Problemas – Tema 6

CCSS Problemas resueltos - 3 - operaciones elementales al operar con matrices

1. Si $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$ **, calcula el valor del número real** a **para que se cumpla** $A^2=I$

$$A^2=I \quad\rightarrow\quad \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Operamos e igualamos a cada término m_{ij} de la matriz identidad:

$m_{11} \rightarrow 1=1$

$m_{12} \rightarrow 1+a=0 \rightarrow a=-1$

$m_{13} \rightarrow 1+a=0 \rightarrow a=-1$

$m_{21} \rightarrow 0=0$

$m_{22} \rightarrow a^2=1 \rightarrow a=\pm 1$

$m_{23} \rightarrow 0=0$

$m_{31} \rightarrow 0=0$

$m_{32} \rightarrow 0=0$

$m_{33} \rightarrow a^2=1 \rightarrow a=\pm 1$

Por lo tanto, la condición que cumple todas las igualdades es $a=-1$.

2. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1+m & 1\\ 1 & 1-m\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ **. ¿Para qué valores de** m **se verifica** $A^2=2A+B$ **? .**

$$A^2=2A+B \rightarrow \begin{pmatrix}1+m & 1\\ 1 & 1-m\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1+m & 1\\ 1 & 1-m\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1+m & 1\\ 1 & 1-m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Operamos.

$$\begin{pmatrix}(1+m)^2+1 & 1+m+1-m\\ 1+m+1-m & 1+(1-m)^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+2m & 2\\ 2 & 2-2m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}m^2+2+2m & 2\\ 2 & m^2+2-2m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2m & 1\\ 3 & 2-2m\end{pmatrix}$$

Igualamos término a término en ambas matrices, encontramos las siguientes incongruencias o absurdos matemáticos.

$$2=1 \quad , \quad 2=3$$

Por lo tanto, no existe ningún valor real m que satisfaga la ecuación matricial.

3. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **,** $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$ **, escribe (no resolver) el sistema de ecuaciones lineales dado por** $X^t A=B^t$ **.**

En primer lugar, aplicamos traspuesta:

$$X^t=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \quad , \quad B^t=\begin{pmatrix} 2m^2-1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m^2-1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

¡Ojito! No mezcles el orden al multiplicar matrices. Y el resultado del producto de matrices del término de la izquierda es una matriz de 1 fila y 3 columnas.

$$\begin{pmatrix} (2-m)x+y+mz & x+my+z & (2m-1)x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m^2-1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

Dos matrices son iguales si sus coeficiente son iguales. Por lo tanto, igualamos coeficientes y llegamos al sistema:

$$\left\{ \begin{array}{c} (2-m)x+y+mz=2m^2-1 \\ x+my+z=m \\ (2m-1)x+y+z=1 \end{array} \right\}$$

4. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ **,** $B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 4\end{pmatrix}$ **y** $C=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 0 & 5\end{pmatrix}$ **Efectuar:**

a) $(A+B+C)^t$

b) $(A^t+B^t+C^t)^2$

c) $(A\cdot B)^t$

d) $A^t\cdot B^t$

a) $A+B+C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 7\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5\\ -1 & 11\end{pmatrix}$

$(A+B+C)^t=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 5 & 11\end{pmatrix}$

b) $A^t+B^t+C^t=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 7 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 5 & 11\end{pmatrix}$

$(A^t+B^t+C^t)^2=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 5 & 11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -1\\ 5 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & -15\\ 75 & 116\end{pmatrix}$

c) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 8\end{pmatrix}$

$(A\cdot B)^t=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 8\end{pmatrix}$

d) $A^t\cdot B^t=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 7\end{pmatrix}$

5. Sea $A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ **. Obtener** A^3

$$A^3=A^2\cdot A$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$