Problemas – Tema 8

CCSS Problemas resueltos - 17 - propiedades de los determinantes

1. Dadas la matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 4 & 2 & -2\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ **, obtener razonadamente el valor de los siguientes determinantes, escribiendo todos los pasos del razonamiento.**

a) $|A+B|$ **y** $|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}|$

b) $|(A+B)^{-1}\cdot A|$ **y** $|A^{-1}(A+B)|$

c) $|2\,A\,B\,A^{-1}|$ **y** $|A^3\,B^{-1}|$

a) $A+B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 4 & 2 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 5\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix} \rightarrow |A+B|=0+20+4-(0+0+0)=24$

Calculamos el segundo determinante de este apartado.

$|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}|$ → La matriz $(A+B)^{-1}$ es de orden 3 → $|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}|=(\frac{1}{2})^3|(A+B)^{-1}|$

$(\frac{1}{2})^3|(A+B)^{-1}|=\frac{1}{8}\frac{1}{|A+B|}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{24}=\frac{1}{192}$

b) $|(A+B)^{-1}\cdot A|=|(A+B)^{-1}|\cdot|A|$

Donde hemos utilizado que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes de cada matriz.

$|(A+B)^{-1}|=\frac{1}{|(A+B)|}=\frac{1}{24}$, $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$, $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 4 & 2 & -2\end{pmatrix} \rightarrow |A|=4+0+0-(0+0+0)=4$

$|(A+B)^{-1}|\cdot|A|=\frac{1}{24}\cdot 4=\frac{1}{6}$

Calculamos el segundo determinante de este apartado.

$|A^{-1}(A+B)|=|A^{-1}||A+B|=\frac{1}{|A|}|A+B|=\frac{1}{4}\cdot 24=6$

c) $|2\,A\,B\,A^{-1}|$ → Producto de matrices de orden 3 → $|2\,A\,B\,A^{-1}|=2^3|A||B||A^{-1}|$

$$B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \rightarrow |B|=-4+0+0-(0+0+0)=-4$$

Sustituimos el valor de cada determinante.

$$2^3|A||B||A^{-1}|=8\cdot 4\cdot(-4)\cdot\frac{1}{4}=-32$$

Y terminamos con el segundo determinante de este apartado.

$$|A^3\,B^{-1}|=|A|\cdot|A|\cdot|A|\cdot|B^{-1}|=4^3\cdot\frac{1}{|B|}=\frac{64}{-4}=-16$$

2. Resuelve:

a) Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ **. Calcula** $|(5\text{A})^{-1}|$ **.**

b) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}m+2 & 0 & 0\\ -3 & m+1 & 1\\ 1 & 0 & m-1\end{pmatrix}$ **. Obtener** $|A^{10}|$

a) Aplicamos transformaciones lineales de filas y columnas hasta obtener el determinante de la matriz A y así poder aplicar el valor de $|A|=2$.

$$\begin{vmatrix}a-1 & b-1 & c-1\\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1\\ 5 & 5 & 5\end{vmatrix}$$ → Intercambiamos F_1 con F_3 con el consiguiente cambio de signo →

$$-\begin{vmatrix}5 & 5 & 5\\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1\\ a-1 & b-1 & c-1\end{vmatrix}$$ → Intercambiamos F_2 con F_3 lo cual genera un nuevo cambio de signo

$$\rightarrow \begin{vmatrix}5 & 5 & 5\\ a-1 & b-1 & c-1\\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1\end{vmatrix}$$ → Sacamos factor común 5 de la primera fila →

$$5\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a-1 & b-1 & c-1\\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1\end{vmatrix} \rightarrow F'_2=F_2+F_1 \quad , \quad F'_3=F_3+F_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 5\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}=5|A|=5\cdot 2=10$$

b) $|A|=-2 \rightarrow |(5\text{A})^{-1}|=\dfrac{1}{|5A|}=\dfrac{1}{5^2|A|}=\dfrac{-1}{50}$

c) $A=\begin{pmatrix}m+2 & 0 & 0\\ -3 & m+1 & 1\\ 1 & 0 & m-1\end{pmatrix}$ → Sarrus → $det(A)=(m+2)(m^2-1)+0+0-(0+0+0)$

$$det(A)=(m+2)(m^2-1) \rightarrow |A^{10}|=|A|^{10}=(m+2)^{10}(m^2-1)^{10}$$

3. Sea M una matriz cuadrada que cumple $|M|=-1$ y $|(-2)M|=8$. ¿Cuál es el orden de la matriz cuadrada? Justifica tu respuesta.

$$|(-2)M|=(-2)^n|M|$$

Donde n es la dimensión de la matriz cuadrada M . Según el enunciado del problema:

$|(-2)M|=8$ y $|M|=-1$

Por lo tanto:

$$(-2)^n|M|=8 \rightarrow (-2)^n(-1)=8 \rightarrow (-2)^n=-8 \rightarrow n=3$$

4. Siendo $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **. Calcula:**

a) $|A|$ **b)** $|B|$ **c)** $|A\cdot B|$ **d)** $|A|\cdot|B|$

a) $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(2+0+0)-(0+0+0)=2$

b) $|B|=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(-2+0+0)-(0+2+0)=-2-2=-4$

c) Según las propiedades de los determinantes, el determinante de A por B es lo mismo que el determinante de A por el determinante de B:

$$|A\cdot B|=|A|\cdot|B|=2\cdot(-4)=-8$$

d) $|A|\cdot|B|=2\cdot(-4)=-8$

5. Sea A una matriz cuadrada de orden 4 con determinante $|A|=2$. Hallar:

a) $|3A^{-1}|$

b) $|(3A)^{-1}|$

a) $|3A^{-1}|=3^4|A^{-1}|=81\frac{1}{|A|}=\frac{81}{2}$

b) $|(3A)^{-1}|=\frac{1}{|3\text{A}|}=\frac{1}{3^4|A|}=\frac{1}{81\cdot 2}=\frac{1}{162}$

6. Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ **. Calcula:**

a) $|A^{-1}|$ **b)** $|(5A)^{-1}|$ **c)** $|5A|$

a) $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

$|A|=-1-1=-2 \rightarrow |A^{-1}|=\frac{-1}{2}$

b) $|(5A)^{-1}|=\frac{1}{|5A|}=\frac{1}{5^2\cdot|A|}=\frac{1}{25\cdot(-2)}=\frac{-1}{50}$

c) $|5A|=5^2\cdot|A|=25\cdot(-2)=-50$

7. Razonar de manera adecuada los siguientes apartados:

a) Sea $C=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ **e** I **la matriz identidad de orden 3. Comprobar** $C^2=2C-I$ **y calcula la matriz** C^4 **.**

b) El valor del determinante de la matriz $(3A^4)\cdot(4A^2)^{-1}$ **, sabiendo que** A **es una matriz cuadrada de cuatro columnas cuyo determinante vale** -1 **.**

c) La matriz B **que admite inversa y que verifica la igualdad** $B\cdot B=B$ **.**

a) $C^2=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

$$2C-I=\begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, se cumple: $C^2=2C-I$

Además:

$$C^4=C^2\cdot C^2=\begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

b) Utilizando propiedades de determinantes:

$$|(3A^4)\cdot(4A^2)^{-1}|=|3A^4|\cdot|(4A^2)^{-1}|=3^4\cdot|A^4|\cdot\frac{1}{|4A^2|}=3^4\cdot|A^4|\cdot\frac{1}{4^4\cdot|A^2|}=\frac{81}{256}\cdot|A^2|=\frac{81}{256}\cdot|A|^2=\frac{81}{256}$$

c) La definición de matriz identidad I es ser el elemento neutro del producto, de tal forma que $B\cdot I=B$. Además, la matriz identidad admite inversa por ser su determinante distinto de cero.

En consecuencia, $B=I \rightarrow I\cdot I=I$

8. Sea $P=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ **y** $J=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determinar P^{-1}

b) Determinar B^{-1} **, inversa de la matriz** $B=P^{-1}J^{-1}$

c) Calcular el determinante de A^2 **, siendo** $A=P\cdot J\cdot P^{-1}$

a) Ya sea por Gauss-Jordan o por adjuntos, puedes utilizar la web **www.matrixcalc.org/es** para comprobar los pasos para obtener la matriz inversa de P y de J :

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$J^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $B=P^{-1}J^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1/2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 5 & -1/2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

c) El determinante de A es igual al producto de determinantes:

$$|A|=|P|\cdot|J|\cdot|P^{-1}|=|P|\cdot|J|\cdot\frac{1}{|P|}=|J|=-2 \rightarrow |A^2|=|A|\cdot|A|=4$$

9. Calcula la potencia A^{2017} **de** $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3\cdot A=A$$

$$A^5=A^4\cdot A=A^2$$

$$A^6=A^5\cdot A=A^3$$

Es decir, la potencia A^n se repite cada tres términos.

Si hacemos la división entre 3 y miramos el resto → $2017:3$ → Resto = 1 → $A^{2017}=A$

En este ejercicio no hemos aplicado inducción matemática, ya que no teníamos una regla general para cualquier valor de n , sino tres reglas generales para valores de n cuyo resto con el número 3 fuese igual a 0, 1 y 2.

En este tipo de ejercicios con formas distintas de la matriz n-ésima, es suficiente con razonar tal y como lo hemos realizado.

10. Si $A=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x-1 & 2 & 0 \\ 2 & x-1 & 2 \end{pmatrix}$ **determina los valores de** x **para los que se cumple que** $|B|=1$ **, siendo** $B=\frac{1}{2}A$ **.**

$$B=\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x-1 & 2 & 0 \\ 2 & x-1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |B|=\left|\frac{1}{2}A\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^3|A|$$

Donde hemos aplicado propiedad de determinantes: un número real sale del determinante elevado a la dimensión de la matriz sobre la que está multiplicando.

Si $|B|=1 \rightarrow 1=\frac{1}{8}|A| \rightarrow 8=|A|$

Por lo tanto, debemos realizar el determinante de A e igualarlo a 8. Y podremos despejar los valores de x

$$|A|=4x+0+(x-1)^2-(4+0+2(x-1))=4x+(x-1)^2-4-2(x-1)$$
$$|A|=4x+x^2+1-2x-4-2x+2=x^2-1$$

Si $|A|=8 \rightarrow x^2-1=8 \rightarrow x^2=9 \rightarrow x=\pm 3$