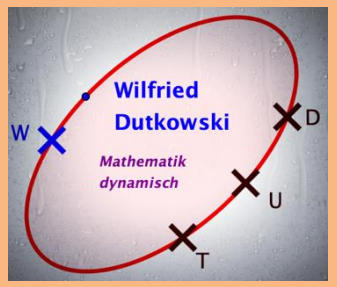


- Es entsteht kein unabwendbarer Schaden, ... den Schülern offensichtliche Invarianzen ... als offensichtlich akzeptiert (darzulegen), und die **gewonnene** Zeit nutzt, **Problemen** auf den Grund zu gehen, die bisher dem Geometrieunterricht verschlossen blieben.
- ...]mit den dynamischen Geometrieprogrammen ... wird ein experimenteller Ansatz möglich, das **Ausprobieren** und **Vermuten** wird zum fundamentalen Bestandteil des Unterrichtes [...

Elschenbroich, Hans – Jürgen: Geometrie beweglich mit Euklid. Bonn: Dümmler, 1996. S. 6



Antigenetischer Geometrieunterricht



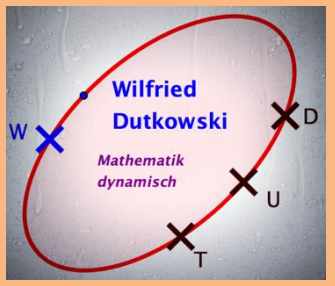
- *„Geometrie auf der niedrigsten, der nullten Stufe ist […] die Erfassung des Raumes, […] in dem das Kind lebt, atmet, sich bewegt, den es kennenlernen muss, den es erforschen und erobern muss, um besser in ihm leben, atmen und sich bewegen zu können“*
  [FREUDENTHAL, 1973, S. 376 f]
  zitiert nach Elschenbroich/Sträßer , 2026.

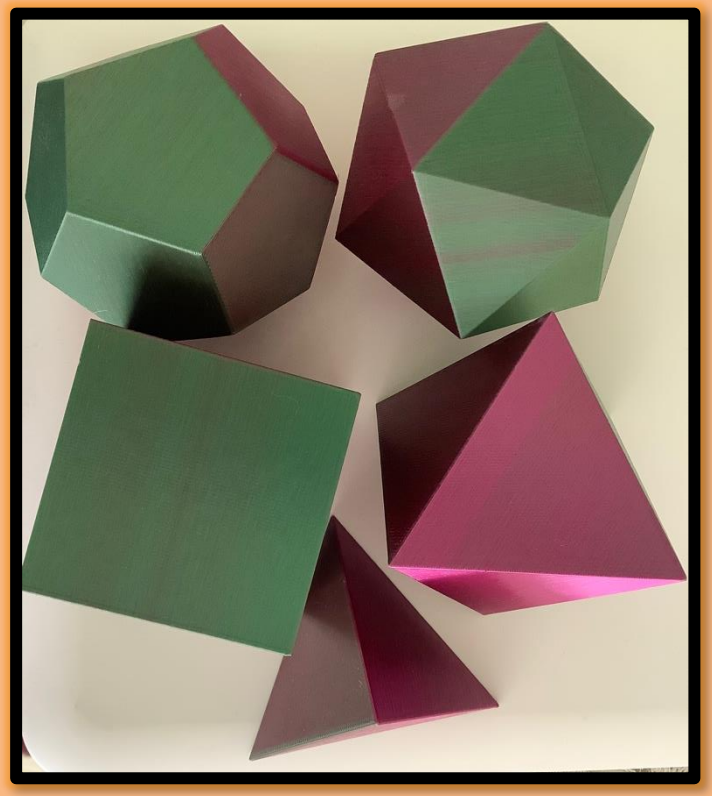
- Die Erfahrungen von Kindern sind durch das ‚Begreifen‘ von Räumlichen Strukturen geprägt, nicht von abstrakten Gebilden wie **Punkte** –also Objekte ohne Maße- oder **Linien**, also Objekte ohne Breite.
- Euklid beschreibt aber Körper aus der Bewegung solcher -im Prinzip- abstrakten Objekte.

© Wilfried Dutkowski



Besondere Bauklötze





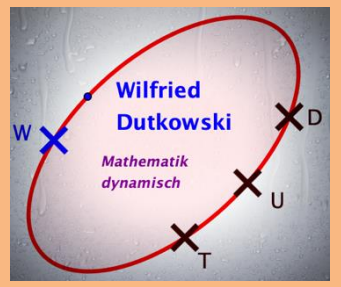
Platonische Körper aus dem 3D-Drucker von Rudolf Hrach, 2026

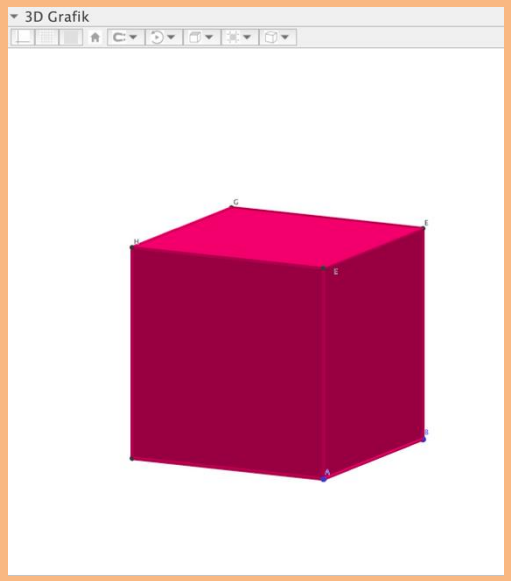
- Diese Bauklötze stehen in jeder mathematischen Sammlung kommen aber selten – also fast nie – zum obligatorischen Einsatz; obwohl sie Anlass zum **Staunen** im Sinne Martin Wagenscheins bieten.

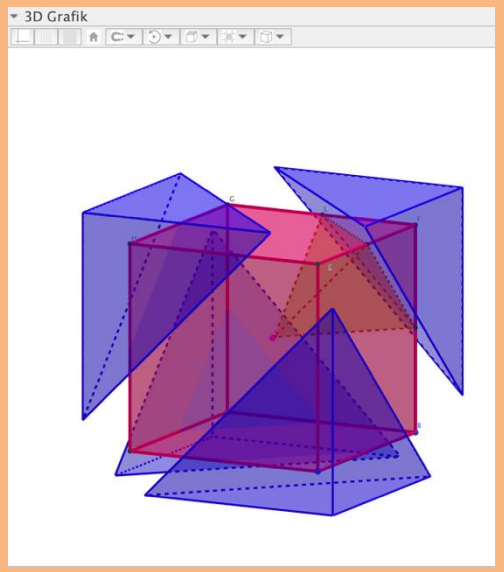
© Wilfried Dutkowski

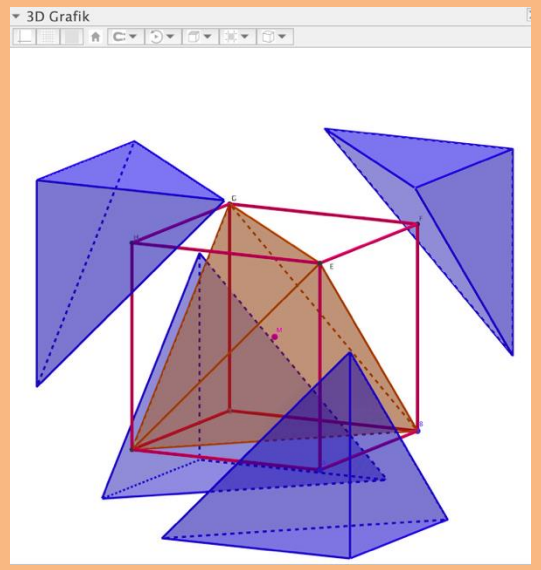


Alles passt!!









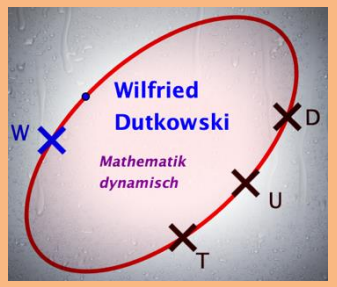
Von einem Würfel können an vier Ecken dreieckige Pyramiden abgeschnitten werden, so dass ein Tetraeder entsteht. Im Umkehrschluss folgt, dass in jeden Würfel mit der Kantenlänge a ein Tetraeder passt, dessen Kantenlänge $\sqrt{2} \cdot a$ beträgt.

vgl. Wachter/Dilling/ Platz, 2026

© Wilfried Dutkowski



Dualität



Körper	Dualkörper
Tetraeder	Tetraeder
Hexaeder	Oktaeder
Dodekaeder	Ikosaeder

Vier Ecken vier Flächen
Selbstdualität

8 Ecken 8 Flächen
6 Flächen 6 Ecken

20 Ecken 20 Flächen
12 Flächen 12 Ecken

Die Ecken des Dualkörpers berühren immer die Flächen des Körpers. Damit ist der Dualkörper immer kleiner als der Körper. Beim Tetraeder steht das duale Tetraeder auf dem Kopf in Bezug zum Tetraeder.

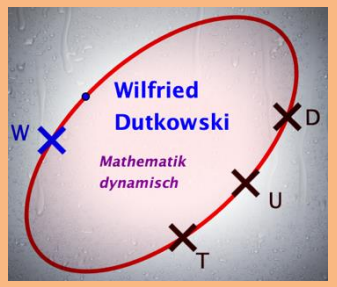
Die Dualität ist für die Methode der Durchdringung wichtig.

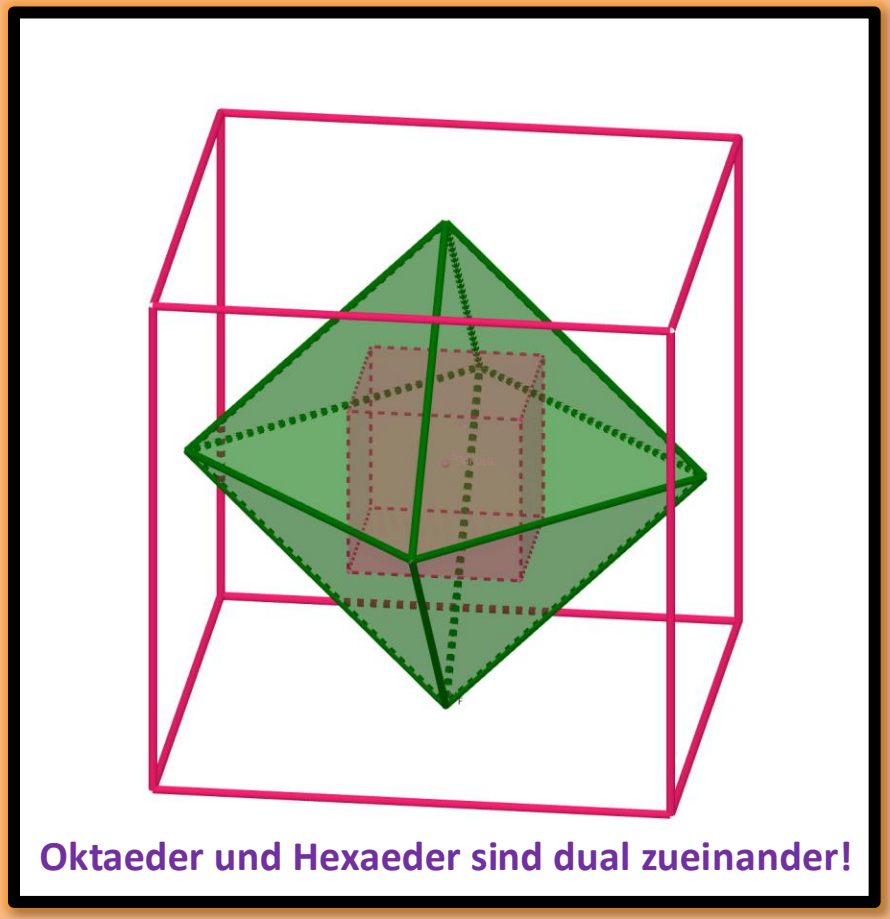
© Wilfried Dutkowski



Das Oktaeder im Würfel

(und umgekehrt)





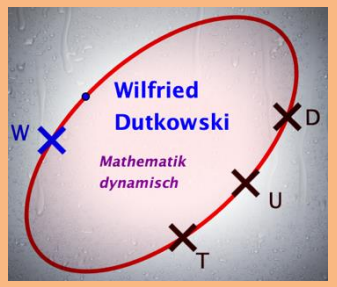
	Ecken	Flächen
Würfel	8 (dreikantig)	6 (vierseitig)
Oktaeder	6 (vierkantig)	8 (dreiseitig)

Dieses wechselseitige ineinanderpassen ist die duale Beziehung:
Einer dreikantigen Ecke liegt eine dreiseitige Fläche gegenüber, einer vierkantigen Ecke eine vierseitige Fläche.

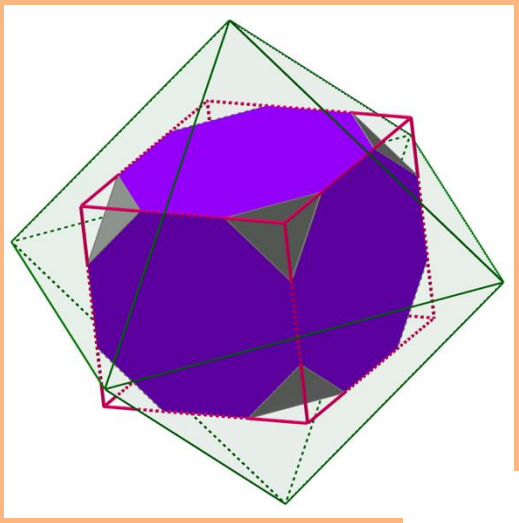
© Wilfried Dutkowski

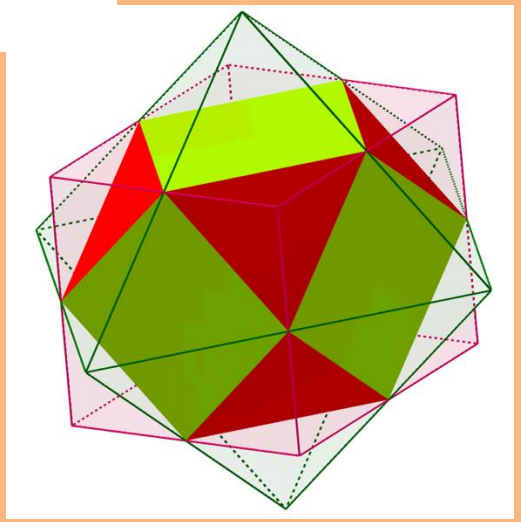


Durchdringen I



- Zentrische Streckung des Würfels vom gemeinsamen Körpermittelpunkt
- 1. Schritt Hexaederstumpf
- 2. Schritt Kuboktaeder

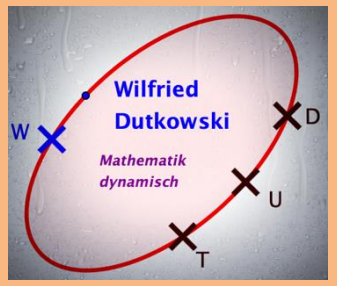




© Wilfried Dutkowski



Durchdringen oder abschneiden?

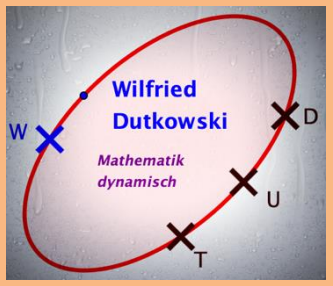


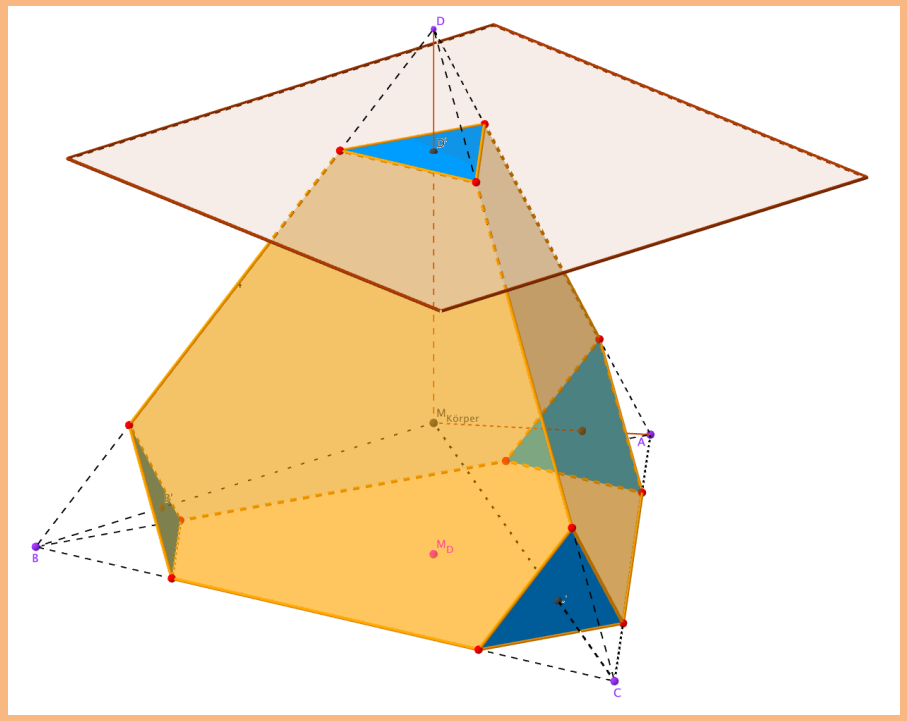
- Abschneiden heißt, eine Ebene von der Ecke senkrecht auf der Diagonalen zum Körpermittelpunkt zu ziehen.
- Das Abschneiden hat den Vorteil, dass man es auch auf andere andere Körper übertragen kann.
- Analogie zu Kreisen mit Kugeln realisierbar
  ➔ Übergang SI zu SII (3 Punkte – Ebene)

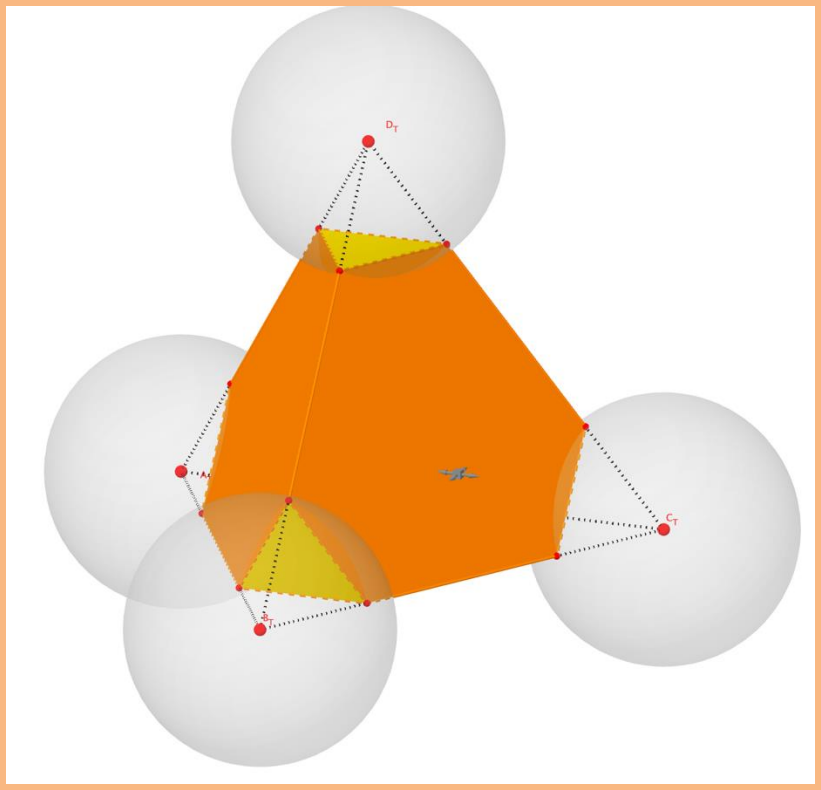
© Wilfried Dutkowski



Abschneiden

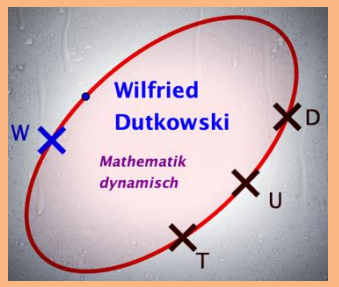








Ähnlichkeiten erkennen



- Von Fibonacci

- Fibonaccizahlen, sind Zahlen der Folge:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

- Startet man mit 1, 1, lauten die ersten Glieder:
- 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55…
- Grenzwert sukzessiver Folgeglieder:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

- Zu Tribonacci

- Tribonaccizahlen sind folgerichtig Zahlen der Folge:

$$T_{n+1} = T_n + T_{n-1} + T_{n-2}$$

- Startet man mit 0,1,1, lauten die ersten Glieder:
- 2,4,7,13,24,44,81,149,274…
- Grenzwert sukzessiver Folgeglieder:

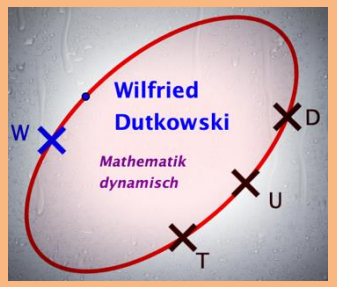
$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_{n+1}}{T_n} = T_{TRI}$$

φ = goldener Schnitt ≈ 1,61803…

T_{TRI} = Tribonacci-Konstante ≈ 1,83928..



Algebraische Strukturen



- Goldener Schnitt
  - $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$
- Tribonacci-Konstante
  - $T_{TRI} = \frac{1}{3}\left(1 + \sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}\right)$

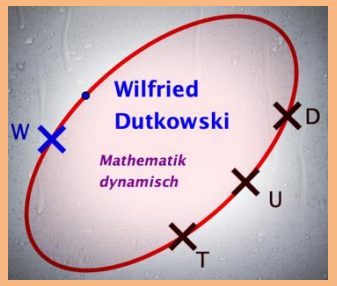
Aus der Tribonacci-Konstante lässt dich der Parameter t der Formel für den Drehwinkel entwickeln, der für die Methode des Drehens beim Cubus Simus benötigt wird.

$$\frac{T_{TRI}-1}{2} = t$$

$$t = \cos(\zeta) = \frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}} - 2\right) \approx 0{,}4196433776$$



Teilflächen drehen



Vom Rhombenkuboktaeder zum abgeschrägten Hexaeder

© W. Dutkowski 01/2024

RoKuOk Startfigur

Umkugel Cubus Simus

Drehachsen

Drehe Körper

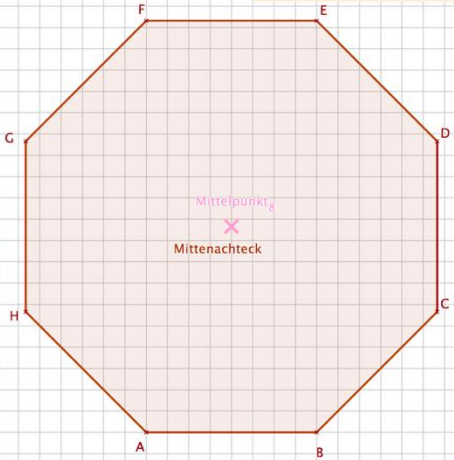
Hier die Quadrate drehen

a = 1

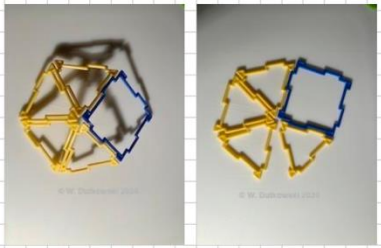
abgeschrägtes Hexaeder

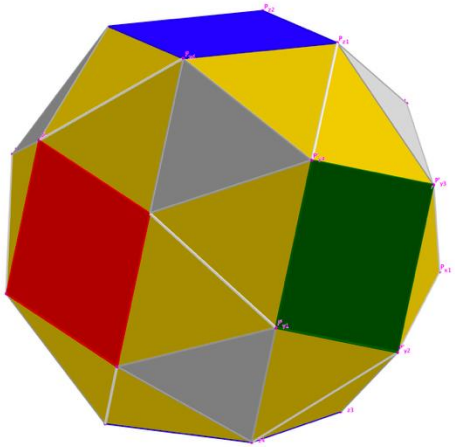
Cubus Simus

**Werden die Quadrate des Rhombenkuboktaeders,
die den Flächen des dualen Würfels gegenüber liegen,
jeweils gegeneinander um den Winkel ω (16.46756°)gedreht,
entsteht aus dem Rhombenkuboktaeder ein bei ω ≈ 16,5°
abgeschrägtes Hexaeder (auch Cubus Simus genannt).**



Eckenfolge: 3; 3; 3; 3; 4

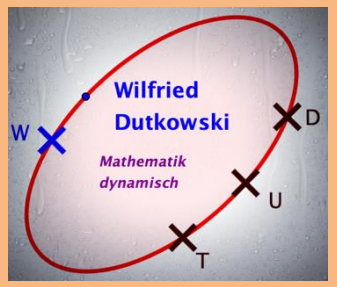




© Wilfried Dutkowski



Mathematische Operationen

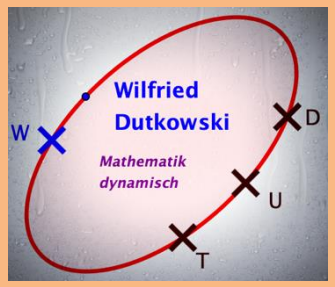


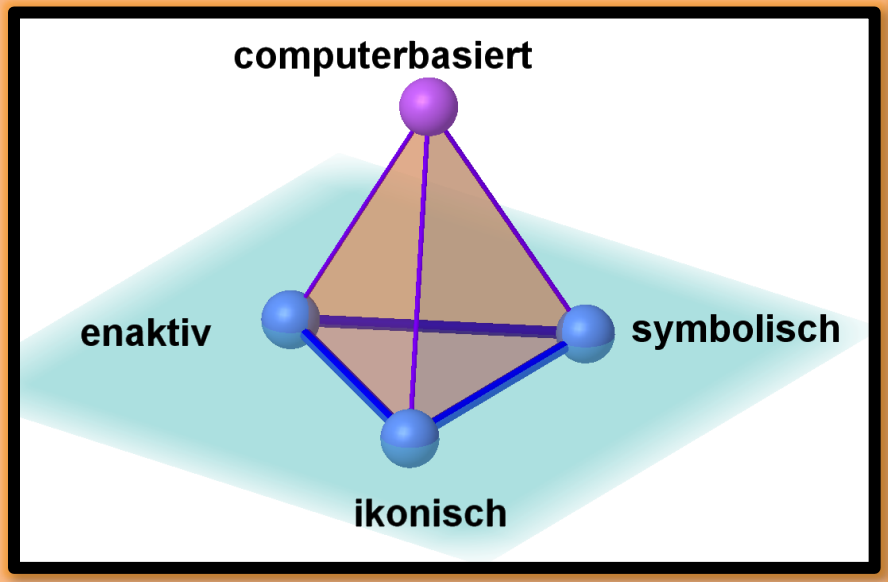
- Schnittebenen ➔ Würfel zum Tetraeder
- Verschiebungen ➔ Pyramiden Tetraeder
- Teilungen ➔ Ikosaeder/Dodekaeder im Würfel
  - bei Bedarf auch algebraisch
- Zentrische Streckung ➔ Oktaeder/Würfel; Kuboktaeder
- Drehungen ➔ Kuboktaeder; Cubus Simus

© Wilfried Dutkowski



Didaktisches Modell



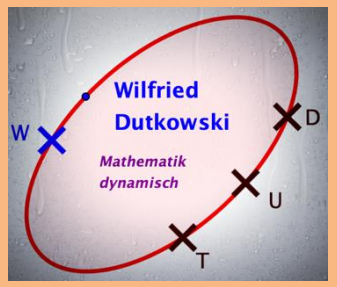


© Elschenbroich/Dutkowski 2022

- Im Fokus stehen:
  - operatives Arbeiten am Computer
    - Erweiterung von enaktiv
      Lambert, 2011
  - systematisches variieren
  - dynamische Visualisierung
    - Erweiterung von ikonisch
      Lambert, 2011



Fazit



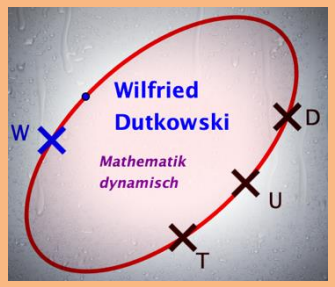
- Keine inhaltliche Veränderung der Lerninhalte
- Reduktion von Merkwissen (kein Verzicht)
- Reduktion der Algebra
- Kompetenter Werkzeuggebrauch

- Mehr geometrisches Verständnis durch:
  - Vernetzung
  - Lernerlebnis
  - Selbstständigkeit
  - Offener Lernprozess

© Wilfried Dutkowski



Der Worte genug,...



lasst uns sprechen!

Veröffentlichter Artikel



Literatur im GeoGebra Book:

https://www.geogebra.org/m/dcnjdksa

Kontakt: wdutkowski@hs-euklid.de
w.dutkowski@uni-koeln.de