

Teoría – Tema 2

CCSS Teoría - 4 - cociente de polinomios con raíces simples

Grado del numerador $P(x)$ menor que Grado del denominador $Q(x)$ y raíces simples en el denominador

Consideremos la integral de un cociente de polinomios.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Donde el grado del numerador $P(x)$ es inferior al grado del denominador $Q(x)$.

Al afrontar estas integrales vamos a **obtener tanto las raíces del numerador como del denominador**, por si fuese posible simplificar algún factor común.

Si no podemos simplificar, o tras hacerlo seguimos teniendo un cociente de polinomios de integral no inmediata, **expresaremos el denominador factorizado en sus raíces** (que pueden ser reales y/o complejas).

En este primer apartado, vamos a estudiar inicialmente los casos en que todas las raíces del denominador son simples:

$$Q(x) = (x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_n)$$

Y el cociente de polinomios podemos expresarlo como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_n)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \dots + \frac{N}{x-x_n}$$

Donde los coeficientes A, B, \dots, N son coeficientes reales que llamaremos coeficientes indeterminados.

$$\frac{P(x)}{(x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_n)} = \frac{A \cdot (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_n) + B \cdot (x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_n) + \dots + N \cdot (x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_{n-1})}{(x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_n)}$$

Igualamos los denominadores:

$$P(x) = A \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) + B \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n) + \dots + N \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})$$

De tal forma que los factores indeterminados A, B, \dots, N podemos conocerlos **dando valores a la variable x** . Lo más cómodo es emplear los valores de las propias raíces del denominador.

Si $x = x_1 \rightarrow$ obtenemos A

Si $x = x_2 \rightarrow$ obtenemos B

...

...

Si $x = x_n \rightarrow$ obtenemos N

Ejemplo 1 resuelto

$$\int \frac{4x^2 + 8x + 6}{x^3 + 2x^2 - x - 2} dx = \int \frac{4x^2 + 8x + 6}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx$$

$$\frac{4x^2 + 8x + 6}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

$$4x^2 + 8x + 6 = A(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x+1)$$

Si $x = 1 \rightarrow 18 = 6A \rightarrow A = 3$

Si $x = -1 \rightarrow 2 = -2B \rightarrow B = -1$

Si $x = -2 \rightarrow 6 = 3C \rightarrow C = 2$

Sustituyendo estos coeficientes en la integral:

$$\int \frac{4x^2 + 8x + 6}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx = \int \left[\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} \right] dx = \int \left[\frac{3}{x-1} + \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+2} \right] dx$$

$$\int \left[\frac{3}{x-1} + \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+2} \right] dx = 3\ln|x-1| - \ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C$$