**Az f(x) = x · |[x]| függvény értékkészletének topológiai elemzése**
Készítette a Műelme

**1. Alapdefiníciók és a függvény viselkedése**
Az f(x) = x · |[x]| függvény a valós számok halmazán értelmezett, ahol [x] az alsó egészrész (floor) függvényt jelöli. A függvény viselkedésének vizsgálatához a valós számegyenest félig nyílt intervallumokra bontjuk: x ∈ [n, n+1), ahol n egész szám.

Ezeken a szakaszokon [x] = n konstans, így a függvény szakaszonként lineárissá válik: f(x) = x · |n|

**2. Az értékkészlet szerkezete a nemnegatív tartományban (x ≥ 0)**
Ha x ≥ 0, akkor n ≥ 0, így |n| = n. A szakaszok képei a következők szerint alakulnak:

- Ha x ∈ [0, 1) => f(x) = x · 0 = 0, az értékkészlet része: {0}
- Ha x ∈ [1, 2) => f(x) = x · 1 = x, az értékkészlet része: [1, 2)
- Ha x ∈ [2, 3) => f(x) = x · 2 = 2x, az értékkészlet része: [4, 6)
- Ha x ∈ [3, 4) => f(x) = x · 3 = 3x, az értékkészlet része: [9, 12)
  Általánosan, ha x ∈ [n, n+1) (ahol n ≥ 0), a kapott rész-értékkészlet: [n², n² + n).
  A pozitív oldalon az egymást követő szakaszok között nyílt "lyukak" (hézagok) keletkeznek, például a (2, 4) vagy a (6, 9) intervallumok, amelyekhez nem tartozik valós x érték.

**3. Az értékkészlet szerkezete a negatív tartományban (x < 0)**
Ha x < 0, akkor az egészrész n ≤ -1 negatív egész szám. Az abszolút érték miatt |n| = -n, ami egy pozitív meredekséget eredményez. A függvény egyenlete ezen a szakaszon: f(x) = -n · x.

Mivel a meredekség (-n) pozitív, a függvény a negatív szakaszokon is szigorúan monoton növekvő. Vetítsük le az n ≤ x < n+1 egyenlőtlenséget a függvényértékekre:
-n · n ≤ -n · x < -n · (n+1), amiből következik: -n² ≤ f(x) < -n² - n

A konkrét negatív szakaszok képei:

- Ha x ∈ [-1, 0) => n = -1 => f(x) = 1 · x, az értékkészlet része: [-1, 0)
- Ha x ∈ [-2, -1) => n = -2 => f(x) = 2 · x, az értékkészlet része: [-4, -2)
- Ha x ∈ [-3, -2) => n = -3 => f(x) = 3 · x, az értékkészlet része: [-9, -6)
  ...
- Ha x ∈ [-45, -44) => n = -45 => f(x) = 45 · x, az értékkészlet része: [-2025, -1980)
- Ha x ∈ [-46, -45) => n = -46 => f(x) = 46 · x, az értékkészlet része: [-2116, -2070)

**4. Miért nem zárt és miért különleges ez a halmaz?**
A topológia szabályai szerint egy halmaz akkor zárt, ha tartalmazza az összes torlódási pontját. Ez az értékkészlet több okból sem zárt:

1. Félig nyílt komponensek: A negatív oldalon az értékkészletet alkotó részintervallumok [-n², -n² - n) alakúak. Ezek balról zártak, de jobbról nyíltak. Például a -2 torlódási pontja a halmaznak (alulról végtelenül megközelíthető a [-4, -2) intervallumon), de maga a -2 elem nem része az értékkészletnek, mert a következő szakasz már [-1, 0)-nál kezdődik.
2. Izolált hézagok (A 2027-es probléma): A fenti levezetésből látható, hogy a -2025 és a -2070 értékek között egy hatalmas szakadás van az értékkészletben. A (-2070, -2025) nyílt intervallum teljes egészében hiányzik, így a -2027 értékhez nem rendelhető semmilyen valós x hely.
   Következtetés: Az f(x) = x · |[x]| függvény értékkészlete félig nyílt intervallumok és a {0} együttes uniója, amely se nem nyílt, se nem zárt – egy izgalmas, lyukakkal teli matematikai struktúra.