Problemas sobre funciones polinómicas y ecuaciones exponenciales

CURSO	TEMA	WWW.DANIPARTAL.NET
2ºBach CCSS	Funciones, límites y derivadas	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

PROBLEMA 1

Calcula los puntos de corte e la función $g(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ con los ejes de coordenadas. Ayuda: el eje OX se representa por la recta horizontal y=0. El eje OX se representa por la recta vertical x=0.

Para calcular los puntos de corte con el eje de abscisas $y = 0$, igualamos a cero la función y aplicamos Ruffini.

	1	2	-1	-2
-2		-2	0	2
	1	0	-1	0
-1		-1	1	
	1	-1	0	
1		1		
	1	0		

Es decir los puntos de corte con el eje OX son: $(-2,0), (-1,0), (1,0)$.

Para poder calcular el punto de corte con el eje de ordenadas realizamos $x = 0$.

$x = 0 \rightarrow y = -2 \rightarrow$ punto $(0, -2)$

PROBLEMA 2

Halla el valor de a y b de forma que el polinomio $P(x) = x^3 - ax^2 + 7x + b$ tenga resto 9 al dividir entre $(x-2)$ y sea divisible por $(x-5)$.

Por el Teorema del Resto, el valor de un polinomio $P(x)$ evaluado en un valor $x = a$ coincide con el valor del resto de la división de ese polinomio entre $(x-a)$. Aplicado esto a nuestro ejercicio:

$$P(2) = 9$$

$$2^3 - a2^2 + 7 \cdot 2 + b = 9$$

$$8 - 4a + 14 + b = 9$$

$$-4a + b = -13$$

Por otro lado, si el polinomio es divisible por $(x-5)$ su resto debe ser igual a 0.

$$P(5) = 0$$

$$5^3 - a \cdot 5^2 + 7 \cdot 5 + b = 0$$

$$125 - 25a + 35 + b = 0$$

$$-25a + b = -160$$

Llegamos a un sistema lineal 2x2:

$$\begin{cases} -4a + b = -13 \\ -25a + b = -160 \end{cases}$$

Restamos ambas ecuaciones, aplicando reducción:

$$21a = 147$$

$$a = 7$$

Quedando el segundo parámetro:

$$-4a + b = -13 \rightarrow si\ a = 7 \rightarrow -28 + b = -13 \rightarrow b = 15$$

PROBLEMA 3

Obtener los puntos de corte de las parábolas $f(x) = 2x^2 - 4$ y $g(x) = -x^2 + 8$.

Para obtener los puntos de corte de dos funciones siempre tenemos que igualar sus respectivas fórmulas.

$f(x) = g(x) \rightarrow 2x^2 - 4 = -x^2 + 8 \rightarrow 3x^2 = 12 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

Una vez obtenido el valor de la variable horizontal de los puntos de corte, obtenemos su correspondiente imagen. Podemos sustituir en cualquiera de las dos funciones, ya que ambas coinciden en los puntos de corte.

Si $x = 2 \rightarrow g(2) = -2^2 + 8 = 4 \rightarrow$ punto $(2,4)$

Si $x = -2 \rightarrow g(-2) = -(-2)^2 + 8 = 4 \rightarrow$ punto $(-2,4)$

PROBLEMA 4

Escribe la ecuación de una parábola sabiendo que pasa por los puntos $(0,4), (3,-2)$ y $(5,4)$. Representarla.

La ecuación general de una parábola es $\rightarrow y = ax^2 + bx + c$

Si los puntos que nos dan pertenecen a la parábola podemos sustituirlos en la ecuación. Entonces tendremos:

$(0,4) \rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 4 \rightarrow c = 4$

$(3,-2) \rightarrow a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = -2 \rightarrow 9a + 3b + (4) = -2 \rightarrow 9a + 3b = -6$

$(5,4) \rightarrow a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 4 \rightarrow 25a + 5b + (4) = 4 \rightarrow 25a + 5b = 0$

Nos quedan 2 ecuaciones con 2 incógnitas.

$$\begin{cases} 9a + 3b = -6 \\ 25a + 5b = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación despejamos el valor de la incógnita b.

$$9a + 3b = -6 \rightarrow dividimos\ por\ 3 \rightarrow 3a + b = -2 \rightarrow b = -2 - 3a$$

Llevamos este valor a la segunda ecuación del sistema.

$$25a + 5b = 0$$

$$25a + 5(-2 - 3a) = 0$$

$$25a - 10 - 15a = 0$$

$$10a - 10 = 0$$

$$a = 1 \rightarrow b = -2 - 3(1) \rightarrow b = -5$$

La parábola queda:

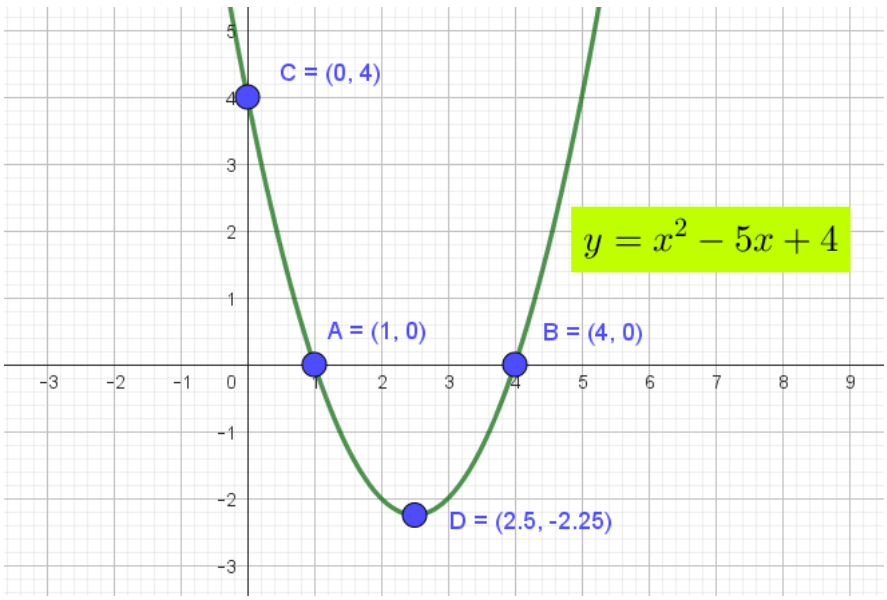
$$y = x^2 - 5x + 4$$

Los puntos de corte con el eje horizontal se obtienen resolviendo $x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = 4 \rightarrow$ Quedando los puntos $(1,0)$ y $(4,0)$.

El corte con el eje vertical implica $x = 0 \rightarrow y = 0^2 - 5(0) + 4 \rightarrow y = 4 \rightarrow$ Punto $(0,4)$.

La abscisa del vértice: $x_{vértice} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-5}{2(1)} = \frac{5}{2}$

Imagen del vértice $\rightarrow y = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}\right) + 4 \rightarrow y = -\frac{9}{4} \rightarrow Punto\ \left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$



PROBLEMA 5

Resuelve $7^{2x+3} - 8 \cdot 7^{x+1} + 1 = 0$.

$$7^{2x+3} - 8 \cdot 7^{x+1} + 1 = 0 \rightarrow 7^{2x} \cdot 7^3 - 8 \cdot 7^x \cdot 7^1 + 1 = 0 \rightarrow 343 \cdot 7^{2x} - 56 \cdot 7^x + 1 = 0$$

$$343 \cdot (7^x)^2 - 56 \cdot 7^x + 1 = 0$$

Por comodidad a la hora de escribir la ecuación planteamos el cambio de variable $7^x = t$. Así llegaremos a una ecuación polinómica de segundo grado.

$$343 \cdot t^2 - 56 \cdot t + 1 = 0 \rightarrow t = \frac{56 \pm \sqrt{56^2 - 4 \cdot 343}}{2 \cdot 343} = \frac{56 \pm 42}{2 \cdot 343} \rightarrow t = \frac{1}{7}, t = \frac{1}{49}$$

Deshacemos el cambio de variable.

$7^x = t \rightarrow 7^x = \frac{1}{7} \rightarrow 7^x = 7^{-1} \rightarrow x = -1$

$7^x = t \rightarrow 7^x = \frac{1}{49} \rightarrow 7^x = 7^{-2} \rightarrow x = -2$

PROBLEMA 6

Resuelve $4^{x^2-6x} = 16384$.

Escribimos el término de la derecha como exponencial de base 4.

$$4^{x^2-6x} = 4^7$$

Igualamos exponentes

$$x^2 - 6x = 7 \rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0$$

Siendo las soluciones de la ecuación de segundo grado: $x = -1$, $x = 7$

PROBLEMA 7

Se sabe que la función cuadrática de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos (1,1), (0, 0) y (−1,1). Calcula a, b y c.

Imponemos las condiciones de los tres puntos. Tendremos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas.

$(1,1) \rightarrow 1 = a + b + c$

$(0,0) \rightarrow 0 = 0 + 0 + c \rightarrow 0 = c$

$(-1,1) \rightarrow 1 = a - b + c$

Llevamos el valor $c = 0$ a la primera y a la tercera ecuación:

$$1 = a + b + 0 \rightarrow 1 = a + b$$

$$1 = a - b + c \rightarrow 1 = a - b$$

Sumamos las dos ecuaciones finales y obtenemos:

$$2 = 2a \rightarrow a = 1 \rightarrow b = 0$$

La función solución resulta:

$$y = x^2$$