Rezept I zur Verfertigung einer bizirkularen Quartik ...

Rezept* I *zur Verfertigung einer bizirkularen Quartik mit Sechs-Eck-Verzierung

Es ist möglich, online zu kochen; jedoch müssen halbfertige oder fertige Ergebnisse gespeichert werden, sonst ist die Mühe umsonst! Empfehlen würden wir, das Applet vorher downzuloaden; die Werkzeuge stehen dann zur Verfügung. Das Rezept selber ist als pdf-Datei unten anhängt.

Wem die Schritte **I.1** bis **I.6** zu zeitraubend sind, kann im **Rezept II** mit den dort schon bereitgestellten Zutaten **I.1 - I.6** weiter kochen!

I.1 : Man nehme 4 Punkte auf einem ***Kreis*** k_x: die ***4 Brennpunkte*** der zu verfertigenden ***Quartik***.

Die Punkte können auch auf einer ***Geraden*** liegen. Es können auch ***Brennpunkte*** zusammenfallen! Dann erhält man aber nur ***Kegelschnitte***, bzw. das, was

MOEBIUS-Transformationen daraus machen.

I.2 : Diese ***4 Punkte*** kann man auf drei Weisen in 2 Punkte-Paare zerlegen.

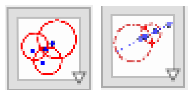
Konstruiere zu jedem dieser Paare den ***orthogonalen Kreis*** zu k_x durch diese Punkte.

Wie? Wenn die Punkte auf einer Geraden liegen, dann liegen die Kreis-Mittelpunkte auch auf der Geraden.

Andernfalls sind die Schnittpunkte der Tangenten an den Kreis k_x die gesuchten Kreis-Mittelpunkte

I.3 : Konstruiere zu jedem dieser 3 Kreispaare den zugehörigen von k_x verschiedenen ***Symmetrie-Kreis***.

Am schnellsten erledigen sich **I.2** und **I.3** mit den Werkzeugen: Symmetrie-Kreise zu 4 Punkten:



für 4 Punkte auf einem Kreis / für 4 Punkte auf einer Geraden

Selber? siehe **I.3b**

I.4 : Wähle auf k_x irgendeinen **Scheitelpunkt** und konstruiere mit Hilfe der ***Symmetriekreise*** die anderen ***Scheitelpunkte***.

I.5 : Konstruiere die ***6 Scheitel-Kreise***: sie sind orthogonal zu k_x und gehen durch die ***Scheitelpunkte***.

Wie? siehe oben!

Wenn 2 ***Brennpunkte*** zusammenfallen, gibt es nur eine weitere ***Symmetrie***, und nur 3 ***Scheitelkreise***, 2 davon gehen durch den ***doppelten Brennpunkt***.

I.6 : Wähle einen der ***Brennpunkte*** aus, und konstruiere die zugehörigen ***Leitkreise***!

Dazu muss man wissen, dass die ***Leitkreisen*** aus ***Symmetrie-Gründen*** orthogonal zu k_x liegen. Und dass

die Spiegelungspunkte des ausgewählten ***Brennpunkt***s bei der Spiegelung an den ***doppelt-berührenden (DB)-Kreisen***

auf den zugehörigen ***Leitkreisen*** liegen.

Die ***Scheitelkreise*** sind aber ***DB-Kreise***. Spiegelt man **F** an den zu einer ***Symmetrie*** gehörenden

2 Scheitelkreisen, so erhält man die 2 ***Punkte*** eines ***Leitkreises*** auf k_x.

Bei zusammenfallenden ***Brennpunkten*** geht einer der ***Leitkreise*** durch diesen ***doppelten Brennpunkt***!

Nützlich ist es, erst ***einen*** ***Leitkreis*** zu konstruieren!

I.7 : ***Konstruktion der DB-Kreise***: Wähle einen beweglichen ***Punkt*** **L** auf einem ***Leitkreis***.

k_s sei der zugehörige ***Symmetrie-Kreis***. Man erkennt diesen an den definierenden ***Scheitelkreisen***.

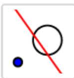
Falls der Symmetriekreis imaginär ist, nehme man die Hintereinanderausführung der Spiegelungen an den 3 reellen

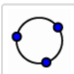
Kreisen. **F** sei der ausgewählte ***Bennpunkt***, **F'** der Spiegelpunkt von **F** an k_s und **L'** der Spiegelpunkt von **L** an k_s.

Der Schnittpunkt der Geraden **FL** und **F'L'** ist der Mittelpunkt **M** des zugehörigen doppelt-berührenden Kreises dk.

Da **F** und **L** spiegelbildlich zu dk liegen, ist dk orthogonal zu allen Kreisen durch **F** und **L**, also zB. orthogonal

zum Kreis k durch **F**, **L** und **L'**; dk ist auch orthogonal zu k_s.

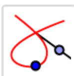
Die ***Polare*** von **M**  zu einem der beiden Kreise k oder k_s schneidet

diesen in Punkten von dk  .

I.8 : ***Konstruktion der Quartikpunkte und der Quartik als Ortskurve***:

F'' und **F'''** seien die anderen beiden ***Brennpunkte***, sie liegen spiegelbildlich zum ***Leitkreis***.

Der ***Brennkreis*** durch **F''** und **F'''** und **L** schneidet dk in 2 Quartik-Punkten. (Kontrolle: dieser ***Brennkreis*** ist orthogonal zum ***Leitkreis***!)

Die ***Quartik*** ist die ***Ortskurve***  dieser beiden Punkte bezüglich **L** auf

dem ***Leitkreis***.

Der doppelt-berührende Kreis dk ist halbiert die Winkel zwischen den beiden Brennkreisen; der 2. Brennkreis geht

durch **F** und **F'** und durch die Kurvenpunkte.

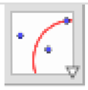
I.9 : ***Sechs-Eck-Verzierung***: Die ***Sechs-Eck-Bedingung*** ist in demjenigen offenen Gebiet zwischen den Kurventeilen gültig,

welches die ***Brennpunkte*** nicht enthält!

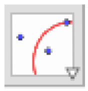
Durch jeden ***Punkt*** **P** in diesem Gebiet gehen zu jeder ***Symmetrie*** genau 2 ***Kreise***, welche die Quartik ***doppelt berühren***!

Es sei σ die Spiegelung, die zum ***Symmetriekreis*** k_s gehöre, und **P'** der Spiegelpunkt.

F sei wieder der ausgewählte ***Brennpunkt*** und k_L der zugehörige ***Leitkreis***.

Fälle von **F** den ***Mittellot-Kreis*** k_m zu **P P'** (zuerst **P**, **P'**, dann **F** markieren!) 

(*) k_m schneidet den ***Leitkreis*** k_L in 2 Punkten, **L_1** und **L_2**.

Fälle von **P** die ***Mittellot-Kreise*** dk_1, dk_2 zu **F** **L_1**, bzw. zu **F** **L_2** 

Damit erhält man die zur ***Symmetrie*** σ gehörenden ***DB-Kreise*** durch **P**. Die Berührpunkte mit der Quartik findet man
als Schnittpunkte mit den ***Brennkreisen*** durch **F''** und **F'''** und **L_1**, bzw. **L_2**.
Für die 3 möglichen Symmetrien ergeben sich also insgesammt ***6 DB-Kreis-Scharen***. Für eine ***6-Eck-Verzierung*** muss
man 3 davon auswählen!

Für eine funktionierende ***6-Eck-Verzierung*** muss man darauf achten, dass die gewählten Schnittpunkte **L** mit
den ***Leitkreisen*** zusammenpassen:
es gibt immer 2 ***Schnittpunkte*** (*), für die ***DB-Kreis-Schar*** müssen diese ***Schnittpunkte*** nahe beieinander liegen.

I.3b : ***Wie konstruiert man die Symmetriekreise zu 4 Punkten auf einem Kreis*** k ***(einer Geraden)?***

Konstruiere zuerst alle zu k orthogonalen Kreise durch je 2 der 4 Punkte. Das sind 6 Kreise. 2 davon schneiden sich.
Die beiden ***Winkelhalbierenden-Kreise*** sind 2 der Symmetriekreise, k ist der 3., der 4. ist imaginär.
Achtung! Diese Konstruktion hängt von der Reihenfolge der 4 Punkte ab!

– Walter Füchte