Domo geodésico

William Roberto Gutiérrez-Herrera
wgutierrez@ecfm.usac.edu.gt

Departamento de Matemáticas
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de San Carlos de Guatemala

11 de septiembre de 2018



Tabla de Contenidos

1. Introducción
2. Geometría del espacio
   - Grecia Antigua
   - Curvas y superficies
     - Curvas en el espacio
     - Superficies en el espacio
   - Curva geodésica
3. Referencias



Introducción

En esta charla abordaremos algunos conceptos matemáticos de los sólidos platónicos y de cómo a partir de ellos se construye lo que es un domo geodésico.



Introducción

En esta charla abordaremos algunos conceptos matemáticos de los sólidos platónicos y de cómo a partir de ellos se construye lo que es un domo geodésico.

Para este fin, partiremos de la geometría elemental mejor conocida como euclidiana, la que intuitivamente es plana, para luego tratar con la geometría en superficies, y trataremos un concepto esencial que es el de curva geodésica.



Introducción

En esta charla abordaremos algunos conceptos matemáticos de los sólidos platónicos y de cómo a partir de ellos se construye lo que es un domo geodésico.

Para este fin, partiremos de la geometría elemental mejor conocida como euclidiana, la que intuitivamente es plana, para luego tratar con la geometría en superficies, y trataremos un concepto esencial que es el de curva geodésica.

Luego dividiremos cada cara de un sólido platónico en cierta cantidad de triángulos, de tal forma que cada nuevo vértice esté sobre una geodésica. Culminaremos con la proyección de todos estos elementos sobre la esfera que los circunscribe.



Grecia Antigua

Primeras definiciones en geometría

Euclides de Megara (c. 435 - c. 365 aC) en sus *Elementos* tenemos en el **Libro I**

- Definición 1 Un punto es lo que no tiene partes.
- Definición 2 Un línea es una longitud sin anchura.
- Definición 3 Los extremos de una línea son puntos.
- Definición 5 Una superficie es aquello que sólo tiene longitud y anchura.
- Definición 6 Los extremos de una superficie son líneas.



Grecia Antigua

Primeras definiciones en geometría

Euclides de Megara (c. 435 - c. 365 aC) en sus *Elementos* tenemos en el **Libro I**

- Definición 1 Un punto es lo que no tiene partes.
- Definición 2 Un línea es una longitud sin anchura.
- Definición 3 Los extremos de una línea son puntos.
- Definición 5 Una superficie es aquello que sólo tiene longitud y anchura.
- Definición 6 Los extremos de una superficie son líneas.

En el **Libro XI**

- Definición 1 Un sólido es aquello que tiene longitud, anchura y profundidad.
- Definición 2 Y el extremo de un sólido es una superficie.



Concepto fundamental

Definición

Dados dos puntos A y B en un plano. La trayectoria de menor longitud que une esos dos puntos es un *segmento de recta*.

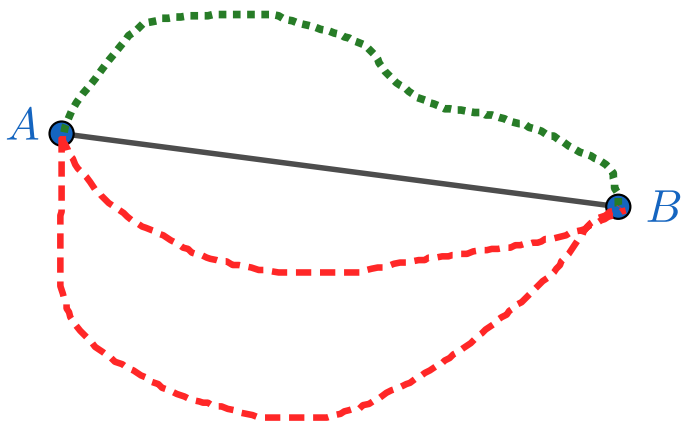


Figura: Distancia euclidiana.

Distancia euclidiana

Al introducir un sistema de coordenadas con ejes perpendiculares, el sistema cartesiano, y al utilizar el *Teorema de Pitágoras* llegamos a la relación: si $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_A)^2 + (x_B - x_B)^2}$$

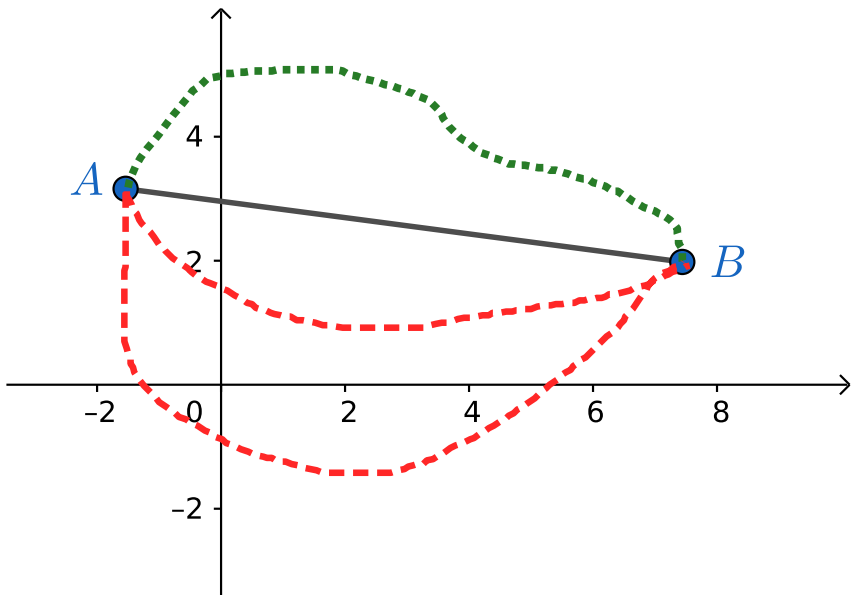
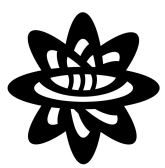


Figura: Distancia euclidiana – Sistema de coordenadas.



Sólidos platónicos

Un polígono regular es una porción del plano limitado por una línea quebrada cerrada, cuyas componentes tienen la misma longitud y los ángulos que forman cada pareja de segmentos consecutivos, son iguales. Ejemplos: triángulo equilátero, cuadrado, pentágono, hexágono, heptágono, octágono, y así sucesivamente.



Sólidos platónicos

Un polígono regular es una porción del plano limitado por una línea quebrada cerrada, cuyas componentes tienen la misma longitud y los ángulos que forman cada pareja de segmentos consecutivos, son iguales. Ejemplos: triángulo equilátero, cuadrado, pentágono, hexágono, heptágono, octágono, y así sucesivamente.

Los sólidos platónicos son sólidos que tienen la propiedad que su extremo está constituido por polígonos regulares llamadas *caras*, y que en cada *vértice* hay exactamente la misma cantidad de caras. Una *arista* es el lugar en donde se unen dos caras.



Sólidos platónicos

Un polígono regular es una porción del plano limitado por una línea quebrada cerrada, cuyas componentes tienen la misma longitud y los ángulos que forman cada pareja de segmentos consecutivos, son iguales. Ejemplos: triángulo equilátero, cuadrado, pentágono, hexágono, heptágono, octágono, y así sucesivamente.

Los sólidos platónicos son sólidos que tienen la propiedad que su extremo está constituido por polígonos regulares llamadas *caras*, y que en cada *vértice* hay exactamente la misma cantidad de caras. Una *arista* es el lugar en donde se unen dos caras.

La primera alusión a ellos es debida a Platón en sus «Diálogos» (Timeo o de la naturaleza) y les da un sentido místico.



Sólidos platónicos

Cuadro: Sólidos platónicos – principales elementos.

Sólido	Generador	Caras	Aristas	Vértices	Cara-Vértice
Tetraedro	Triángulo	4	6	4	3
Hexaedro	Cuadrado	6	12	8	3
Octaedro	Triángulo	8	12	6	4
Dodecaedro	Pentágono	12	30	20	3
Icosaedro	Triángulo	20	30	12	5

Las caras que coinciden en un vértice, se dice que forman un ángulo poliedro, y se calcula sumando el ángulo interno que hay en el vértice de cada cara que incide. La suma no debe ser igual a 360°.



Sólidos platónicos

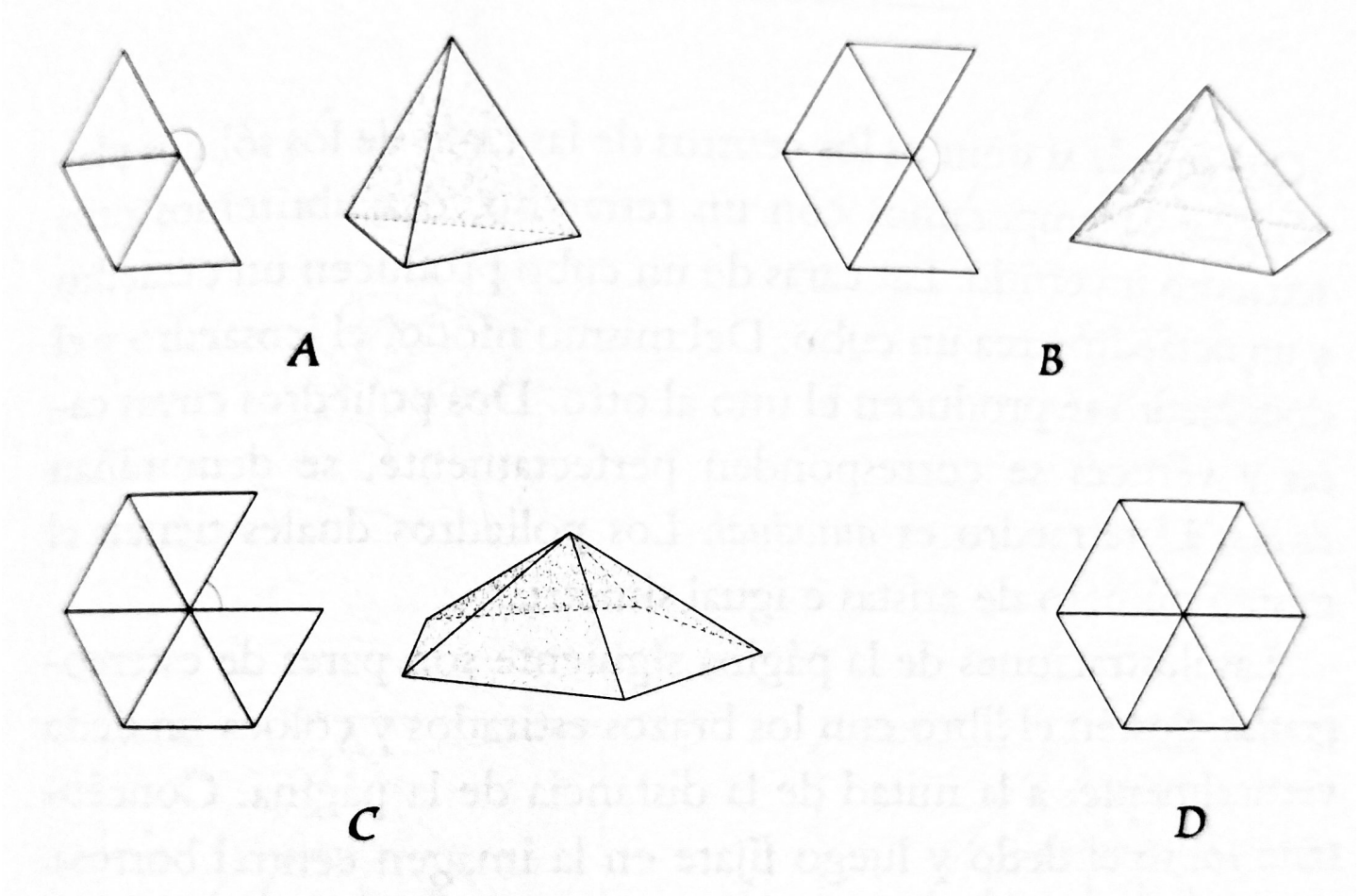


Figura: Desarrollos a partir de triángulos equiláteros.

Sólidos platónicos

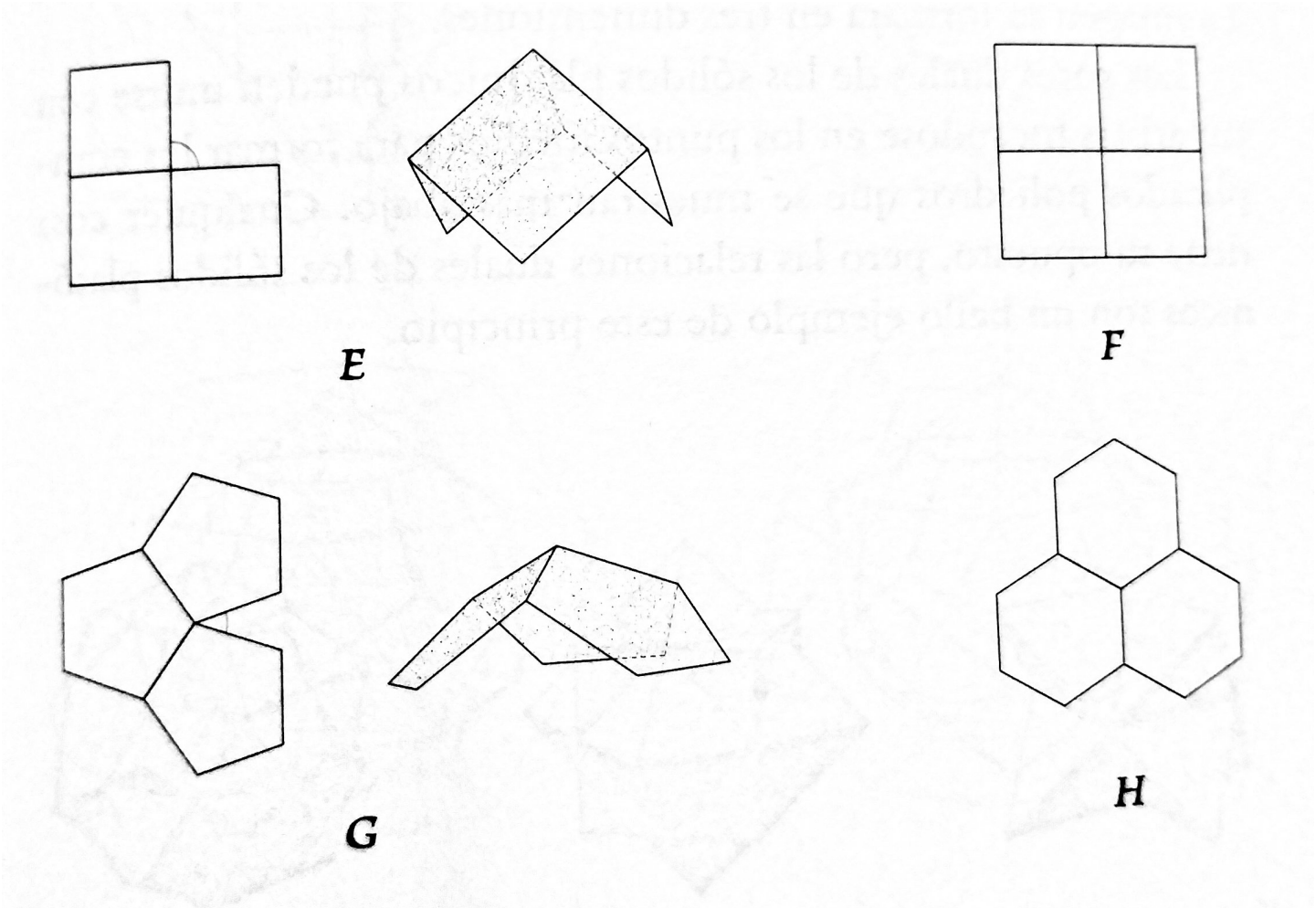


Figura: Desarrollos a partir de cuadrados, pentágonos y hexágonos.

Curvas en el espacio

Definición – ejemplo

Definición

Sean I un intervalo de números reales, y $x_1, \ldots, x_n$ funciones con dominio I y rango en $\mathbb{R}$. Decimos que $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

es una curva parametrizada en el espacio o simplemente curva.



Curvas en el espacio

Definición – ejemplo

Definición

Sean I un intervalo de números reales, y $x_1, \ldots, x_n$ funciones con dominio I y rango en $\mathbb{R}$. Decimos que $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

es una curva parametrizada en el espacio o simplemente curva.

Ejemplo

Sean $I = [0, 2\pi)$, y $x_1(t) = \cos t$, $x_2(t) = \operatorname{sen} t$, $x_3(t) = t/\pi$. Tenemos la curva en el espacio de 3 dimensiones

$$\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t/\pi)$$

cuya representación gráfica es:



Curvas en el espacio

Ejemplo

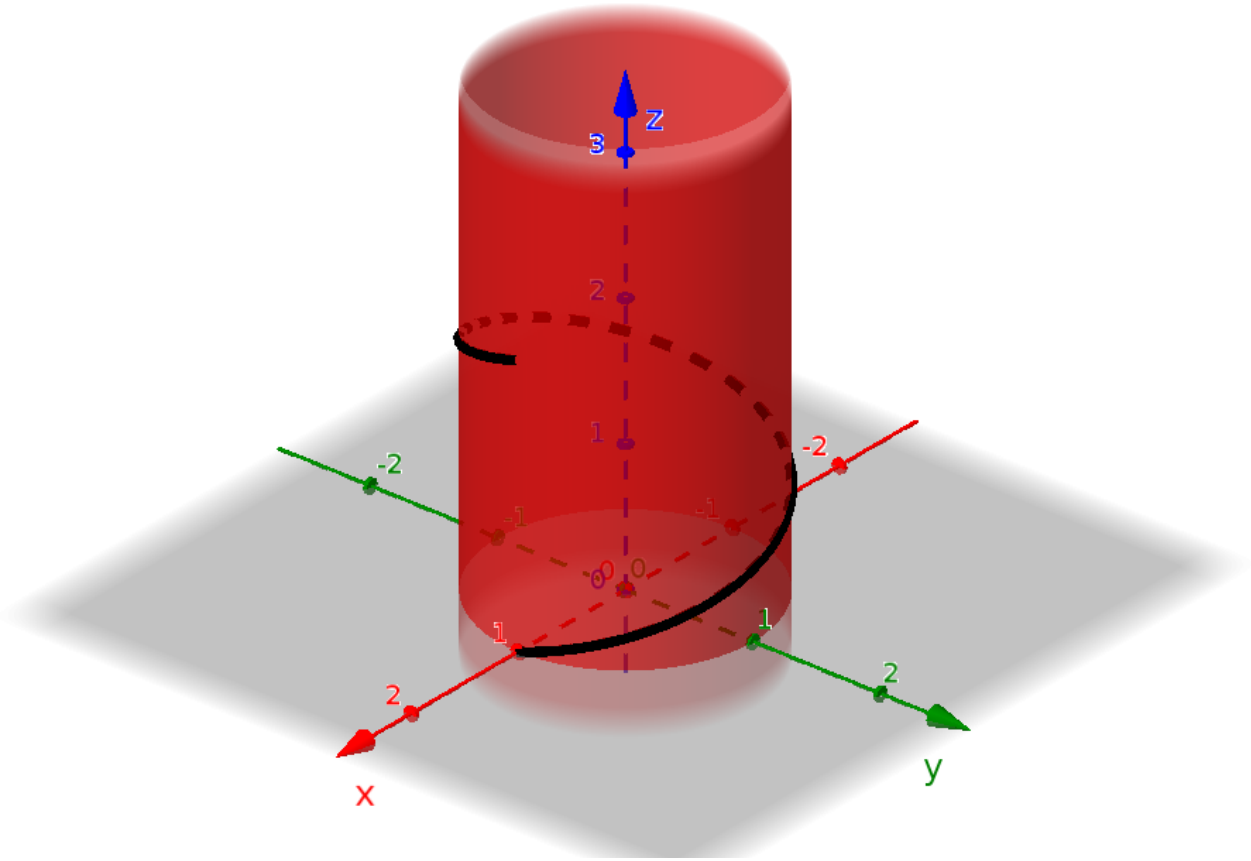


Figura: Curva sobre un cilindro de radio 1.

Curvas en el espacio

Longitud

Definición

Sea $\alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ una curva, la derivada de α está dada por

$$\dot{\alpha}(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$$

donde $x_i'(t) = \dfrac{dx_i(t)}{dt}$, para $i = 1, \ldots, n$.



Curvas en el espacio

Longitud

Definición

Sea $\alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ una curva, la derivada de α está dada por

$$\dot{\alpha}(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$$

donde $x_i'(t) = \dfrac{dx_i(t)}{dt}$, para $i = 1, \ldots, n$.

Definición

La longitud $\ell(\alpha)$ de una curva $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^n$ está dada por

$$\ell(\alpha) = \int_a^b \sqrt{[x_1'(t)]^2 + \cdots + [x_n'(t)]^2}\, dt.$$



Curvas en el espacio

Longitud – ejemplo

Ejemplo

En nuestro ejemplo 1, tenemos $x_1(t) = \cos t$, $x_2(t) = \operatorname{sen} t$, $x_3(t) = t/\pi$, por consiguiente $x_1'(t) = -\operatorname{sen} t$, $x_2'(t) = \cos t$, $x_3'(t) = 1/\pi$, y así
$[x_1'(t)]^2 + [x_2'(t)]^2 + [x_3'(t)]^2 = 1 + 1/\pi^2 = (1+\pi^2)/\pi^2$,

$$\ell(\alpha) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1+\pi^2}{\pi^2}}\, dt = \frac{\sqrt{1+\pi^2}}{\pi}(2\pi) = 2\sqrt{1+\pi^2}.$$



Superficies en el espacio

Definición – ejemplo

Definición

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función. Sea $c \in \mathbb{R}$, una superficie en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto S dado por

$$S = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid f(x_1, \ldots, x_n) = c\}$$

tal que su gradiente $\nabla f(x_1, \ldots, x_n) \neq \mathbf{0}$ para cada $(x_1, \ldots, x_n) \in S$.



Superficies en el espacio

Definición – ejemplo

Definición

Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función. Sea $c \in \mathbb{R}$, una superficie en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto S dado por

$$S = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid f(x_1, \ldots, x_n) = c\}$$

tal que su gradiente $\nabla f(x_1, \ldots, x_n) \neq \mathbf{0}$ para cada $(x_1, \ldots, x_n) \in S$.

Ejemplo

Considere $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ y $c = 3$, entonces la superficie S es la esfera $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3$ de radio $\sqrt{3}$. Notar que

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 2x_2, 2x_3)$$

que no es cero, porque el origen no es parte de la esfera.



Superficies en el espacio

Representación gráfica

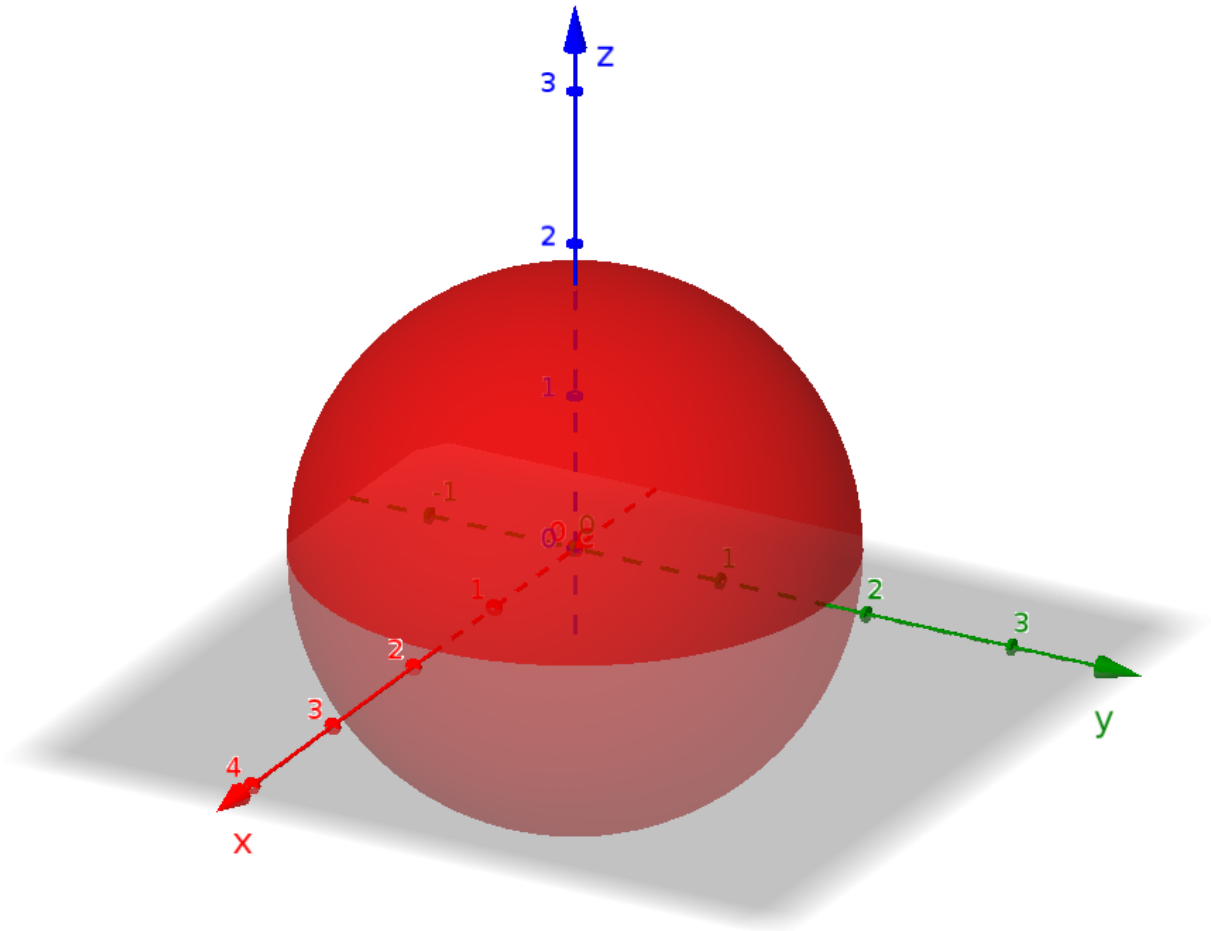


Figura: Esfera con centro en el origen y radio $\sqrt{3}$.

Curvas sobre una superficie

Definición

Sea $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$ una curva y $S \subset \mathbb{R}^n$ una superficie, si $\alpha(t) \in S$ para cada $t \in I$, decimos que α es una curva sobre la superficie S y escribimos $\alpha\colon I \to S$.



Curvas sobre una superficie

Definición

Sea $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$ una curva y $S \subset \mathbb{R}^n$ una superficie, si $\alpha(t) \in S$ para cada $t \in I$, decimos que α es una curva sobre la superficie S y escribimos $\alpha\colon I \to S$.

Ejemplo

De la figura 5 tenemos que la curva α, una espiral, está sobre el cilindro S dado por $x^2 + y^2 = 1$, tomando $x = x_1(t)$, $y = x_2(t)$.

Debemos verificar que las componentes de la curva, satisfacen la ecuación de la superficie.



Curva Geodésica

Problema

Sea S una superficie y A, B dos puntos en ella. Determine una curva $\alpha : I \to S$ que tenga la menor longitud.



Curva Geodésica

Problema

Sea S una superficie y A, B dos puntos en ella. Determine una curva $\alpha : I \to S$ que tenga la menor longitud.

Definición

Sean A y B dos puntos sobre una superficie S, a la curva sobre S de menor longitud que une estos puntos le llamaremos geodésica.



Curva Geodésica

Problema

Sea S una superficie y A, B dos puntos en ella. Determine una curva $\alpha : I \to S$ que tenga la menor longitud.

Definición

Sean A y B dos puntos sobre una superficie S, a la curva sobre S de menor longitud que une estos puntos le llamaremos geodésica.

En el plano, una geodésica entre cualesquiera par de sus puntos es un segmento de recta, cuyos extremos son precisamente esos puntos.



Geodésica sobre una esfera

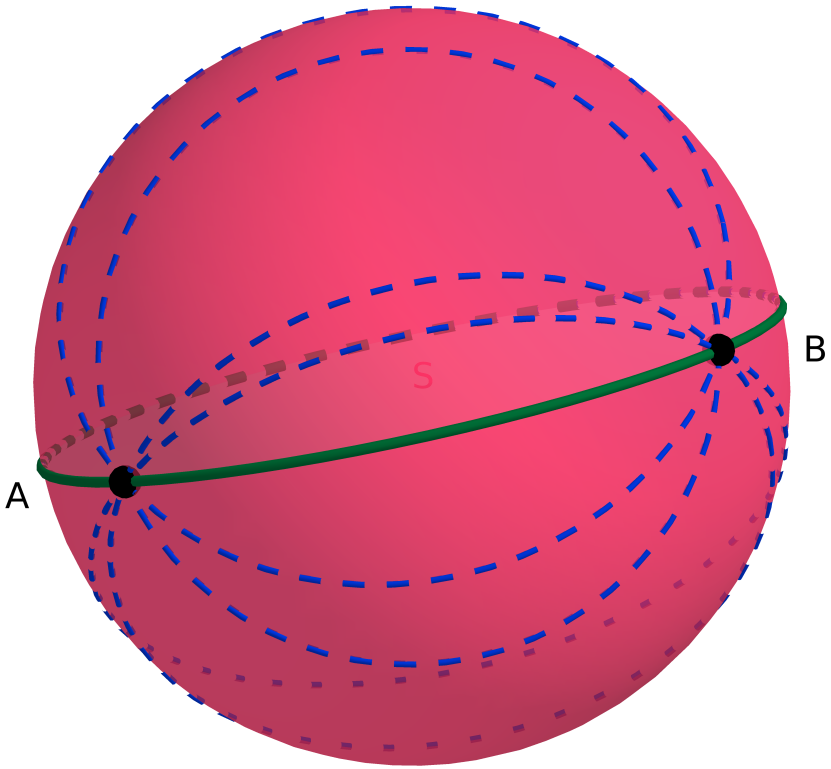


Figura: Geodésica entre dos puntos distintos en una esfera.

Geodésica sobre una esfera

- Al interceptar una esfera con un plano obtenemos una circunferencia.
- La circunferencia de menor radio que se puede obtener de este proceso es un punto.
- A la circunferencia de mayor radio que se puede obtener le llamaremos círculo máximo.
- Los círculos máximos se obtienen al interceptar la esfera con un plano que pasa por el centro de la esfera.

Teorema

Sean A y B dos puntos sobre una esfera S. La geodésica α que los une, es el arco de menor longitud del círculo máximo que pasa por A y B.



Proyección radial

Proyección de una arista-cara sobre la esfera

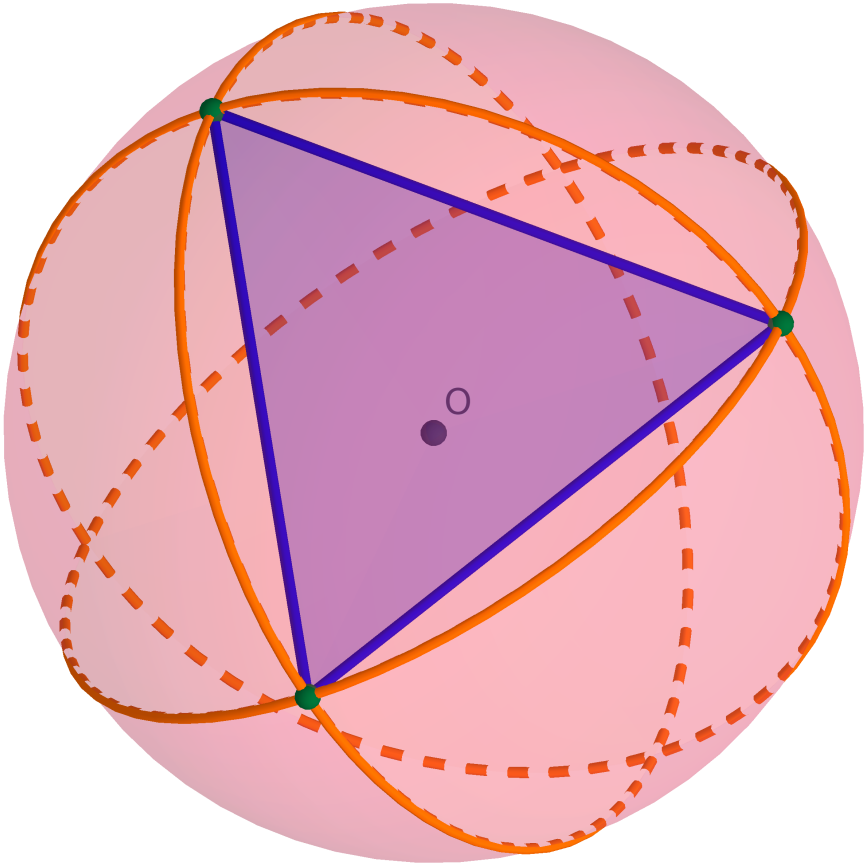


Figura: Proyección radial de una cara del octaedro.

Proyección radial

Proyección de las divisiones de una arista

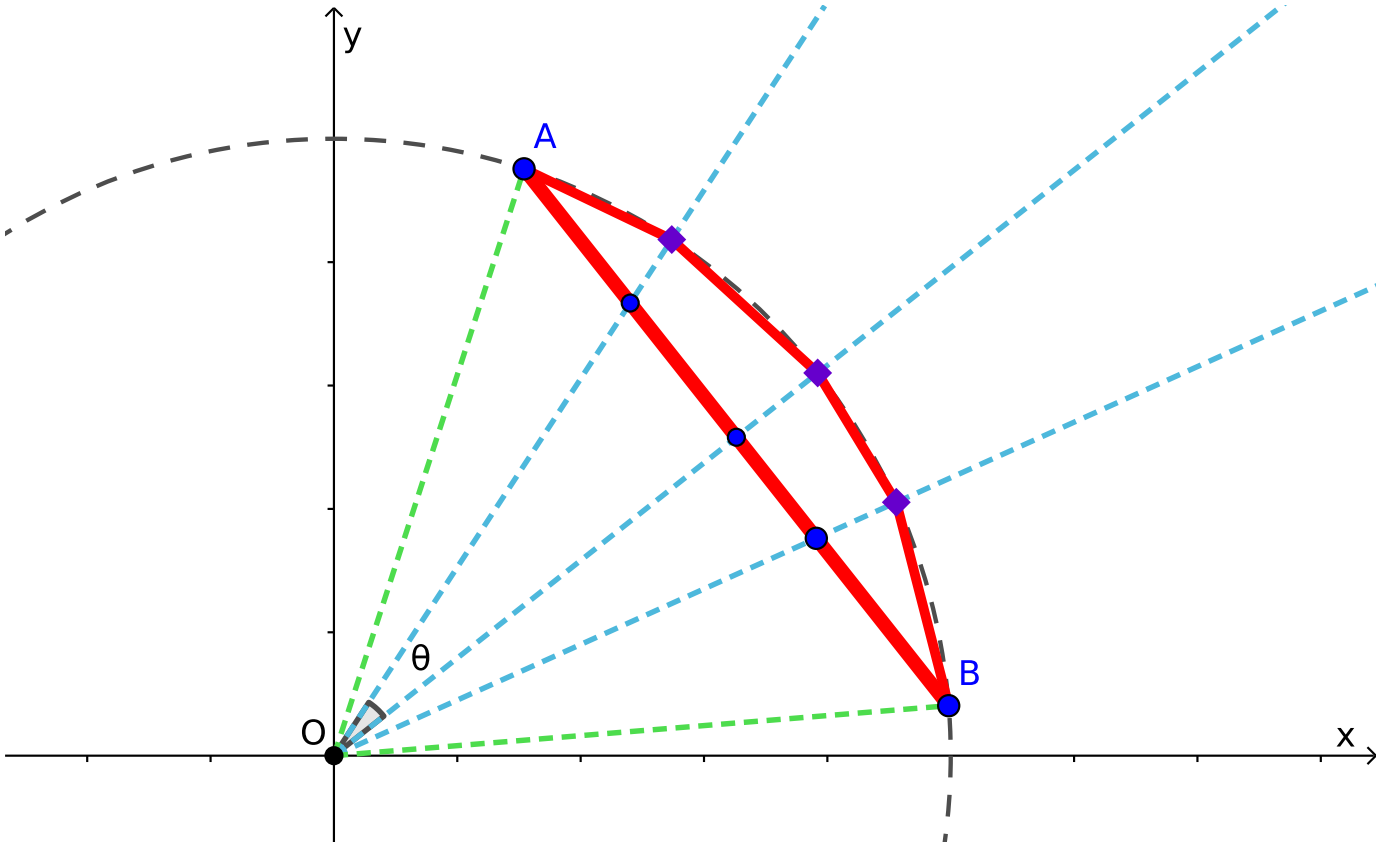


Figura: Proyección radial de las divisiones de una arista.

División de una cara de un sólido platónico

Todo sólido platónico puede ser colocado dentro de una esfera de tal forma que sus vértices sean puntos sobre ella.

Cada cara la dividiremos en triángulos de tal forma que obtengamos pirámides con bases regulares (pentagonales o hexagonales) y los nuevos vértices estén sobre la esfera y un subconjunto de ellos estén sobre la misma geodésica.



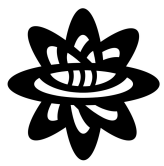
División de una cara de un sólido platónico

Todo sólido platónico puede ser colocado dentro de una esfera de tal forma que sus vértices sean puntos sobre ella.

Cada cara la dividiremos en triángulos de tal forma que obtengamos pirámides con bases regulares (pentagonales o hexagonales) y los nuevos vértices estén sobre la esfera y un subconjunto de ellos estén sobre la misma geodésica.

Definición

Cada arista la dividiremos en cierta cantidad f de piezas de forma simétrica, cada división es igual en dada arista, a f le llamaremos frecuencia de la división, la denotamos con fV.



División de una cara de un sólido platónico

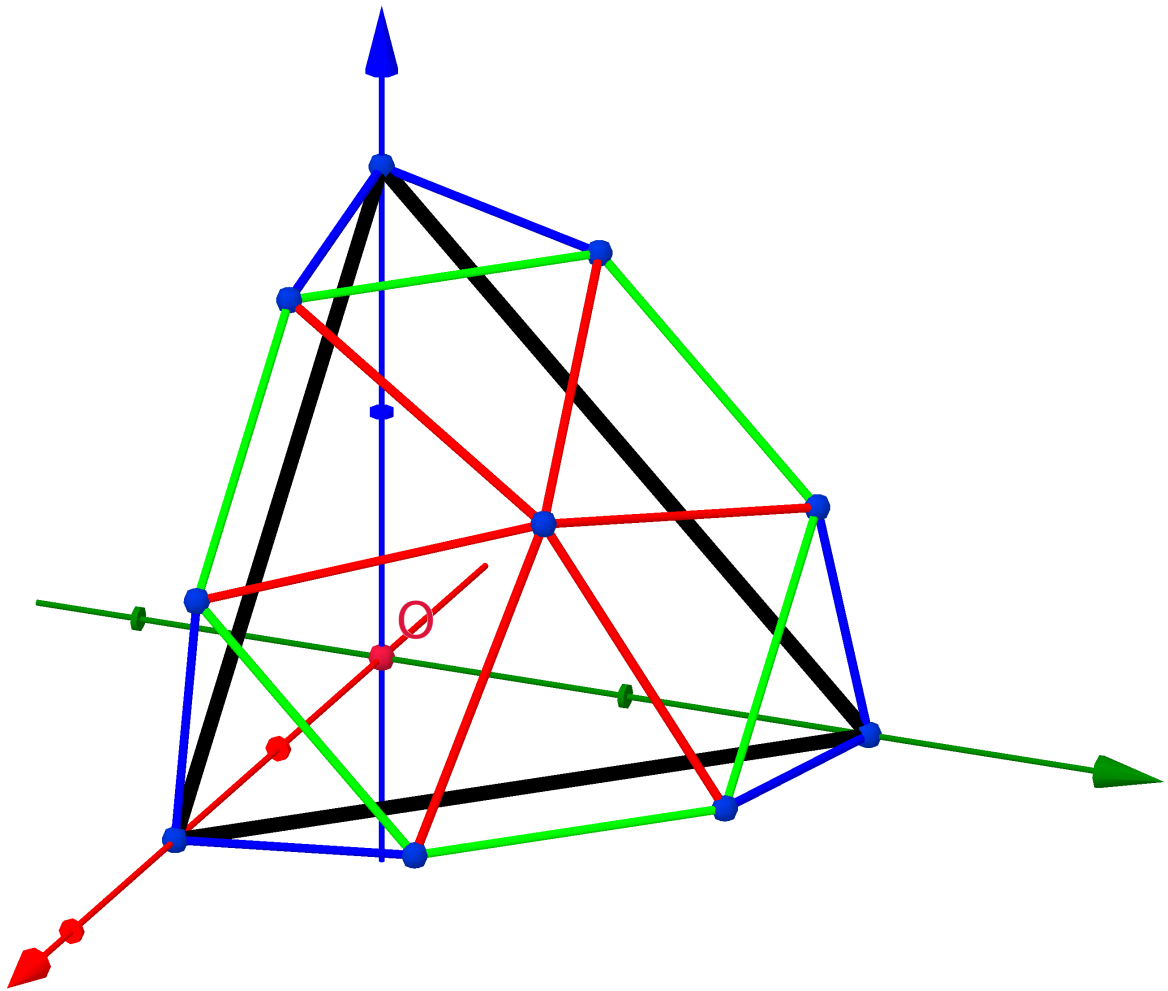


Figura: Cara de un octaedro $3V$.

División de una cara de un sólido platónico

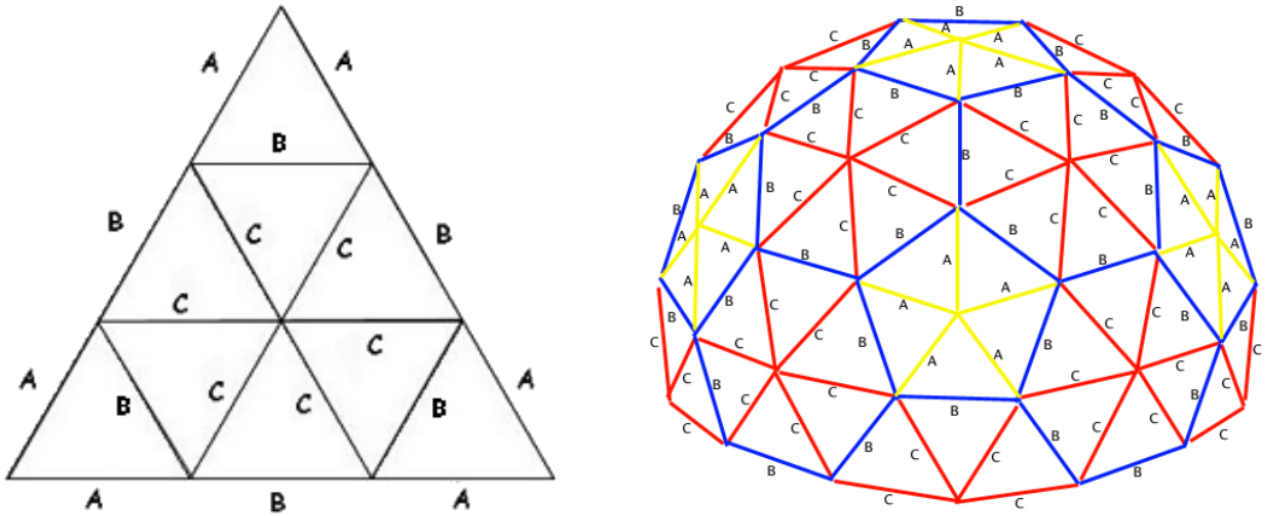


Figura: Cara de un icosaedro $3V$.



División de una cara de un sólido platónico

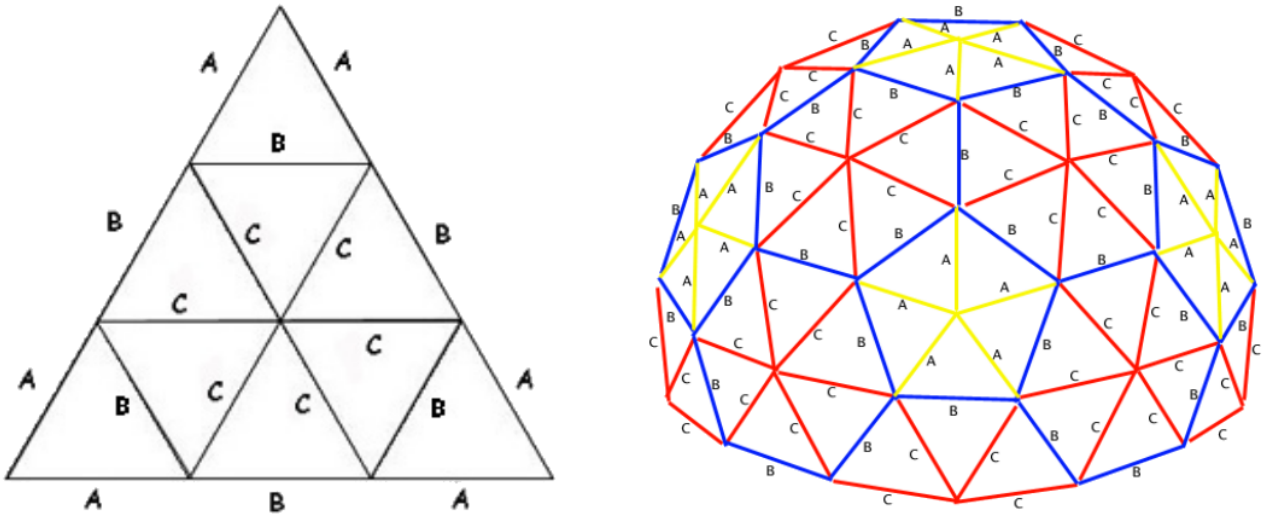


Figura: Cara de un icosaedro $3V$.

Notemos que hemos obtenido tres conjuntos de piezas, cada uno con una longitud A, B, C bien definida.



División de una cara de un sólido platónico

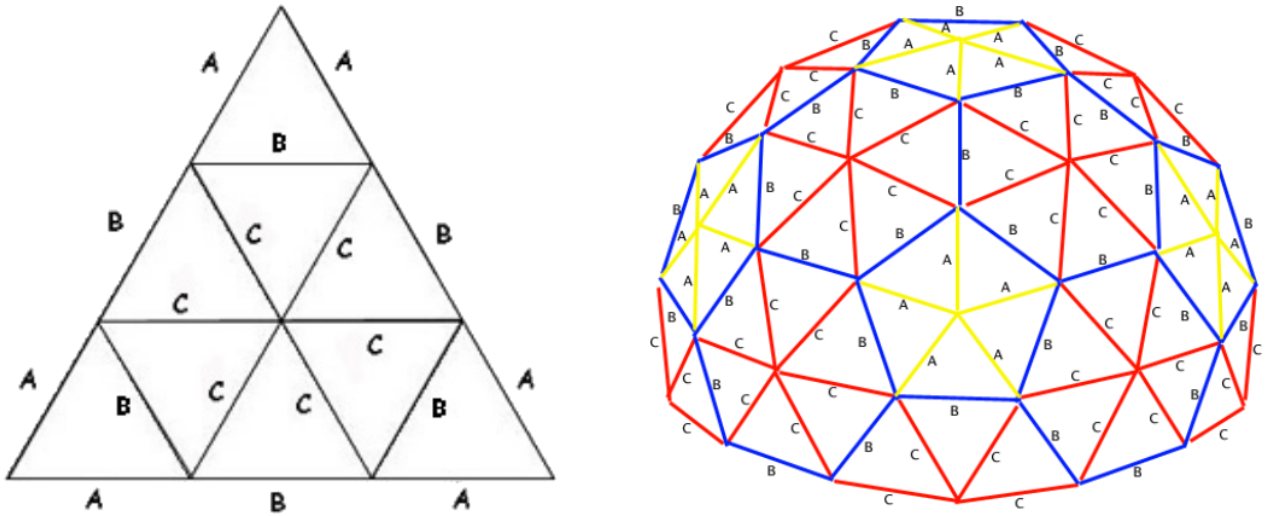


Figura: Cara de un icosaedro $3V$.

Notemos que hemos obtenido tres conjuntos de piezas, cada uno con una longitud A, B, C bien definida. Las calculadoras en línea dan estas longitudes según los requerimientos que ingresamos.

División de una cara de un sólido platónico

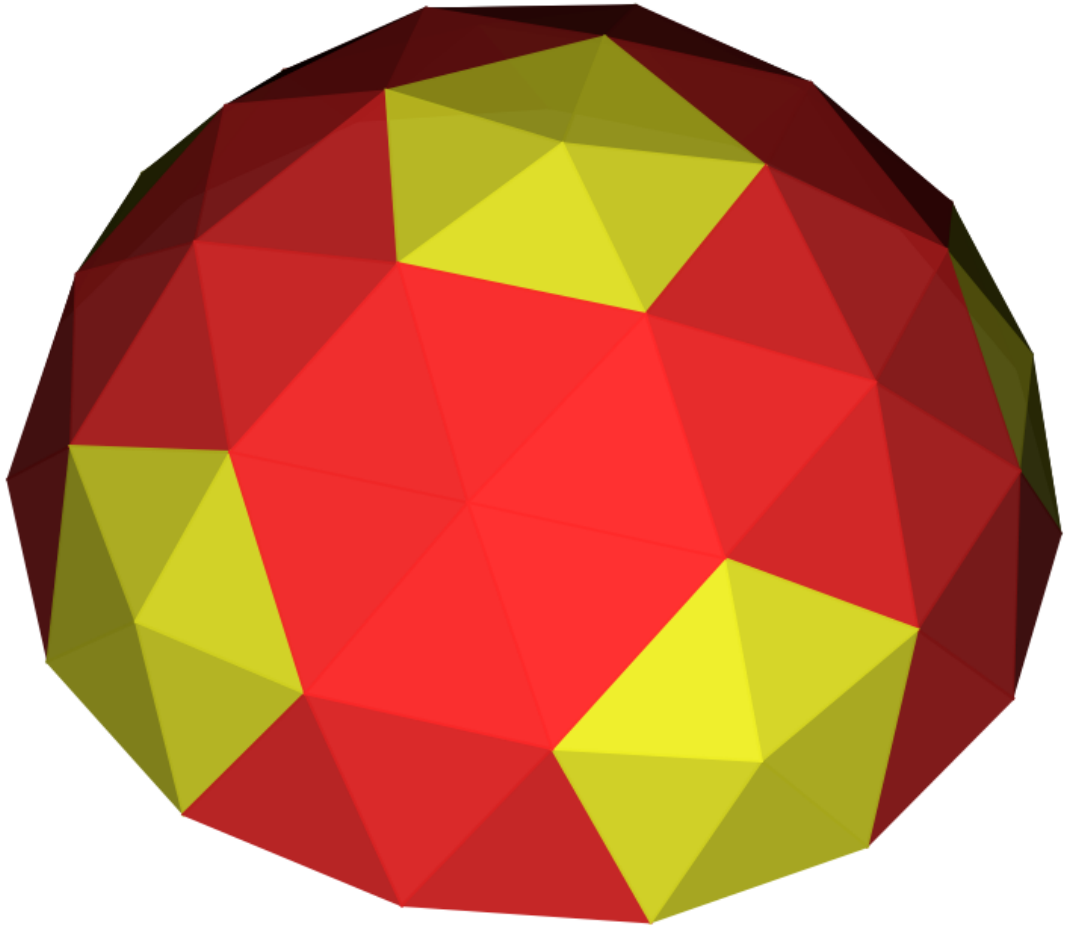


Figura: Domo $3V$.



Referencias

Líbros, artículos, sitios web

- Euclides (300 aC). Los Elementos. `http://www.euclides.org/`.
- Kreyszig, Erwin (1959). *Differential Geometry.* EUA: Dover.
- Platón (2009). *Diálogos.* Colección «Sepan cuantos...» No. 13B. México: Editorial Porrúa.
- Sutton, Daud (2005). *Sólidos Platónicos y Arquimedianos.* Barcelona: Ediciones Oniro.
- Ricotti, Stella (2011). *Geometría y origami.* Argentina: Homo Sapiens Ediciones.
- Thorpe, John A. (1979). *Elementary Topics in Differential Geometry.* EUA: Springer-Verlag.
- Geodesic dome calculator `http://acidome.ru`
- Desert Domes `http://www.desertdomes.com/index.html`

