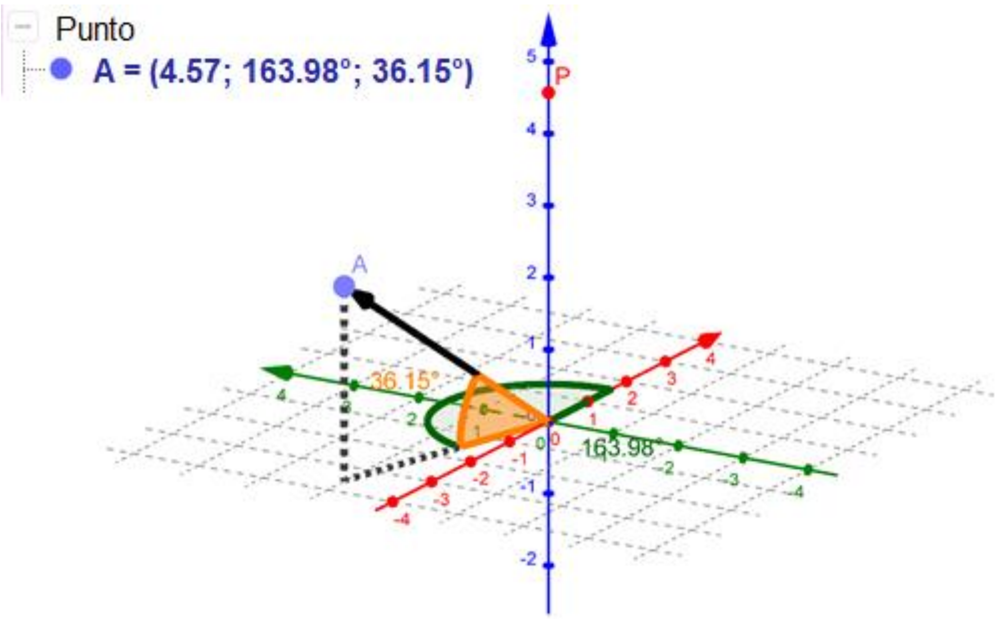
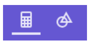
1. Coordenadas esféricas

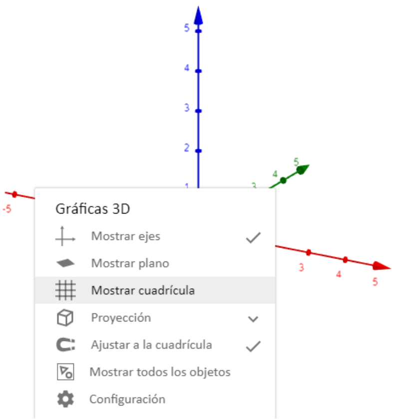
Cualquier punto dibujado en la ventana gráfica 3D puede venir expresado en coordenadas cartesianas o en coordenadas esféricas. En este ejercicio aprenderemos a dibujar estas últimas.

El resultado final será el que se muestra en la figura siguiente; de manera que moviendo el punto A conseguiremos cambiar los ángulos manteniendo fija la distancia al origen de coordenadas. Esta distancia podrá ser modificada mediante el punto P. De esta manera conseguimos visualizar las coordenadas esféricas de cualquier punto A del espacio.

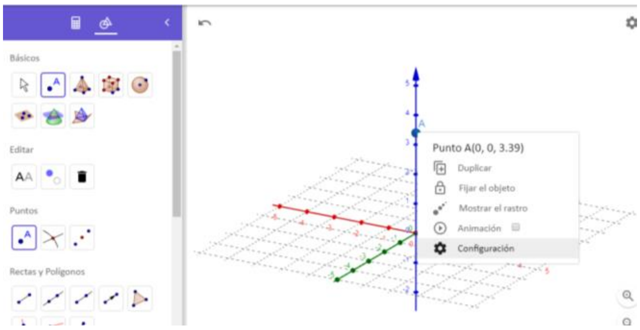


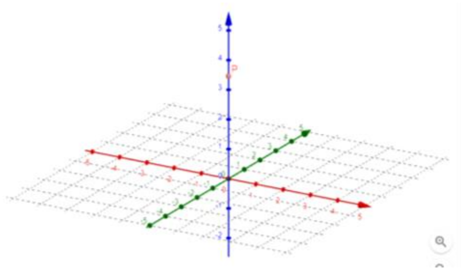
Si trabajamos con la versión online de GeoGebra 3D veremos que nos aparecen dos iconos  que nos permiten acceder a las herramientas o a la ventana algebraica. Es conveniente saber utilizar un escenario y el otro de forma natural.

Para empezar, con el botón derecho del ratón esconderemos el plano z=0 que por defecto aparece en la ventana del 3D y activaremos la opción de **Mostrar cuadrícula**.



Con la herramienta Punto dibujamos un punto sobre el eje Z.
Seguramente GeoGebra le asigne el nombre A por defecto. Con el botón derecho del ratón podemos acceder a la configuración del punto y cambiarle el nombre, así como su color y tamaño.

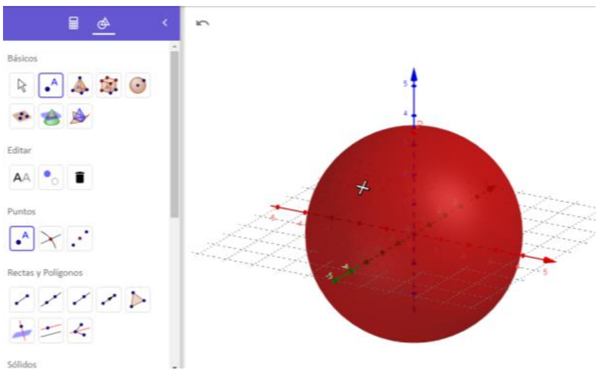


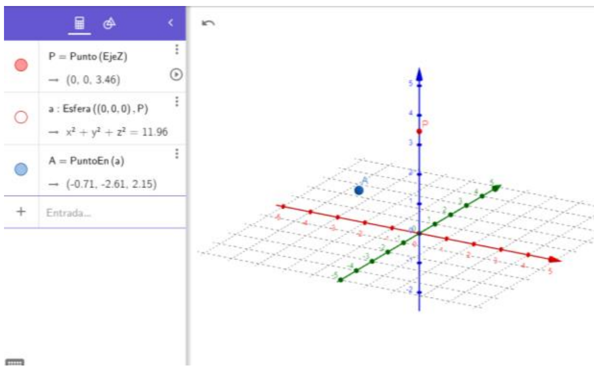


Con la herramienta **Elige y mueve**, nos aseguraremos que el punto sólo se desplaza por el eje vertical.

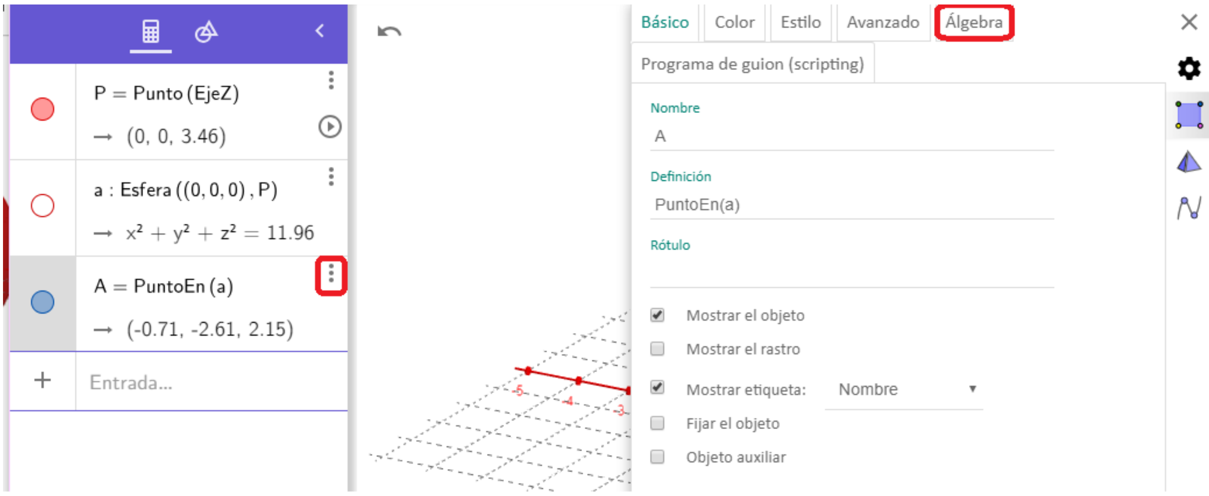
Con la instrucción **Esfera(<Punto> , <Punto>)** creamos una esfera de centro el origen de coordenadas y que pase por el punto P creado: Esfera((0,0,0),P)

Dibujamos un punto en la esfera y ocultamos esta última.

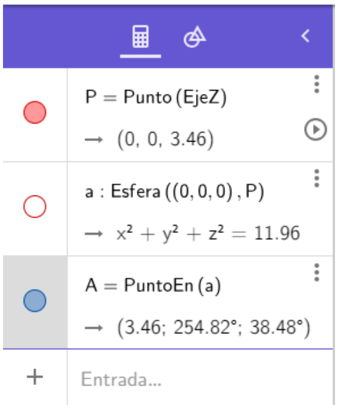




GeoGebra nos muestra por defecto las coordenadas cartesianas del punto. En la imagen anterior se puede observar que el punto A tiene por coordenadas (-0.71,-2.61,2.15). No obstante, podemos pedirle a GeoGebra que muestre cuáles son sus coordenadas esféricas. Para ello clicaremos en los tres puntos que aparecen junto a la instrucción en la ventana algebraica e iremos a la Configuración del punto. Si clicamos sobre la pestaña Álgebra nos aparecerá la opción de cambiar las coordenadas cartesianas por coordenadas esféricas.



Una vez realizado obtenemos la siguiente información en la ventana algebraica:



El punto A es (3.46; 254.82º; 38.48º)

Ahora procederemos a visualizar estos tres parámetros, las coordenadas esféricas, en la ventana gráfica 3D.

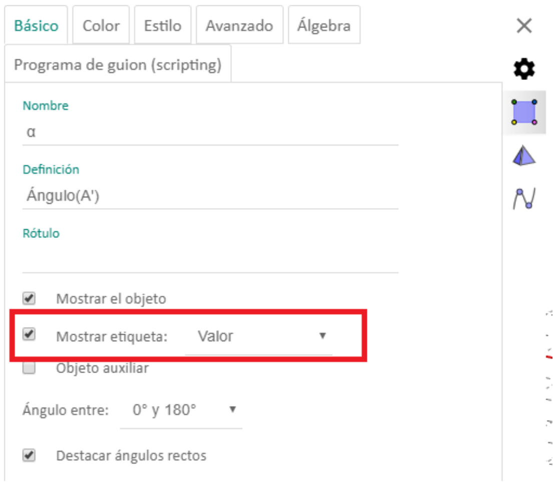
Dibujamos el vector que va desde el origen de coordenadas hasta el punto A con la instrucción **Vector(<Punto>)** : α = Vector(A)

Determinamos la proyección ortogonal del punto A sobre el plano z=0 definiendo el punto A' = (x(A),y(A),0)

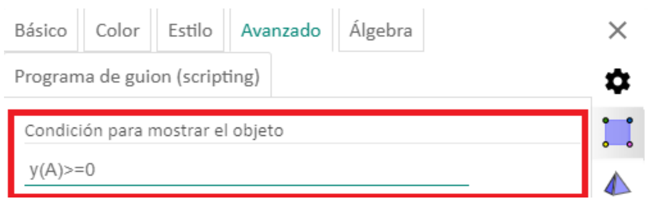
Con la instrucción **Ángulo(<Objeto>)** , α'= Ángulo(A'), obtenemos el ángulo existente entre el eje OX y un hipotético vector OA'.

Accedemos a la configuración del ángulo y en el apartado de Rótulo escogemos la opción de Mostrar etiqueta: Valor.

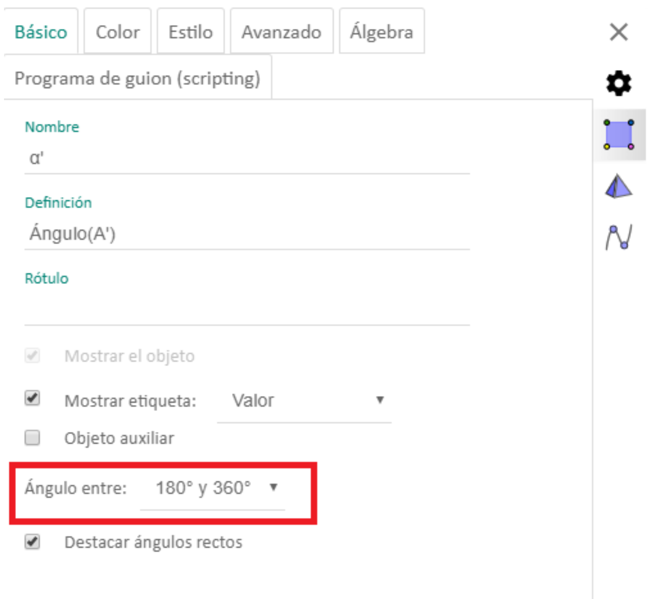
En las pestañas Color y Estilo podremos modificar el color y el tamaño del ángulo.



Si observamos el valor del ángulo obtenido es probable que no coincida con ninguno de los dos ángulos que conforman las coordenadas esféricas del punto A. Esto es debido al hecho que sólo podemos escoger que se dibujen ángulos entre 0º y 180º o entre 180º y 360º. Para solucionar este hecho, clicaremos en la pestaña Avanzado de la configuración del ángulo y en la Condición para mostrar objeto pondremos que la coordenada y del punto A sea mayor o igual a cero.



Dibujaremos otro ángulo igual pero que tomará valores entre 180º y 360º, y en la condición para mostrar el objeto pondremos y(A)<0



Para conseguir dibujar el ángulo de elevación utilizaremos la instrucción **Ángulo(<Punto (lateral) >,<Vértice>,<Punto (lateral antihorario)>)**.

β = Ángulo(A',O,A) será un ángulo de 0º a 180º que se mostrará si la coordenada z del punto A es mayor o igual a cero.

β' = Ángulo(A',O,A) será un ángulo de 180º a 360º que se mostrará si la coordenada z del punto A es negativa.

Polígono((0,0,0),A',A) nos dará el triángulo determinado por el origen de coordenadas, el punto A y su proyección A'.

Para acabar modificaremos el estilo de los objetos para que sólo sean visibles aquellos que nos interesen y el aspecto final sea el presentado al inicio de la actividad.

2. Perpendicular común a dos rectas en el espacio con distinta dirección

Como segunda actividad sobre los objetos geométricos vamos a plantear el problema de dos rectas en el espacio. Como es bien sabido, las dos rectas se pueden cruzar, cortar (coplanarias), ser paralelas o ser coincidentes. Obviaremos en esta construcción la discusión previa sobre la situación en la que nos encontramos.

Para dibujar las dos rectas podemos utilizar dos puntos o bien un punto y un vector director para cada recta o también su ecuación. Podemos usar casillas de Entrada o bien dibujar puntos y vectores aleatorios en la ventana 3D que el usuario pueda modificar. Si queremos utilizar ecuaciones para introducir las rectas habrá que hacerlo desde la Barra de entrada. Hay que escribir la ecuación **en forma paramétrica**, como, por ejemplo: (4,3,1)+t*(-2,1,1).

Recordad que el vector director lo puede calcular el programa con el comando VectorUnitario.

Vamos a determinar la distancia entre dos rectas que se cruzan a partir de hallar la perpendicular común.

Sean r: (x,y,z) = (-3,2,5)+ t_1 (2,5,3) y s: (x,y,z) = (2,1,3)+t_2 (-1,3,-2) dos rectas que se cruzan.

Los pasos serían los siguientes una vez definidas las dos rectas:

1. Hallar el producto vectorial de los vectores directores de cada una de las rectas con el operador correspondiente:

   $$w = u \otimes v$$

   que se halla en el listado de símbolos o bien con el comando ProductoVectorial.
2. Dibujar un punto A en r y otro, B, en s.
3. Para cada una de las dos rectas iniciales, construir la recta que pasa por uno de sus puntos y tiene a dicho producto vectorial, w, como vector director.
4. Hallar las ecuaciones de los planos que contienen a cada uno de los pares de rectas con el comando **Plano (<recta>, <recta>)**.
5. Hallar la recta de intersección de los dos planos.

6. Hallar los puntos de intersección de dicha recta con las dos rectas iniciales.
7. Calcular la distancia entre dichos puntos.

Podéis plantear el problema de la manera que creáis más conveniente.

Podéis seguir todos los pasos en el siguiente vídeo: https://youtu.be/WkkwUd-6w1E

Perfeccionaremos esta construcción para cuando trabajemos con deslizadores y casillas de verificación. Nos puede quedar una aplicación muy útil para el alumnado de 2º de bachillerato.

3. Polígono regular en el espacio

Para dibujar un polígono regular en el espacio hay que tener en cuenta el plano en el que estará contenido dicho polígono que no tiene porqué ser el plano base (z=0). Necesitaremos por tanto definir este plano, ya sea a partir de tres puntos o de una recta y un punto o de un punto y una recta perpendicular al plano. Dibujando dos puntos (diferentes de los utilizados para definirlo) sobre dicho plano ya sólo nos queda utilizar la instrucción:

Polígono(<Punto>, <Punto>, <Número de vértices>, <Dirección>)

para obtener el polígono regular con un número de lados dado, por ejemplo, por un deslizador con valores enteros mayores o iguales a 3.

Podéis seguir todos los pasos en el siguiente vídeo: https://youtu.be/RCGyZuqLHBQ

Para la dirección tendremos que introducir el nombre del plano que hemos dibujado. Probad de introducir la recta en lugar del plano y observad qué pasa.

4. Circunferencias en el espacio

Otra forma de proceder es dibujar una circunferencia a partir de una recta y un punto que pertenezca a la misma, con la herramienta:

Circunferencia (centro, radio, dirección)

El radio lo podemos establecer con un deslizador r que tome valores entre 0.1 y 5, por ejemplo. Sobre dicha circunferencia dibujamos un punto. Creamos un deslizador (de nombre n, por ejemplo) con valores enteros mayores o iguales a 3. Hacemos rotar el punto un ángulo de 360º/n (recordad que los grados se introducen a partir del listado de símbolos o con la combinación Ctrl+o o Alt+o según el sistema operativo) con respecto al eje de la circunferencia con el comando:

Rota(<Objeto>, <Ángulo>, <Eje de rotación>)

Construimos el plano que contiene a la circunferencia con los dos puntos y con el centro de la misma y ya solo nos queda dibujar el polígono con el comando que hemos visto anteriormente. El orden con el que se escriben los puntos es importante.

Podéis seguir todos los pasos en el siguiente vídeo: https://youtu.be/DtdScLWjMV8

Estas dos últimas construcciones nos pueden ser muy útiles para dibujar prismas, pirámides, cono y cilindros en cualquier posición.

5. Haz de planos secantes en una recta dada

Vídeo: https://youtu.be/BHm6PKUS-1c

6. Planos bisectores de dos planos secantes

Vídeo: https://youtu.be/BuxFEa_rQtg

Más propuestas:

7. Dado un plano y una recta secante al mismo, determinar la proyección ortogonal de la recta en el plano.

8. Dado un segmento cualquiera determinar el plano mediador.

9. Hallar la distancia a la que se encuentra el punto P(1,2,3) de la recta r: (x,y,z)=(0,6,2) + t·(1,-1,1), determinando el punto de la recta que está a menos distancia de P.

10. Dadas las rectas $r\colon\begin{cases}2x-y=5\\ y+z=-1\end{cases}$, $s\colon\begin{cases}x+2y-3z+1=0\\ 2x+5y+z+2=0\end{cases}$, hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen de coordenadas y se apoya en ambas. Determinar los puntos de apoyo R y Q de t con r y s.