Anschauliche Differenzial-rechnung mit der Funktionenlupe

Hans-Jürgen Elschenbroich

Vorgestellt wird die ›Funktionenlupe‹ als Lernumgebung, mit der man anschaulich und kalkülfrei einen Zugang zu Grundvorstellungen der Differenzialrechnung gewinnen kann. Dies war auch Thema eines Vortrags auf dem MNU Bundeskongress 2014 in Saarbrücken. Die Funktionenlupe hat eine ganz einfache Grundidee: es geht stets um drei Punkte A_l, A, A_r auf dem Graphen einer Funktion f, auf denen alles aufbaut.

Das Funktionenmikroskop war ein Vorschlag von Arnold Kirsch *»zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff«*, der damals mit OHP-Folien realisiert wurde (Kirsch, 1980). Das war eine Vorwegnahme der Idee des Hineinzoomens: *»Wir sehen uns den Graphen einer (geeigneten) Funktion f in der Nähe eines festen Punktes P mit einem ›Mikroskop‹ an. Dabei bemerken wir, daß das beobachtete kleine Graphenstück bei hinreichend starker Vergrößerung praktisch geradlinig verläuft und somit eine gewisse Steigung besitzt. Dies ist die Steigung von f an der betreffenden Stelle«* (Kirsch, 1979).

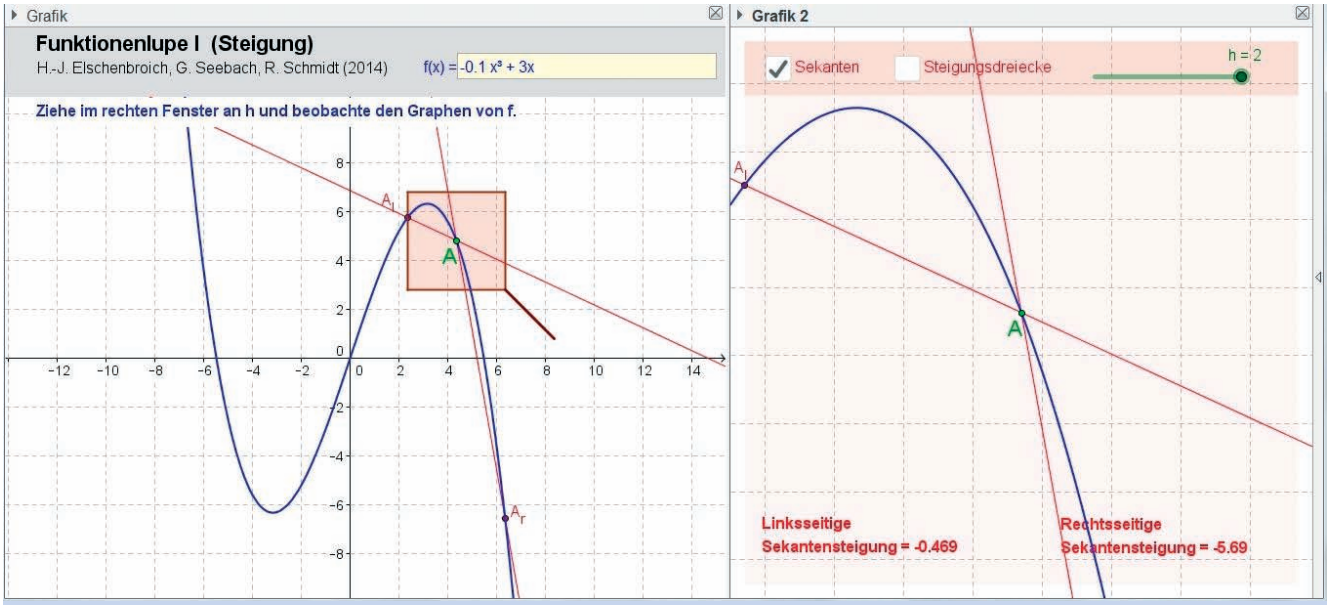


Abb. 1. Die Funktionenlupe I mit h = 2, GeoGebra Ansicht

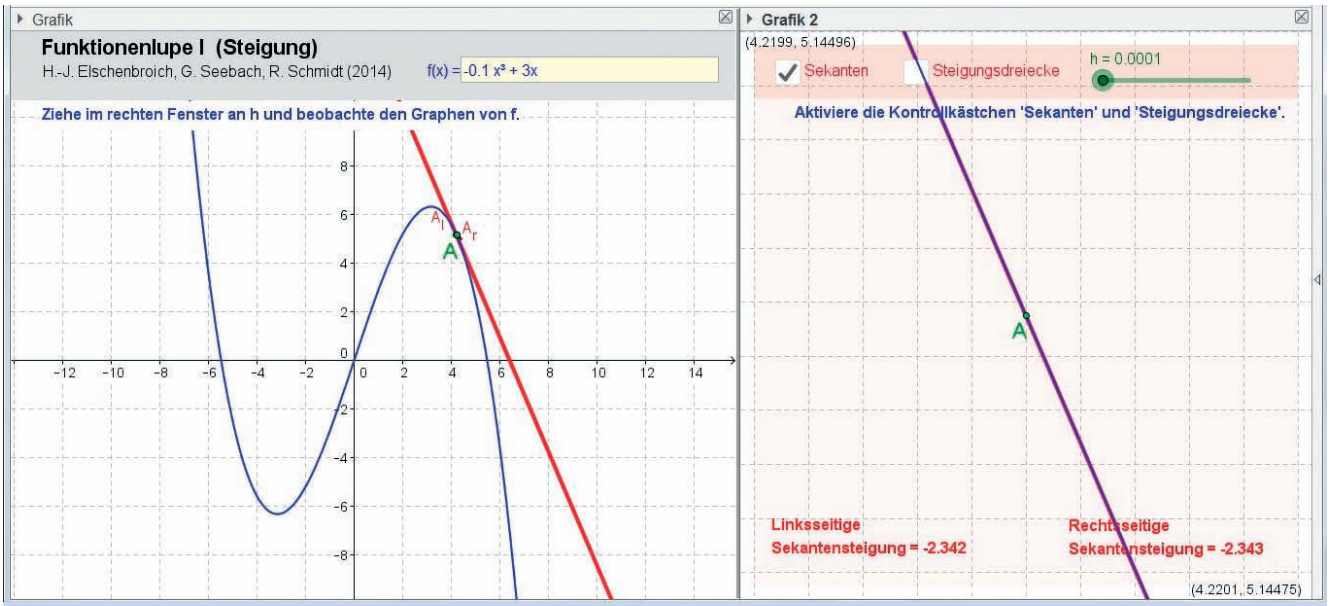


Abb. 2. Die Funktionenlupe I mit h = 0.00001, GeoGebra Ansicht

Einige Jahre später ließ sich diese Idee dann digital mit Funktionenplottern umsetzen. Damit wurde man bei den Funktionen und bei der zu untersuchenden Stelle flexibler, aber man agierte nach wie vor rein lokal.
Die Funktionenlupe ist jetzt ein aktueller Vorschlag von ELSCHENBROICH, SEEBACH und SCHMIDT (2014), auf den Spuren von A. KIRSCH. Dabei werden zwei Graphik-Fenster nebeneinander genutzt. Die Funktionenlupe wurde zuerst mit GeoGebra erstellt und ist jetzt auch mit TI-Nspire realisiert. Die beiden Versionen sind im Funktionsumfang identisch.

Es werden vier Varianten der Funktionenlupe vorgestellt.

1 Lokale Steigung, Schmiegegerade

Die Funktionenlupe I (Abb. 1) beschäftigt sich lokal mit Steigung und Sekanten. Im linken Fenster ist der Graph einer Funktion f zu sehen. Um einen Punkt A auf dem Graphen ist ein Quadrat hervorgehoben, das sich von A aus um h nach links, rechts, unten und oben erstreckt. Die Größe dieses Quadrats kann über den Schieberegler h verändert werden. Dieses Quadrat wird dann in das zweite Fenster vergrößert kopiert, so dass es dort immer den gleichen Platz ausfüllt. Die Grenzen zwischen den Fenstern sollten so gezogen werden, dass das rechte Lupenfenster auch quadratisches Format hat.

Mit dem Regler ›Sekanten‹ oben rechts kann man die links- und rechtsseitigen Sekanten ein- oder ausblenden, und man kann auch die zugehörigen Steigungsdreiecke anzeigen. Dabei ist links von $A(x_a|y_a)$ der Punkt A_l auf dem Graphen von f, dessen x-Koordinate $x_a - h$ ist und rechts von A der Punkt A_r auf dem Graphen von f, dessen x-Koordinate $x_a + h$ ist. Die linksseitige Sekante verläuft durch A_l und A, die rechtsseitige Sekante durch A und A_r. Dies ist die typische Situation, die man auch in jedem Schulbuch zur Differenzialrechnung findet, die hier

aufgegriffen wird. Natürlich kommt es dabei vor, dass A_l oder A_r außerhalb des Quadrates um A liegen, da dessen Ausdehnung in y-Richtung ja nur h nach oben bzw. unten ist.

Wird h immer kleiner, bis $h = 0.0001$, so sieht man (Abb. 2), dass der Graph von f dann im rechten Fenster praktisch gerade aussieht und dass die beiden Sekanten anschaulich zusammenfallen und eine Schmiegegerade (= Tangente) bilden.
Die Steigungen der Sekanten bzw. die Steigung des Graphen an der Stelle A kann man dann durch Messen einfach ermitteln.

Hier hat man also zum einen den Effekt des Hineinzoomens und behält zum anderen den Überblick. Desweiteren kann man an A ziehen, und man kann einen anderen Funktionsterm wählen. Damit erhält man mit der Funktionenlupe I einen anschaulichen und kalkülfreien Zugang zur lokalen Steigung.

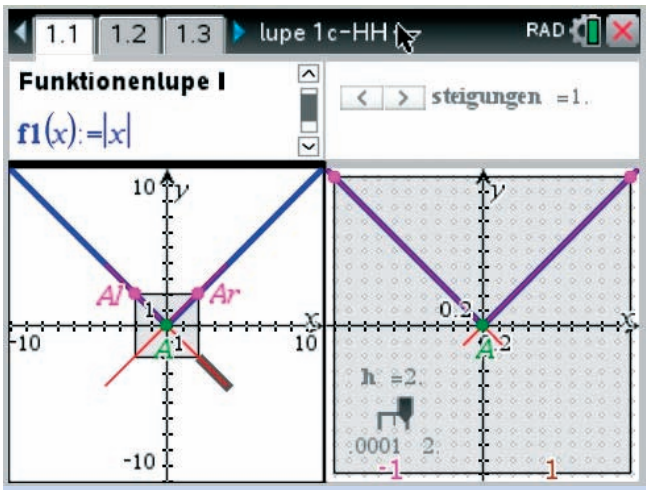


Abb. 3. Die Funktionenlupe I mit $f(x) = |x|$, TI-Nspire Handheld Ansicht

Natürlich ist der Vorgang des Zoomens bis zur lokalen Glättung nicht bei jeder Funktion erfolgreich, man braucht schon gutartige Funktionen, die dann den Namen ›differenzierbar‹ bekommen. Ein typisches Beispiel einer problematischen Funktion ist $f(x) = |x|$ an der Stelle $a = 0$.

Wenn man hier h verkleinert, sieht es so aus, als würde sich das Bild im zweiten Fenster nicht ändern (Abb. 3). Der Graph kann nie lokal gerade aussehen, sondern behält immer eine Knickstelle bei (0|0).

2 Steigungsfunktion

Man kann die gemessenen Sekantensteigungen in Punkte übertragen, die die gleiche x-Koordinate wie A haben (Abb. 4). Dies wird hier durch das Kontrollkästchen ›Steigungsfunktionen‹ durchgeführt. Damit erhält man einen Punkt P_l mit der linksseitigen Sekantensteigung als y-Koordinate und einen Punkt P_r mit der rechtsseitigen Sekantensteigung als y-Koordinate. Für größeres h sind diese Punkte in der Regel deutlich unterschiedlich, für sehr kleines h fallen sie dann (bei gutartigen Funktionen) anschaulich zusammen (ELSCHENBROICH, 2014).

Spannend wird es, wenn man diese Punkte nun einen geometrischen Ort/eine Ortslinie[1] in Abhängigkeit von A zeichnen lässt. Dann erhält man die Graphen der beiden Sekantensteigungsfunktionen, die für sehr kleines h schließlich anschaulich zum Graphen der Tangentensteigungsfunktion zusammenfallen (Abb. 5). Die Steigungswerte werden im rechten Fenster ermittelt (wie bei der Funktionenlupe I), das Entscheidende passiert aber hier im linken Fenster. Durch Zugmodus und Ortslinien werden die Steigungswerte aus ihrer Lokalität herausgeholt und gewissermaßen globalisiert. Dies kann man sinnvoll nur im linken Fenster verfolgen. So bekommt man mit der Funktionenlupe II – ohne Kenntnis des Funktionsterms von f' – einen anschaulichen und kalkülfreien Zugang zur Ableitungsfunktion.

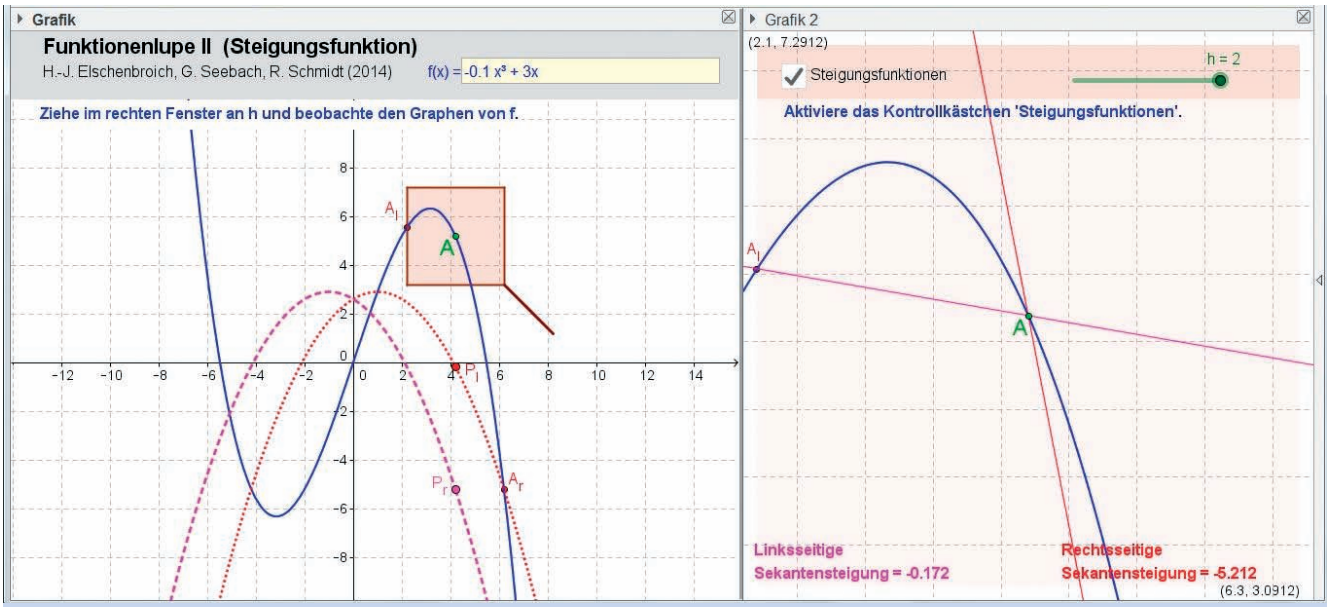


Abb. 4. Die Funktionenlupe II mit $h = 2$, GeoGebra Ansicht

[1] Hier muss der geometrische Ort/die Ortslinie konstruiert werden. Das Zeichnen der geometrischen Spur ist nicht zielführend, weil sich diese nicht dynamisch verändert, wenn h verkleinert wird.

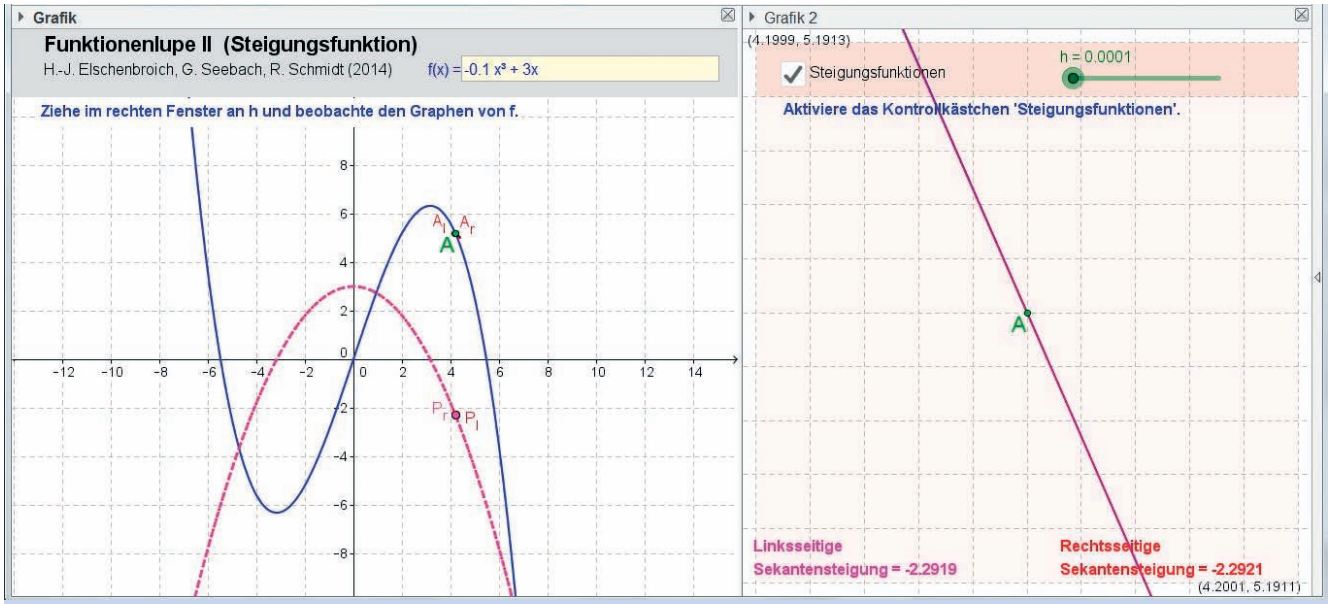


Abb. 5. Die Funktionenlupe II mit h = 0.00001, GeoGebra Ansicht

3 Krümmung und Schmiegekreis

Analytisch ist die Krümmung eines Graphen ein anspruchsvolles Konzept. Geometrisch ist es ganz einfach: Bei einem Kreis ist Krümmung = 1/Radius.

Der Graph wird lokal dadurch approximiert, dass anstelle der beiden Sekanten durch die drei Punkte A_l, A und A_r ein Kreis konstruiert wird (Abb. 6). Wird h immer kleiner (Abb. 7), so stabilisiert sich bei gutartigen Funktionen dieser Kreis und wird anschaulich zum Schmiegekreis (HENN, BÜCHTER, 2010; ELSCHENBROICH, 2014). Dies sieht man vor allem im linken Fenster. Der Kehrwert des Kreisradius ist betraglich die Krümmung an dieser Stelle.

Damit erhält man mit der Funktionenlupe III einen anschaulichen und kalkülfreien Zugang zur Krümmung. Will man noch das Vorzeichen ermitteln, sind zusätzliche Überlegungen erforderlich, da über den Kreisradius natürlich immer nur positive Werte kommen.

Falls die drei Punkte A_l, A und A_r auf einer Geraden liegen sollten, gibt es keinen Kreismittelpunkt im eigentlichen Sinne. Man kann dann eine Gerade als Kreis mit unendlichem Radius und der Krümmung Null verstehen. Dies tritt z. B. bei der Funktion $f(x) = -0{,}1x^3 + 3x$ beim Wendepunkt $A(0|0)$ auf.

4 Schmiegeparabel

Statt den Graphen durch einen Kreis zu approximieren, was ein geometrischer Ansatz ist, könnte man ihn auch funktional durch eine quadratische Funktion approximieren. Durch 3 Punkte ist immer eine Parabel definiert, diese kann man durch einen Polynom-Befehl (GeoGebra) oder quadratische Regression (TI-Nspire) ermitteln und plotten.

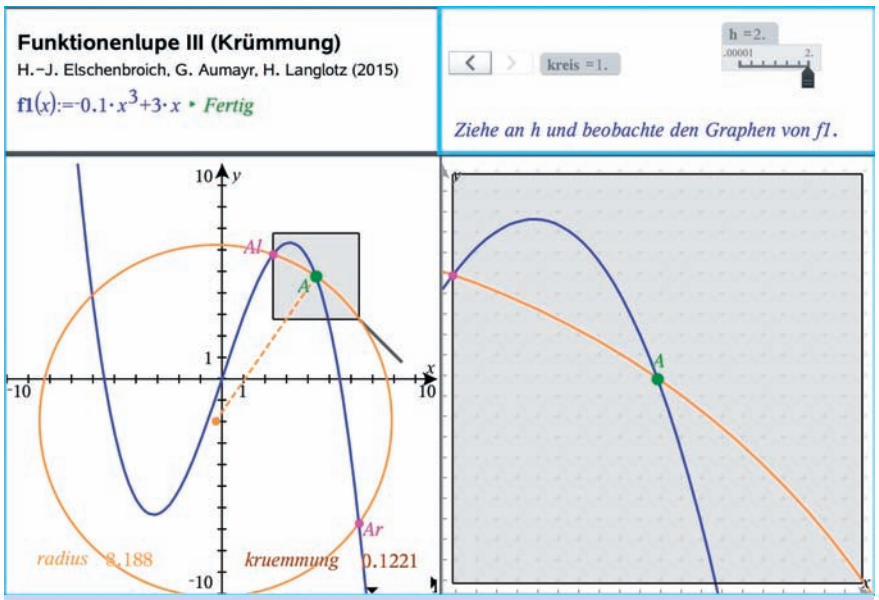


Abb. 6. Die Funktionenlupe III mit h = 2, TI-Nspire Ansicht

Auch hier stabilisiert sich wieder der Prozess für sehr kleines h und man erhält anschaulich die Schmiegeparabel. Macht man dies an der Stelle $a = 0$, so erhält man z. B. für $f(x) = e^x$ die quadratische Funktion $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$. So kommt man anschaulich zum zweiten Taylorpolynom.

Die Funktionenlupe ist eine Lernumgebung mit GeoGebra oder TI-Nspire. Sie läuft gleichermaßen auf PC, Mac und iPad, für TI-Npire auch auf den Handhelds.

In der hier vorgestellten Version ist die Funktionenlupe eine ›Rundum-Sorglos-Lösung‹, als Bedienkompetenz ist nur das Ziehen an Schiebereglern oder Punkten erforderlich. Natürlich kann die Funktionenlupe in jeder Variante auch zurückgebaut werden, damit die Schüler dann selber Geraden, Kreise, Ortslinien

und Parabeln konstruieren. Das erfordert dann eine erhöhte Bedienkompetenz und auch einen erhöhten Zeitbedarf.

Die leichte Bedienbarkeit und der intuitive graphische Zugang sollen aber nicht darüber hinweg täuschen, dass es mit Steigung, Ableitung und Krümmung um anspruchsvolle Begrifflichkeiten geht, die auch einer mathematischen Durchdringung und Vertiefung bedürfen. Auch sollte nicht vergessen werden, dass hier keine Infinitesimalrechnung betrieben werden kann, sondern wir mit minimal $h = 0.0001$ und Auflösung im Rahmen der Bildschirmgenauigkeit im Endlichen bleiben. Dennoch bietet die dynamische Visualisierung durch die Funktionenlupe eine gute Grundlage für den Aufbau der Grundvorstellungen zu Steigung, Krümmung, Ableitung, linearer und quadratischer Approximation.

Mit der Funktionenlupe sollen nicht Kalkül oder Theorie abgeschafft werden, sondern beiden eine anschauliche Grundlage gegeben werden. Der Analysis-Kalkül wird in der Schule oft zu früh eingeführt und zu oft unverstanden exerziert. Dem kann man mit der Funktionenlupe abhelfen und zunächst tragfähige Grundvorstellungen aufbauen.
Die hier vorgestellten anschaulichen Zugänge sind so angelegt, dass sie keine Fehlvorstellungen erzeugen und einen späteren Kalkül- und Theorieaufbau nicht behindern.

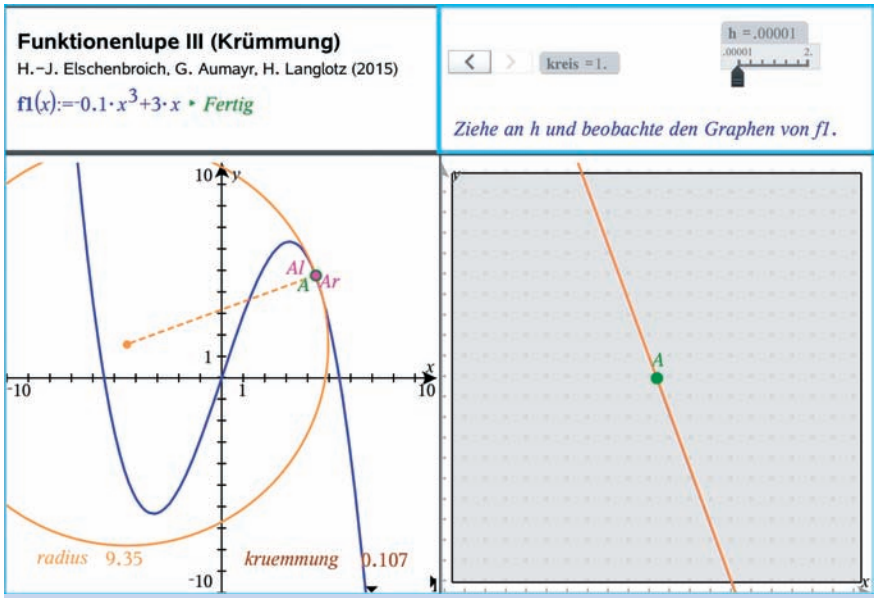


Abb. 7. Die Funktionenlupe III mit h = 0.00001, TI-Nspire Ansicht

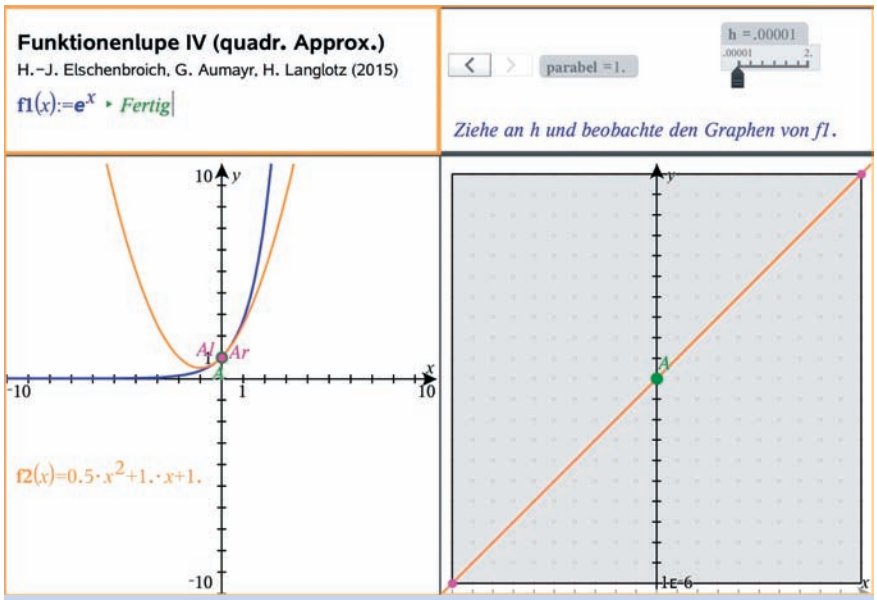


Abb. 8. Die Funktionenlupe IV mit h = 0.0001, TI-Nspire-Ansicht

Literatur

BÜCHTER, A., HENN, H.-W. (2010). *Elementare Analysis. Von der Anschauung zur Theorie.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

ELSCHENBROICH, H.-J., SEEBACH, G., SCHMIDT, R. (2014). Die digitale Funktionenlupe. Ein neuer Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. *mathematik lehren 187*, 34–37.

ELSCHENBROICH, H.-J. (2014). Ein kalkülfreier Zugang zu Grundvorstellungen der Analysis. In: ROTH & AMES (Hg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*, 337–340.

KIRSCH, A. (1980). *Folien zur Analysis: Das Funktionenmikroskop. Serie A: Die Steigung einer Funktion.* Hannover: Schroedel.

KIRSCH, A. (1979). Ein Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. *Der Mathematikunterricht, Heft 3*, 25–41.

(Unter *www.funktionenlupe.de* finden sich weitere Informationen und Dateien zum Thema).

HANS-JÜRGEN ELSCHENBROICH, elschenbroich@dynamische-geometrie.de, war Lehrer für Mathematik und Informatik, Fachleiter und Medienberater und ist ehemaliger Fachreferent Mathematik im MNU-Bundesvorstand.