Lösungen:

Aufgabe 1

Wähle aus, welche Regeln bei der Ableitung der Funktion $f(x) = 6x^4 - 3x^2 + 8$ angewendet werden.

Wähle alle richtigen Antworten aus

A ☐ Summenregel, Potenzregel und Kettenregel

B ☐ Summenregel, Produktregel und Faktorregel

C ☐ Summenregel, Faktorregel und Potenzregel

Lösung:

Antwort C: Um x^4 *und* x^2 abzuleiten, wird die Potenzregel angewendet. Die Faktoren vor x^4 *und* x^2 werden mit der Hochzahl multipliziert (Faktorregel). Alle 3 Glieder werden für sich abgeleitet und danach wieder als Summe/Differenz zusammengefasst (Summenregel).

Die Ableitung lautet also: $f'(x) = 24x^3 - 6x$

Aufgabe 2

Welche der folgende Ableitungen von $f(x) = (x^2 + 1) \cdot (x^3 - 2)$ ist korrekt?

Wähle alle richtigen Antworten aus

A ☐ $f'(x) = 2x(x^3 - 2) + 3x^2(x^2 + 1)$

B ☐ $f'(x) = (x^2 + 1) \cdot 3x^2 - (x^3 - 2) \cdot 2x$

C ☐ $f'(x) = (x^2 + 1) \cdot (x^3 - 2)$

Lösung:

Antwort A: Hier wird die Produktregel angewendet: Ableitung des ersten Faktors multipliziert mit dem zweiten Faktor PLUS erster Faktor mal Ableitung des zweiten Faktors.

Aufgabe 3

Kreuze die richtige(n) Aussage(n) zur Quotientenregel an.

Wähle alle richtigen Antworten aus

A ☐ Die Ableitung von $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ ist $f'(x) = \frac{g'(x)}{h'(x)}$.

B ☐ Die Quotientenregel wird angewendet, wenn sowohl Zähler als auch Nenner Funktionen sind, die von x abhängig sind.

C ☐ Man kann die Quotientenregel vermeiden, indem man $\frac{u}{v} = u \cdot v^{-1}$ schreibt und die Produktregel anwendet.

Lösung:

Antwort B und C: Wenn beide Funktionen (im Zähler UND im Nenner) von x abhängig sind, wir die Quotientenregel angewendet. Ein Bruch kann stets als Multiplikation geschrieben werden, wenn mit dem Kehrwert des Nenners multipliziert wird. In dieser Form kann mithilfe der Produktregel abgeleitet (siehe Aufgabe 2) werden.

Aufgabe 4

Kreuze die richtige(n) Aussage(n) zur Kettenregel an.

Wähle alle richtigen Antworten aus

A ☐ Die Kettenregel wird angewendet, wenn eine Funktion aus mehreren verschachtelten Funktionen besteht.

B ☐ Bei der Kettenregel wird nur die innere Funktion abgeleitet.

C ☐ Bei der Funktion $f(x) = sin(x+1)$ muss die Kettenregel angwendet werden.

Lösung:

Antwort A und C: Wie der Name verrät, wird die Kettenregel bei verketteten Funktionen der Form $f(x) = u(v(x))$ angewendet. Bei der Ableitung gilt die Regel: „äußere Ableitung mal innere Ableitung, also $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$.

Auch bei dem Beispiel aus Antwort C handelt es sich um eine verschachtelte Funktion. Hier gilt: $u(v) = \sin(v)$ und $v(x) = x + 1$. Die Ableitung lautet: $f'(x) = \cos(x+1) \cdot 1$.

Aufgabe 5

Bei der Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{(2x+1)^3}{x^2}$ müssen die Kettenregel und die Quotientenregel angewendet werden. Kreuze die richtige Ableitung an.

Wähle alle richtigen Antworten aus

A ☐ $f'(x) = \frac{6 \cdot (2x+1)^2 \cdot x^2 - (2x+1)^3 \cdot 2x}{x^4}$

B ☐ $f'(x) = \frac{(2x+1)^3 \cdot 2x - 6 \cdot (2x+1)^2 \cdot x^2}{x^4}$

C ☐ $f'(x) = \frac{3 \cdot (2x+1)^2 \cdot x^2 - (2x+1)^3 \cdot 2x}{x^4}$

Lösung:

Antwort A: Für die Quotientenregel gilt: $\frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$.

In diesem Fall ist $u(x) = (2x+1)^3$ eine verkettete Funktion. Somit lautet die Ableitung von u: $u'(x) = 3 \cdot (2x+1)^2 \cdot 2$. Auch hier gilt wieder „äußere Ableitung mal innere Ableitung“. Werden die Faktoren zusammengefasst gilt: $u'(x) = 6 \cdot (2x+1)^2$.

Für $v(x) = x^2$ gilt $v'(x) = 2x$.

Aufgabe 6

Wende nun dein Wissen an und bilde die erste Ableitung der Funktion $f(x) = (2x^3 - \frac{1}{2}x^2) \cdot (\frac{1}{3}x^3 + 3)$.

Lösung:

$$f(x) = \left(2x^3 - \frac{1}{2}x^2\right) \cdot \left(\frac{1}{3}x^3 + 3\right)$$

$$f'(x) = (6x^2 - x) \cdot \left(\frac{1}{3}x^3 + 3\right) + \left(2x^3 - \frac{1}{2}x^2\right) \cdot x^2$$

$$f'(x) = 2x^5 + 18x^2 - \frac{1}{3}x^4 - 3x + 2x^5 - \frac{1}{2}x^4$$

$$f'(x) = 4x^5 - \frac{5}{6}x^4 + 18x^2 - 3x$$