Daniel.Reinke@hgs-singen.de

Der Haupsatz der Differenzial und Integralrechnung

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung
Wenn f eine stetige Funktion ist (einfach gesprochen: das Schaubild der Funktion kann man in einem Rutsch ohne abzusetzen zeichnen), dann gilt

$$I_a(x)' = f(x)$$

Dabei ist $I_a(x)$ die Flächeninhaltsfunktion.
In Worten:
Die Ableitung der Flächeninhaltsfunktion $I_a(x)$ ist gleich der Funktion f.

Zur Erinnerung: Der Wert der Flächeninhaltsfunktion entspricht der Fläche zwischen dem Graph von f und der x-Achse im Intervall a bis x. (Sie wird auch als Integralfunktion bezeichnet).

Beweis

Öffne die Geogebraapp `https://www.geogebra.org/m/efshjwks`.

1. Zunächst schreibt man die Ableitung der Flächeninhaltsfunktion wie wir es aus der Differenzialrechnung kennen:
$$I_a(x)' = \lim_{h \to 0} \frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h}$$
2. Mache Dir die Bedeutung von $I_a(x+h)$, $I_a(x)$ und $I_a(x+h) - I_a(x)$ klar:
   - Aktiviere dazu in der Geogebraapp die entsprechenden Kästchen und schau Dir die Flächen an. In der App ist $a = 0$.
   - Welcher Fläche entspricht $I_a(x+h) - I_a(x)$?

     ☐ gelb ☐ grün ☐ rot
3. Nun schätzen wir $I_a(x+h) - I_a(x)$ ab:
   - Wir bestimmen den Maximalwert und den Minimalwert von f im Intervall $[x, x+h]$. Aktiviere das Kästchen, um min(f) und max(f) anzeigen. Dann siehst Du, was damit gemeint ist.
     Wenn der x-Wert des Punktes A $x_A = 1$ ist und $h = 1$, welchen Wert hat dann maxf?

     ☐ ungefähr 2 ☐ ungefähr 0.8 ☐ ungefähr 1.4

- Mit min(f) können wir eine Rechteckfläche bestimmen, die kleiner ist als die rote Fläche $(I_a(x+h) - I_a(x))$, nämlich $A_{\text{min}} = \text{min(f)} \cdot h$. Laß Dir die Fläche anzeigen.
- Mit max(f) können wir eine Rechteckfläche bestimmen, die größer ist als die rote Fläche, nämlich $A_{\text{max}} = \text{max(f)} \cdot h$. Laß Dir die Fläche anzeigen.
  Welche Farbe hat A_{max}

  ☐ blau ☐ cyan

  Also gilt

$$\begin{array}{rcccl} \text{cyan} & < & \text{rot} & < & \text{blau} \\ A_{\text{min}} & < & I_a(x+h) - I_a(x) & < & A_{\text{max}} \\ \text{min(f)} \cdot h & < & I_a(x+h) - I_a(x) & < & \text{max(f)} \cdot h \end{array}$$

4. Jetzt teilen wir alle Flächen durch h

$$\begin{array}{rcccl} \frac{\text{min(f)} \cdot h}{h} & < & \frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h} & < & \frac{\text{max(f)} \cdot h}{h} \\ \text{min(f)} & < & \frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h} & < & \text{max(f)} \end{array}$$

5. Jetzt machen wir den Grenzübergang $h \to 0$.
   Klar, dann gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h} = I_a(x)'$$

   so ist ja die Ableitung definiert!
   Aber was passiert mit min(f) und max(f)? Bewege den Schieberegler und beobachte!

   ☐ min(f) $\to 0$ und max(f) $\to 0$
   ☐ min(f) $\to f(x)$ und max(f) $\to f(x)$
   ☐ min(f) $\to I_a(x)$ und max(f) $\to I_a(x+h)$

   Also: Für $h \to 0$ gilt

$$\begin{array}{ccccc} \text{min(f)} & < & \frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h} & < & \text{max(f)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ f(x) & & I_a(x)' & & f(x) \end{array}$$

   Also: $I_a(x)' = f(x)$

Das war's: $I_a(x)' = f(x)$.

Überzeugt? ☐ ja, ☐ nein