บทที่ 3
เส้นขนาน

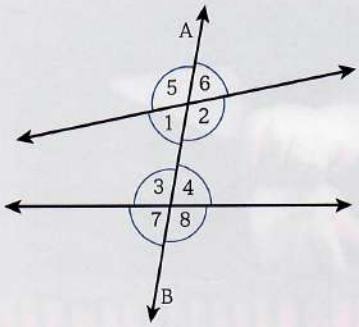


“ในการก่ออิฐสำหรับสร้างบ้านหรืออาคาร ช่างปูนจะใช้เอ็นขึงในแนวนอนหรือแนวดิ่ง เพื่อกำหนดแนวในการก่ออิฐ และตรวจสอบระดับทุก 3–5 ชั้น เพื่อให้ได้ผนังที่แข็งแรงและสวยงาม การขึงเอ็นเพื่อกำหนดแนวในการก่ออิฐดังกล่าวนั้น ใช้พื้นฐานในเรื่อง เส้นขนาน”



ทบทวนความรู้ก่อนเรียน

- มุมที่เกิดจากเส้นตัดตัดเส้นตรง 2 เส้น



จากรูป $\overleftrightarrow{AB}$ เรียกว่า เส้นตัด AB

เรียก $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$ และ $\hat{4}$ ว่าเป็นมุมภายใน และ

$\hat{5}, \hat{6}, \hat{7}$ และ $\hat{8}$ ว่าเป็นมุมภายนอก

เรียก $\hat{1}$ และ $\hat{3}$ ว่าเป็นมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด

$\hat{2}$ และ $\hat{4}$ ว่าเป็นมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด

เรียก $\hat{1}$ และ $\hat{4}$ ว่าเป็นมุมแย้งกัน

$\hat{2}$ และ $\hat{3}$ ว่าเป็นมุมแย้งกัน

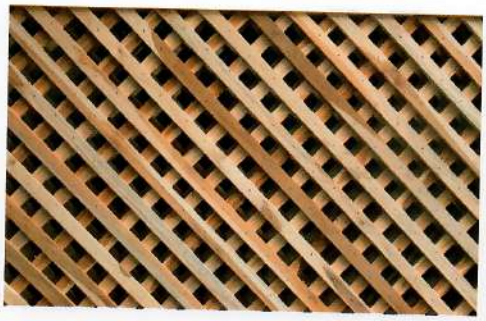
- ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากัน

- มุมตรงมีขนาด 180 องศา

นักเรียนสามารถทำแบบทดสอบความรู้พื้นฐานก่อนเรียนได้ที่ http://ipst.me/9148

3.1 เส้นขนานและมุมภายใน

ในสิ่งแวดล้อมรอบตัวเรา มีตัวอย่างของสิ่งที่มีลักษณะของ**เส้นขนาน (parallel lines)** ที่สร้างขึ้นเพื่อความสวยงามและเพื่อประโยชน์ในการใช้งาน เช่น ไม้ระแนง เส้นชะลอความเร็วรถ รางรถไฟ และเส้นบรรทัดในสมุด





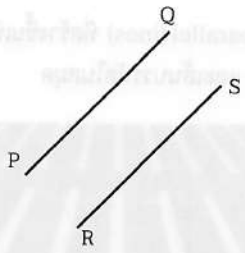

การขนานกันของเส้นตรงมีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม เส้นตรงสองเส้นที่อยู่บนระนาบเดียวกัน ขนานกัน ก็ต่อเมื่อ เส้นตรงทั้งสองเส้นนั้นไม่ตัดกัน

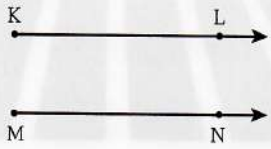


เมื่อ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ขนานกัน อาจกล่าวว่า $\overleftrightarrow{AB}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{CD}$ หรือ $\overleftrightarrow{CD}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{AB}$ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ หรือ $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

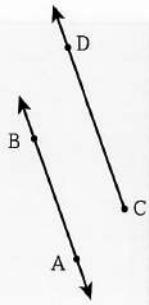
เราสามารถกล่าวว่าส่วนของเส้นตรงหรือรังสีขนานกัน เมื่อส่วนของเส้นตรงหรือรังสีนั้นเป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรงที่ขนานกัน เช่น

1. 

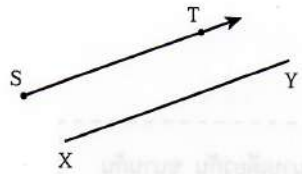
$\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$

2. 

$\overleftrightarrow{KL} \parallel \overleftrightarrow{MN}$

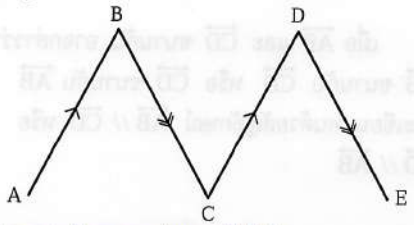
3. 

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

4. 

$\overrightarrow{ST} \parallel \overrightarrow{XY}$

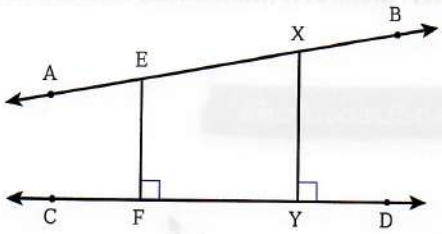
ในการเขียนรูปเส้นตรง ส่วนของเส้นตรง หรือรังสีที่ขนานกัน อาจใช้ลูกศรที่มีลักษณะเหมือนกัน แสดงเส้นที่ขนานกัน ดังตัวอย่างในรูป



จากรูป แสดงว่า $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
และ $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$

ระยะห่างระหว่างเส้นขนาน

พิจารณารูปต่อไปนี้



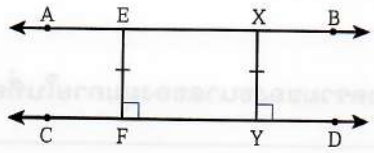
กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ อยู่บนระนาบเดียวกัน จุด E และจุด X เป็นจุดที่แตกต่างกันบน $\overleftrightarrow{AB}$ ลาก $\overline{EF}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด F และลาก $\overline{XY}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด Y

เรียก EF ว่า ระยะห่างระหว่าง $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่วัดจากจุด E

และ เรียก XY ว่า ระยะห่างระหว่าง $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่วัดจากจุด X

ในกรณีที่ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ไม่ขนานกัน จะได้ว่า EF ≠ XY นั่นคือระยะห่างระหว่าง $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่วัดจากจุดที่แตกต่างกันบน $\overleftrightarrow{AB}$ จะไม่เท่ากัน

ในกรณีที่ $\overleftrightarrow{AB}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{CD}$ จะได้ว่า EF = XY นั่นคือระยะห่างระหว่าง $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่วัดจากจุดที่แตกต่างกันบน $\overleftrightarrow{AB}$ จะเท่ากันเสมอ



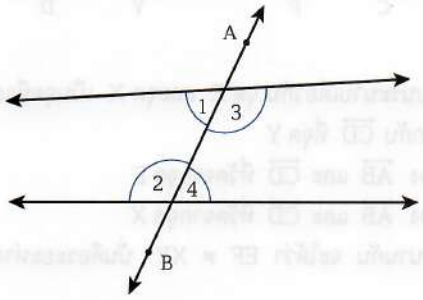
ในกรณีทั่วไป ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน แล้วระยะห่างระหว่างเส้นตรงคู่นั้นจะเท่ากันเสมอ และในทางกลับกัน ถ้าเส้นตรงสองเส้นมีระยะห่างระหว่างเส้นตรงเท่ากันเสมอ แล้วเส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน

ในทางปฏิบัติ เมื่อต้องการตรวจสอบว่า เส้นตรงสองเส้นที่กำหนดให้ขนานกันหรือไม่ อาจตรวจสอบระยะห่างระหว่างเส้นตรงทั้งสองที่วัดจากจุดสองจุดที่แตกต่างกันบนเส้นตรงเส้นหนึ่ง และจุดทั้งสองนั้นอยู่บนด้านเดียวกันของเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง

ในการตรวจสอบว่าเส้นตรงคู่ใดขนานกันหรือไม่ นอกจากการใช้บทนิยามของเส้นขนานโดยตรงและการพิจารณาจากระยะห่างระหว่างเส้นตรงสองเส้นแล้ว ยังมีวิธีการอื่น ๆ อีกที่จะตรวจสอบ โดยพิจารณาจากขนาดของ**มุมภายใน (interior angle)** **มุมแย้ง (alternate angles)** หรือ **มุมภายนอก (exterior angle)** มุมเหล่านี้เป็นมุมที่เกิดจากเส้นตรงเส้นหนึ่งมาตัดเส้นตรงคู่นั้น เรียกเส้นตรงดังกล่าวว่า **เส้นตัดขวาง (transversal)** ซึ่งในที่นี้จะเรียกสั้น ๆ ว่า **เส้นตัด**

มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด

พิจารณารูปต่อไปนี้



จากรูป $\overleftrightarrow{AB}$ เรียกว่า **เส้นตัด** AB
เรียก $\hat{1}$ และ $\hat{2}$ ว่า **มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด** AB และ
เรียก $\hat{3}$ และ $\hat{4}$ ว่า **มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด** AB ด้วย
ในการเขียนรูปเส้นตัด AB อาจใช้ $\overline{AB}$ หรือ $\overrightarrow{AB}$ แทน $\overleftrightarrow{AB}$ ก็ได้

กิจกรรม : สำรวจผลรวมของขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด

อุปกรณ์

- ไม้บรรทัด
- โพรแทรกเตอร์



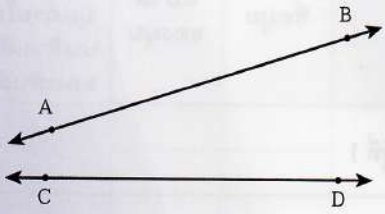
มุมเทคโนโลยี

นักเรียนสามารถดาวน์โหลดไฟล์ GSP เพื่อสำรวจเพิ่มเติมเกี่ยวกับผลรวมของขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด ได้ที่ http://ipst.me/9149

ขั้นตอนการทำกิจกรรม

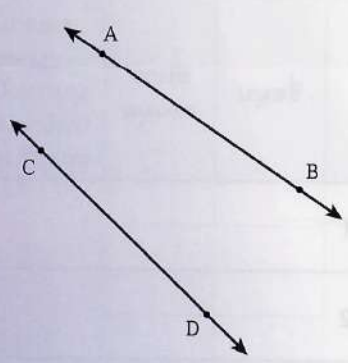
1. ในแต่ละข้อกำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ **ไม่ขนานกัน** ให้นักเรียนเขียนเส้นตัด XY ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ โดยให้ จุด M และจุด N เป็นจุดตัดบน $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ตามลำดับ จากนั้นให้ระบุว่า มุมคู่ใดบ้างที่เป็นมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด XY พร้อมทั้งวัดขนาดของมุมเหล่านั้น แล้วเติมลงในตารางให้สมบูรณ์

1)



	ชื่อมุม	ขนาดของมุม	ผลรวมของขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด XY
คู่ที่ 1			
คู่ที่ 2			

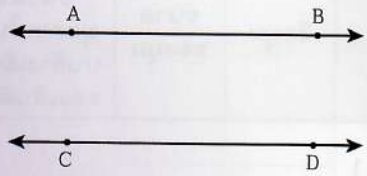
2)



	ชื่อมุม	ขนาดของมุม	ผลรวมของขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด XY
คู่ที่ 1			
คู่ที่ 2			

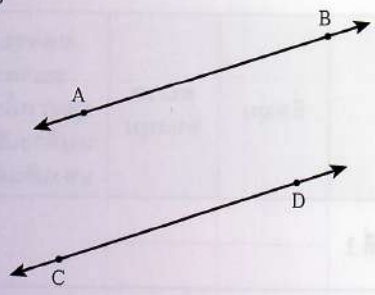
2. ในแต่ละข้อกำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ขนานกัน ให้นักเรียนเขียนเส้นตัด XY ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ โดยให้ จุด M และจุด N เป็นจุดตัดบน $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ตามลำดับ จากนั้นให้ระบุว่า มุมคู่ใดบ้างที่เป็นมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด XY พร้อมทั้งวัดขนาดของมุมเหล่านั้น แล้วเติมลงในตารางให้สมบูรณ์

1)



	ชื่อมุม	ขนาดของมุม	ผลรวมของขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด XY
คู่ที่ 1			
คู่ที่ 2			

2)



	ชื่อมุม	ขนาดของมุม	ผลรวมของขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด XY
คู่ที่ 1			
คู่ที่ 2			

3. จากการทำกิจกรรมในข้อ 1 และข้อ 2 เมื่อกำหนดเส้นตรงคู่หนึ่งมาให้ นักเรียนได้ข้อความคาดการณ์อย่างไรเกี่ยวกับผลรวมของขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด กับการขนานกันของเส้นตรงคู่นั้น

ข้อความคาดการณ์ที่ได้ในข้อ 3 สอดคล้องกับสมบัติของเส้นขนาน ดังนี้

1. ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180 องศา
2. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180 องศา แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน

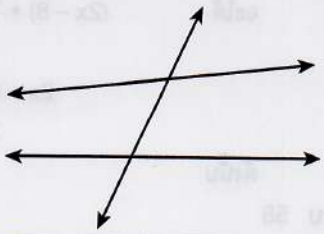
สมบัติข้อ 1 และข้อ 2 นี้ เมื่อนำมาเขียนใหม่โดยใช้ "ก็ต่อเมื่อ" จะได้ดังนี้

เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อ ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180 องศา

ชวนคิด 3.1

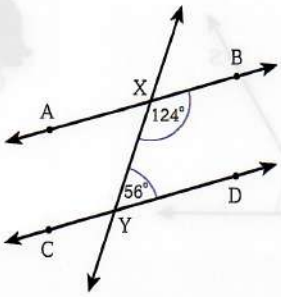
เมื่อกำหนดเส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกันให้ และมีเส้นตัดตัดเส้นตรงสองเส้นนั้น ไม่ว่าเส้นตัดจะเอียงทำมุมไปในแนวใดก็ตาม

1. ผลรวมของขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างซ้ายของเส้นตัด จะเท่ากันหรือไม่
2. ถ้าผลรวมของขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างขวาของเส้นตัดน้อยกว่า 180° แล้ว เส้นตรงทั้งสองเส้นจะมีลักษณะอย่างไร

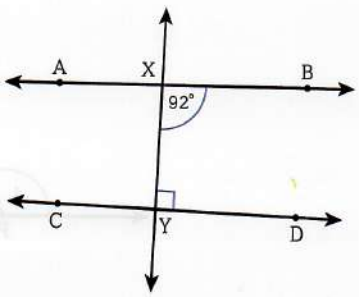


ตัวอย่างที่ 1 $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ในแต่ละข้อขนานกันหรือไม่ เพราะเหตุใด

1)



2)



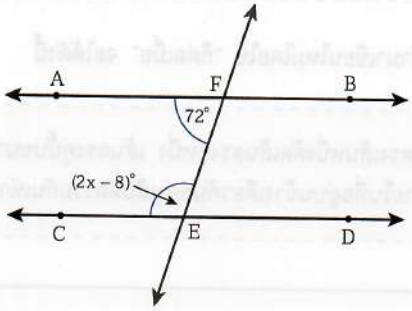
วิธีทำ 1) $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

เพราะว่า ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ $124 + 56 = 180$ องศา

2) $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ไม่ขนานกัน

เพราะว่า ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ $92 + 90 = 182$ องศา ซึ่งไม่เท่ากับ 180 องศา

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ จงหาค่าของ x



วิธีทำ เนื่องจาก $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

จะได้ $(2x - 8) + 72 = 180$ (ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดที่ตัดเส้นขนานรวมกันเท่ากับ 180°)

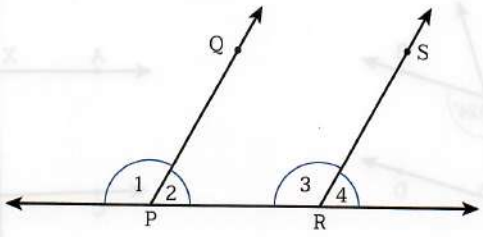
$2x + 64 = 180$

$2x = 116$

ดังนั้น $x = 58$

ตอบ 58

ตัวอย่างที่ 3 จากรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS}$ และมี $\overleftrightarrow{PR}$ เป็นเส้นตัด จงพิสูจน์ว่า $\hat{1} = \hat{3}$





กำหนดให้ $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS}$ และมี $\overleftrightarrow{PR}$ เป็นเส้นตัด
ต้องการพิสูจน์ว่า $\hat{1} = \hat{3}$
พิสูจน์ $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS}$ และมี $\overleftrightarrow{PR}$ เป็นเส้นตัด (กำหนดให้)

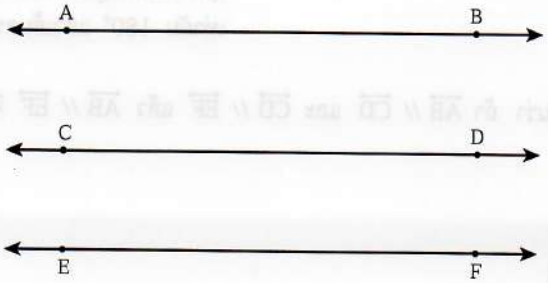
$\hat{2} + \hat{3} = 180^\circ$ (ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดที่ตัดเส้นขนานรวมกันเท่ากับ 180°)

$\hat{2} + \hat{1} = 180^\circ$ (ขนาดของมุมตรง)

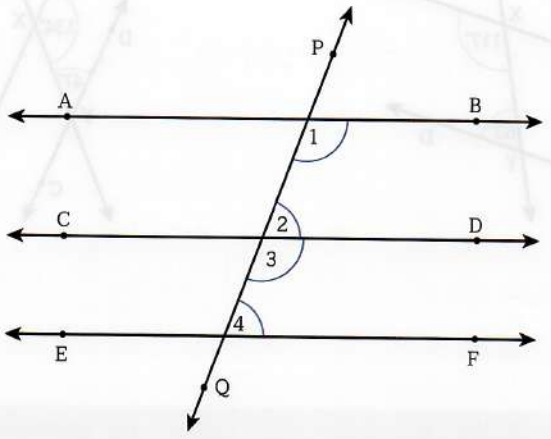
จะได้ $\hat{2} + \hat{1} = \hat{2} + \hat{3}$ (สมบัติของการเท่ากัน)

ดังนั้น $\hat{1} = \hat{3}$ (สมบัติของการเท่ากัน)

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ และ $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ ดังรูป จงพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$



กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ และ $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$
พิสูจน์ ลาก $\overleftrightarrow{PQ}$ ให้ตัด $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{EF}$ และให้ $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$ และ $\hat{4}$ เป็นดังรูป



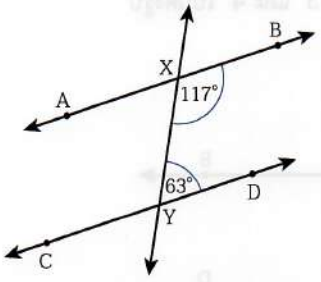
	$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ และมี $\overleftrightarrow{PQ}$ เป็นเส้นตัด	(กำหนดให้และจากการสร้าง)
	$\hat{1} + \hat{2} = 180^\circ$	(ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดที่ตัดเส้นขนานรวมกันเท่ากับ 180°)
	$\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ และมี $\overleftrightarrow{PQ}$ เป็นเส้นตัด	(กำหนดให้และจากการสร้าง)
	$\hat{3} + \hat{4} = 180^\circ$	(ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดที่ตัดเส้นขนานรวมกันเท่ากับ 180°)
	$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} = 180 + 180$	(สมบัติของการเท่ากัน)
เนื่องจาก	$\hat{2} + \hat{3} = 180^\circ$	(ขนาดของมุมตรง)
จะได้	$\hat{1} + \hat{4} = 180^\circ$	(สมบัติของการเท่ากัน)
ดังนั้น	$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$	(ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180° แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน)

จากตัวอย่างที่ 4 จะเห็นว่า ถ้า $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ และ $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ แล้ว $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ จึงกล่าวได้ว่า การขนานกันของเส้นตรงมีสมบัติถ่ายทอด

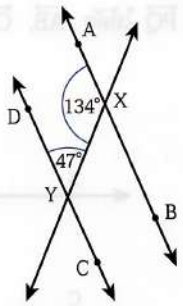
แบบฝึกหัด 3.1

1. เส้นตรงแต่ละคู่ต่อไปนี้ ขนานกันหรือไม่ เพราะเหตุใด

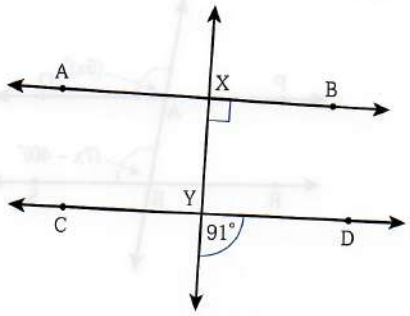
1)



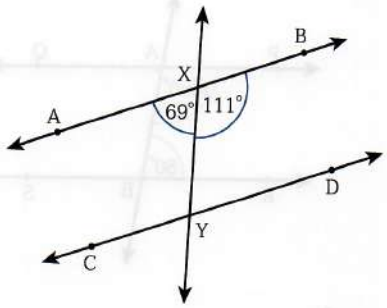
2)



3)

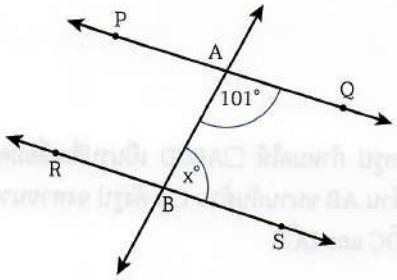


4)

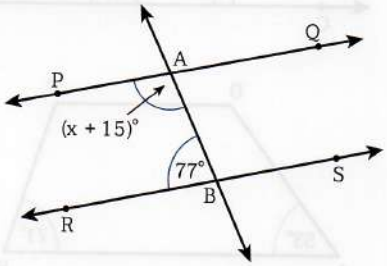


2. จงหาค่าของ x ในแต่ละข้อต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้ $\overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{RS}$

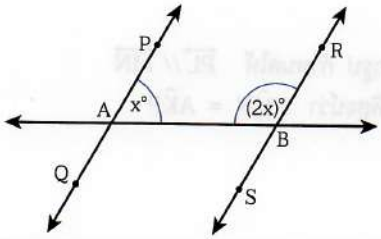
1)



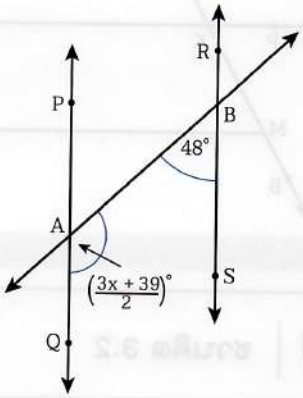
2)



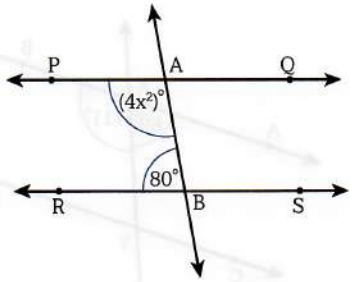
3)



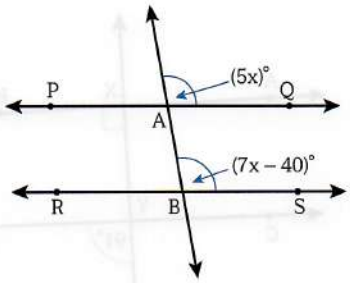
4)



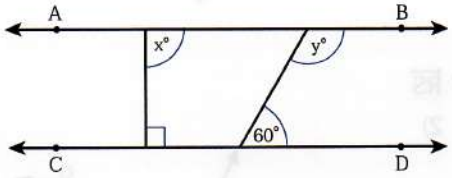
5)



6)

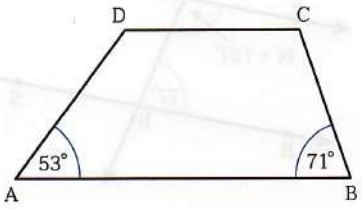


3.



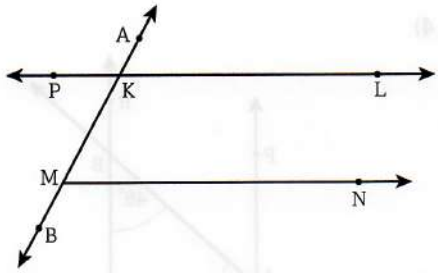
จากรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$
จงหาค่าของ $2x - y$

4.



จากรูป กำหนดให้ □ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู มีด้าน AB ขนานกับด้าน CD ดังรูป จงหาขนาดของ $A\hat{D}C$ และ $D\hat{C}B$

5.



จากรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{PL} \parallel \overleftrightarrow{MN}$
จงพิสูจน์ว่า $B\hat{M}N = A\hat{K}P$

ชวนคิด 3.2

ในรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากใด ๆ ด้านที่อยู่ตรงข้ามกันขนานกันหรือไม่ เพราะเหตุใด