

21. Beräkna

$$\frac{\frac{3}{8} - \frac{5}{7}}{\frac{1}{5} + \frac{3}{4}}.$$

Ange svaret på formen $\frac{p}{q}$, där p, q är heltal och bråket $\frac{p}{q}$ är maximalt förkortat.

$$\frac{\frac{3}{8} - \frac{5}{7}}{\frac{1}{5} + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{21}{56} - \frac{40}{56}}{\frac{4}{20} + \frac{15}{20}} = \frac{-\frac{19}{56}}{\frac{19}{20}} = -\frac{19 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5}{19 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = -\frac{5}{7 \cdot 2} = -\frac{5}{14}$$

22. Bestäm alla reella tal a , för vilka ekvationen $x^2 + 2ax + 3a = 0$ har (minst) en positiv lösning. Ange det största heltalet a med den egenskapen.

$$x^2 + 2ax + 3a = 0$$

$$x = -a \pm \sqrt{a^2 - 3a} \quad x = -a \pm \sqrt{a(a-3)}$$

Denna har positiva lösningar när a är negativt.

Under rottecknet blir då även $\sqrt{a(a-3)}$ positivt, då det är två negativa tal multiplicerade med varandra.

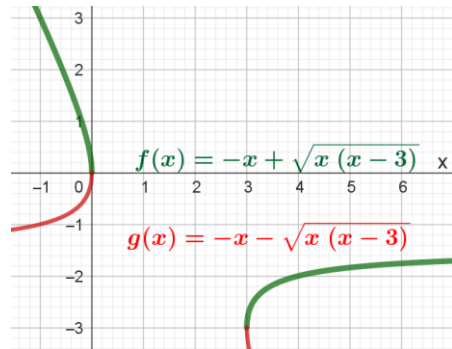
MEN, finns det något reellt tal, a , som är positivt och där $x = -a - \sqrt{a(a-3)}$ blir negativt?

Nej, $a = 1$ och $a = 2$ ger ogiltiga värden, då det blir negativt under rottecknet, $a = 3$ ger $x = -3$

Talet $a = 0$ ger ingen positiv lösning för x , utan det ger $x = 0$,

De tal som ger positiva lösningar för ekvationen är $a = -\infty, \dots, -100, \dots, -3, -2, -1$,

Varav det största av dessa tal är $a = -1$.



23. Givet funktionen $f(x) = \frac{1 + \ln \sqrt{x}}{1 - \ln \sqrt{x}}$, beräkna $f'(x)$ och ange $f'\left(\frac{1}{e}\right)$.

Vi skriver först om $f(x) = \frac{1 + \ln \sqrt{x}}{1 - \ln \sqrt{x}}$ till $f(x) = \frac{1 + \frac{1}{2} \ln x}{1 - \frac{1}{2} \ln x}$ och deriverar sedan med kvotregeln och kedjeregeln:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2x} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \ln x\right) - \left(-\frac{1}{2x}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \ln x\right)}{\left(1 - \frac{1}{2} \ln x\right)^2}$$

Förenklat :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\left(1 - \frac{1}{2} \ln x\right)^2}$$

$$f'\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{\frac{1}{1/e}}{\left(1 - \frac{1}{2} \cdot (-1)\right)^2} = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{e}{(3/2)^2} = \frac{4e}{9}$$

24. Beräkna $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x^3 - \frac{1}{\pi - x} + \sin^2 x \right) dx$.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi - x} dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx =$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{4} - \frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^4}{4} = \frac{\pi^4}{64} - \frac{\pi^4}{64} = 0$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi - x} dx = [-\ln|\pi - x|]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\ln\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) + \ln\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + \ln\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \ln\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \ln 3$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx - \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2} [x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin 2x}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) - \frac{1}{4} (\sin \pi - \sin(-\pi)) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Svar: } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi - x} dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = -\ln 3 + \frac{\pi}{2}$$

25. Beräkna och ange $\cos 75^\circ + \sin 15^\circ$.

$$\cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\text{och } \cos(45^\circ + 30^\circ) + \sin(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

26. Lös ekvationen

$$2 \ln \frac{1}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{\ln x} = 2.$$

Ange ekvationens största lösning.

Förenklar ekvationen : $2 \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{x}} + 3 \cdot \sqrt{\ln x} = 2$

$$2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \ln x \right) + 3 \cdot \sqrt{\ln x} = 2$$

$$-\ln x + 3 \cdot \sqrt{\ln x} = 2$$

$$-u^2 + 3u = 2 \text{ har rötterna (} u = 1,5 \pm \sqrt{2,25 - 2} \text{ , } u_1 = 1 \text{ } u_2 = 2 \text{)}$$

$$u_1 = 1 : \sqrt{\ln x} = 1 \Rightarrow x = e$$

$$u_2 = 2 : \sqrt{\ln x} = 2 \Rightarrow x = e^4$$

27. Lös olikheten

$$\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x-a} > \frac{2}{x}.$$

Ange det största positiva talet a sådant att olikheten har exakt 123 negativa heltalslösningar.

$$\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x-a} > \frac{2}{x}$$

har minsta gemensamma nämnare i vänsterledet $(x+a) \cdot (x-a)$

$$\frac{x-a}{(x+a)(x-a)} + \frac{x+a}{(x-a)(x+a)} > \frac{2}{x}$$

$$\frac{2x}{x^2 - a^2} > \frac{2}{x}$$

har minsta gemensamma nämnare totalt $x \cdot (x^2 - a^2)$

$$2x \cdot x > 2 \cdot (x^2 - a^2)$$

$$2x^2 > 2x^2 - 2a^2$$

$$0 > -2a^2 \quad (\text{alltid sant om } a \neq 0)$$

Olikheten gäller bara om $x \cdot (x^2 - a^2)$ är positivt. (annars (vid multiplikation/division med negativt tal) vänder olikheten tecken , eller om $x \cdot (x^2 - a^2) = 0$ så uppstår $0 = 0$ som är en likhet, inte en strikt olikhet).

$f(x) = x \cdot (x^2 - a^2)$ har nollställena vid $x_1 = 0$, $x_2 = -a$, $x_3 = a$

x	$x < -a$	$x = -a$	$-a < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < a$	$x = a$	$x > a$
$f(x)$	$x < 0$, $x^2 - a^2 > 0$ $f(x) < 0$ (negativt)	$f(x) = 0$	$x < 0$, $x^2 - a^2 < 0$ $f(x) > 0$ (positivt)	$f(x) = 0$	$x > 0$, $x^2 - a^2 < 0$ $f(x) < 0$ (negativt)	$f(x) = 0$	$x > 0$, $x^2 - a^2 > 0$ $f(x) > 0$ (positivt)

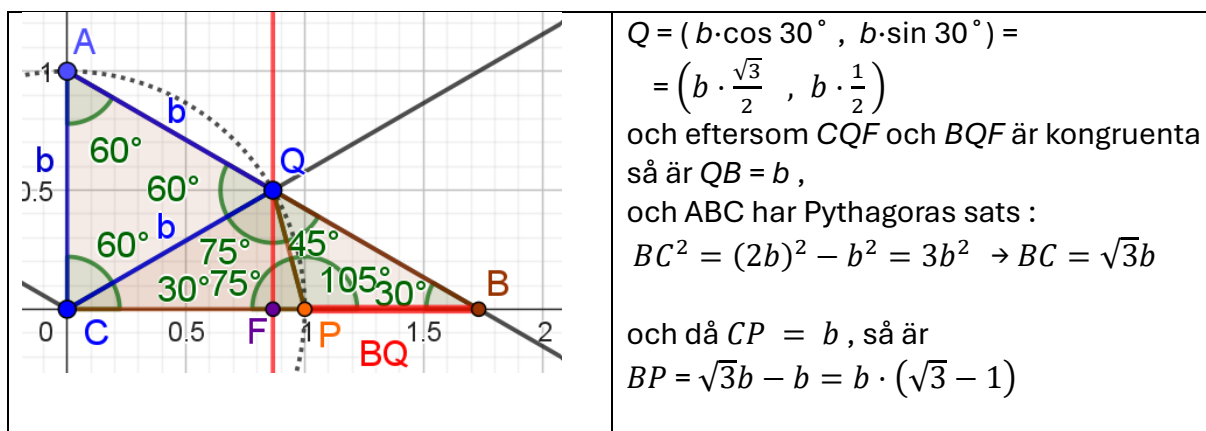
Alltså i intervallen $-a < x < 0$ och $x > a$ så är uttrycket $x \cdot (x^2 - a^2)$ positivt, men vi är intresserade av negativa heltalslösningar alltså heltal i intervallet $-a < x < 0$

Det är heltalen $-a < x < 0$, som ger giltig division med begränsat antal lösningar

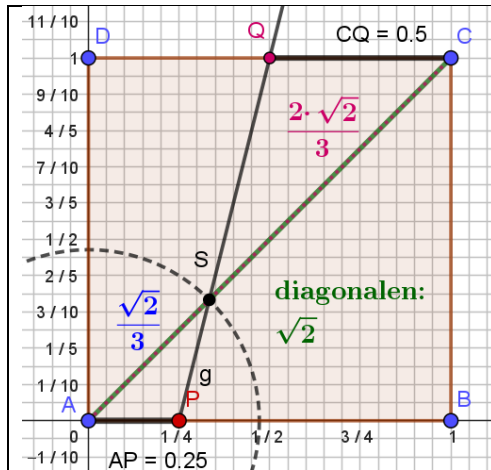
alltså behöver a vara $a = 124$ så att $-a = -124$ för att då fås 123 negativa heltalslösningar för x för olikheten . Dessa lösningar är -123 , -122 , -121 ... , -3 , -2 , -1

Svar: $a = 124$

28. Triangeln ABC är rätvinklig med rät vinkel vid hörnet C . Kateten AC har längden b (längdenheter). Cirkeln med medelpunkt C och radie b skär sidan AB i punkterna A och P och sidan BC i punkten Q . Givet att vinkeln $\angle PCQ$ är 30° , bestäm och ange längden av sträckan BQ .



29. Kvadraten $ABCD$ har sidlängd 1 längdenhet. Punkten P ligger på sidan AB och är sådan att $|AP| = \frac{1}{4}$ l.e. Punkten Q ligger på sidan CD . Sträckorna PQ och AC skär varandra i punkten S , där $|AS| = \frac{\sqrt{2}}{3}$ l.e. Bestäm och ange längden av sträckan CQ .



Diagonalen AC är $\sqrt{2}$.

AS är $\frac{\sqrt{2}}{3}$, således blir $SC = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

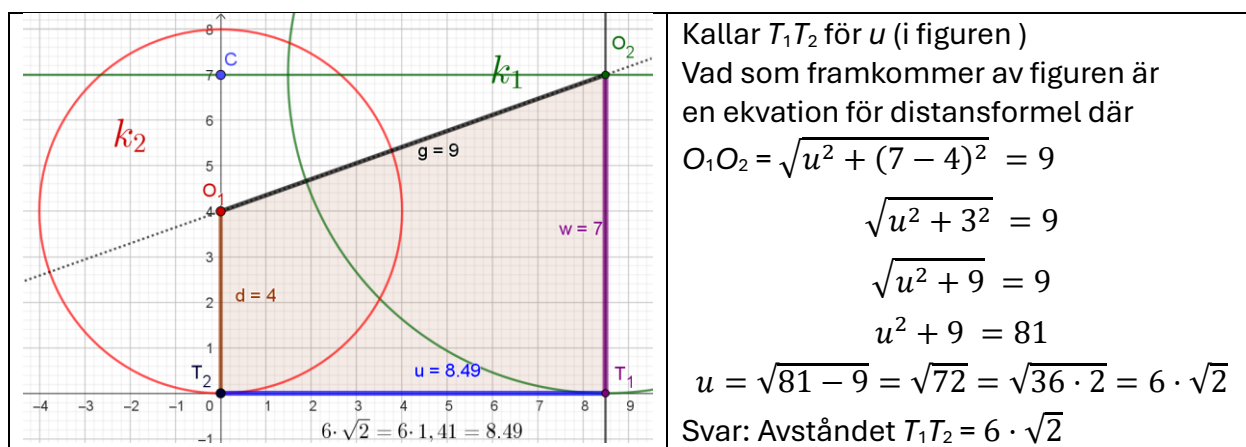
Triangeln APS och CQS är likformiga
med motsvarande sträckor

$$\frac{CQ}{AP} = \frac{CS}{AS}$$

$$\frac{CQ}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}}$$

$$CQ = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1}{2} = 0,5$$

30. Cirklarna k_1 och k_2 med medelpunkter O_1 respektive O_2 har radier 7 längdenheter respektive 4 längdenheter. Avståndet mellan O_1 och O_2 är 9 längdenheter. Linjen t tangerar k_1 i punkten T_1 och k_2 i punkten T_2 . Bestäm längden av sträckan T_1T_2 .



C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Bestäm alla reella tal $p \neq 1$ för vilka ekvationerna $x^2 + 2x + p = 0$ och $px^2 + 2x + 1 = 0$ har exakt en gemensam reell lösning.

("C" kallar jag även "31" då det finns 30 st föregående uppgifter på matematikdelen)

Ekvationerna

$$\begin{cases} \text{I} & x^2 + 2x + p = 0 \\ \text{II} & px^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

Ska gälla samtidigt

Med kvadratkomplettering blir ekvation I: $(x + 1)^2 - (1 - p)$
och

Med kvadratkomplettering blir ekvation II: $\frac{(x+1)^2}{p} - \frac{1-p}{p} = 0$

Lösningarna för I är $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-p}$ och lösningarna för II är $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-p}}{p}$

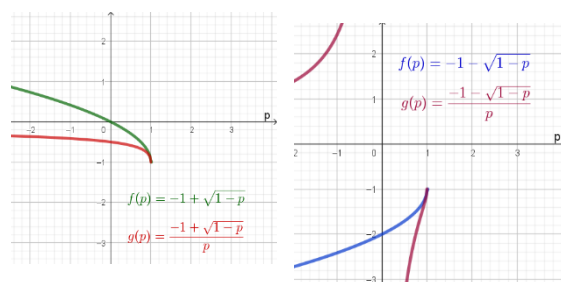
För $x_{1,2}$ så är $p \leq 1$ och för $x_{3,4}$ så är $p \leq 1$ och $p \neq 0$ Givet i uppgiften är även att $p \neq 1$

Vi bestämmer

$x_1 = -1 + \sqrt{1-p}$	$x_3 = \frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p}$
$x_2 = -1 - \sqrt{1-p}$	$x_4 = \frac{-1 - \sqrt{1-p}}{p}$

$$x_1 = -1 + \sqrt{1-p} \neq x_3 = \frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} \quad \text{och}$$

$$x_2 = -1 - \sqrt{1-p} \neq x_4 = \frac{-1 - \sqrt{1-p}}{p}$$



Undersöker därför om $x_1 = x_4$ och/eller $x_2 = x_3$ kan gälla :

$$-1 + \sqrt{1-p} = \frac{-1 - \sqrt{1-p}}{p} \quad \text{respektive} \quad -1 - \sqrt{1-p} = \frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p}$$

Först $x_1 = x_4$

$$-1 + \sqrt{1-p} = \frac{-1 - \sqrt{1-p}}{p}$$

$$-p + p\sqrt{1-p} = -1 - \sqrt{1-p}$$

$$1 - p = -(p+1) \cdot \sqrt{1-p}$$

Den likheten är omöjlig för $p > -1$, då tecknen isåfall skulle bli olika i Vänster Led och Höger LedFör $p \leq -1$ så är Vänster Led och Höger Led båda negativa

Om vi under den förutsättningen kvadrerar till :

$$(1-p)^2 = (-(p+1) \cdot \sqrt{1-p})^2$$

$$1 - 2p + p^2 = (p+1)^2 \cdot (\sqrt{1-p})^2$$

$$1 - 2p + p^2 = (1 + 2p + p^2) \cdot (1-p)$$

$$1 - 2p + p^2 = -p^3 - p^2 + p + 1$$

$$p^3 + 2p^2 - 3p = 0$$

$$p \cdot (p^2 + 2p - 3) = 0$$

$p_1 = 0$ eller $p_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1+3}$	$p_2 = 1$, $p_3 = -3$
---	------------------------

Här är det endast $p_3 = -3$ som uppfyller villkoret $p \leq -1$ På samma sätt $x_2 = x_3$

$$-1 - \sqrt{1-p} = \frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p}$$

$$-p - p\sqrt{1-p} = -1 + \sqrt{1-p}$$

$$1 - p = (p+1) \cdot \sqrt{1-p}$$

Den likheten är omöjlig för $p < -1$, då tecknen isåfall skulle bli olika i Vänster Led och Höger LedFör $p \geq -1$ så är Vänster Led och Höger Led båda negativa

Om vi under den förutsättningen kvadrerar till :

$$(1-p)^2 = (-(p+1) \cdot \sqrt{1-p})^2$$

$$1 - 2p + p^2 = (p + 1)^2 \cdot (\sqrt{1 - p})^2$$

$$1 - 2p + p^2 = (1 + 2p + p^2) \cdot (1 - p)$$

$$1 - 2p + p^2 = -p^3 - p^2 + p + 1$$

$$p^3 + 2p^2 - 3p = 0$$

$$p \cdot (p^2 + 2p - 3) = 0$$

$p_1 = 0$ eller $p_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1 + 3}$	$p_2 = 1$, $p_3 = -3$
---	------------------------

Här uppfyller det endast $p_2 = 1$ som uppfyller villkoret $p \geq -1$ eftersom $p \neq 0$ på grund av division med p .

Men $p = 1$ var uttryckligen ej tillåtet i uppgiften, så vi har inga lösningar som gäller/är tillåtna för $x_2 = x_3$.

Svar/slutsats : de två ekvationerna $\begin{cases} \text{I} & x^2 + 2x + p = 0 \\ \text{II} & px^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases}$ har exakt en gemensam

lösning endast för $p = -3$, då $-1 + \sqrt{1 - p} = \frac{-1 - \sqrt{1 - p}}{p}$

lösningen nedan i gul-ramad bild på graf:

