Problemas – Tema 3

CCSS Problemas resueltos - 2 - problemas enunciado para plantear sistema de ecuaciones

1. Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería por la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

a) ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora? Razona las respuestas.

b) Si el precio del libro, la calculadora y el estuche hubieran sufrido un 50 %, un 20% y un 25% de descuento respectivamente, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio de cada artículo.

a) Planteamos las siguientes incógnitas:

Precio del libro: x

Precio de la calculadora: y

Precio del estuche: z

La suma total es igual a 57 euros → $x + y + z = 57$

El libro cuesta el doble de la calculadora y el estuche juntos → $x = 2(y + z)$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas por lo que, si existe solución, dependerá de al menos un parámetro libre.

El valor del libro (x) sí podemos calcularlo de manera única:

Primera ecuación → $x + y + z = 57$ → $y + z = 57 - x$

Segunda ecuación → $x = 2(y + z)$ → $2y + 2z = x$

Al doble de la primera ecuación le restamos la segunda ecuación → $x = 38$€

Sustituyendo este valor en las dos ecuaciones de partida:

$y + z = 19$

$2y + 2z = 38$

Ambas ecuaciones son proporcionales (la segunda es el doble de la primera), por lo que ambas ofrecen la misma información. Por lo tanto, podemos prescindir de una de ellas. Así tendremos una única ecuación con dos incógnitas.

$y = 19 - z$ → El valor de y (calculadora) depende del valor libre de z (estuche)

El sistema tiene, en consecuencia, infinitas soluciones (un parámetro libre).

b) Con los descuentos podemos generar una nueva ecuación:

$0{,}5x + 0{,}8y + 0{,}75z = 34, x = 38 \rightarrow 0{,}8y + 0{,}75z = 15$

Que junto a nuestra ecuación anterior $y = 19 - z$, forma un sistema 2×2 con solución única.

$$\left\{ \begin{matrix} 0{,}8y + 0{,}75z = 15 \\ y = 19 - z \end{matrix} \right\} \rightarrow y = 15€, z = 4€$$

2. Un mayorista vende billetes de avión a agencias de viajes. A una primera agencia A le vende 10 billetes nacionales, 10 billetes de países comunitarios y otros 10 billetes a países no europeos y le cobra 12000 euros. También le vende a una agencia B 10 billetes nacionales y 20 a países no europeos y le cobra 13000. Y a una agencia C le vende 10 billetes nacionales y 10 billetes comunitarios y le cobra 7000 euros. ¿Cuál es el precio de cada billete?

Precio de un billete nacional: x
Precio de un billete comunitario: y
Precio de un billete no comunitarios: z

Podemos plantear tres ecuaciones, con las frases del enunciado.

$$\begin{Bmatrix} 10x + 10y + 10z = 12000 \\ 10x + 20z = 13000 \\ 10x + 10y = 7000 \end{Bmatrix}$$

Simplificamos dividiendo todas las ecuaciones entre 10.

$$\begin{Bmatrix} x + y + z = 1200 \\ x + 2z = 1300 \\ x + y = 700 \end{Bmatrix}$$

De la tercera ecuación podemos despejar:$y = 700 - x \rightarrow$ sustituimos en las otras dos ecuaciones.

$$\begin{Bmatrix} x + 700 - x + z = 1200 \\ x + 2z = 1300 \end{Bmatrix}$$

De la nueva primera ecuación resulta:$z = 500$

De la segunda nueva ecuación:$x = 1300 - 2z \rightarrow x = 300$

Por lo tanto: $y = 700 - x \rightarrow y = 400$

Solución final: $x = 300€, y = 400€, z = 500€$

3. El cajero automático de una determinada entidad bancaria solo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del numero de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.

$x \rightarrow$ número de billetes de 50 euros

$y \rightarrow$ número de billetes de 20 euros

$z \rightarrow$ número de billetes de 10 euros

Tenemos un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas.

$$\begin{cases} 50x + 20y + 10z = 7000 \\ x + y + z = 225 \\ x + z = 2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 225 \\ 50x + 20y + 10z = 7000 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

De la tercera ecuación $\rightarrow z = 2y - x \rightarrow \begin{cases} 3y = 225 \\ 40x + 40y = 7000 \end{cases} \rightarrow y = \frac{225}{3} = 75$

Sustituyendo el valor de y, obtenemos las soluciones: $x = 100, y = 75, z = 50$.

4. Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

Analizamos los datos que nos da el problema:

- ✓ x = edad de la madre
- ✓ y = edad del hermano mayor
- ✓ z = edad del hermano menor

A continuación, buscaremos ecuaciones que nos ayuden a resolver las incógnitas:

- ✓ Sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento → $x - 14 = 5 \cdot [(y - 14) + (z - 14)]$
- ✓ Sabiendo que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento → $x + 10 = (y + 10) + (z + 10)$
- ✓ Y por último, con el dato de que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años, sacamos la ecuación → $z + (x - y) = 42$

Simplificando y ordenando las tres ecuaciones deducimos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - 5y - 5z = -126 \\ x - y - z = 10 \\ x - y + z = 42 \end{cases}$$

Tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que resolvemos por el método de Gauss.

$$\begin{cases} x - 5y - 5z = -126 \\ x - y - z = 10 \\ x - y + z = 42 \end{cases}$$ → Intercambiamos el orden de las dos primeras filas

$$\begin{cases} x - y - z = 10 \\ x - 5y - 5z = -126 \\ x - y + z = 42 \end{cases} \rightarrow F'_2 = F_2 - F_1, F'_3 = F_3 - F_1$$

$$\begin{cases} x - y - z = 10 \\ x - 4y - 4z = -136 \\ 2z = 32 \end{cases} \rightarrow 2z = -32 \rightarrow z = 16 \rightarrow y = 18, x = 44$$

Solución: Madre 44 años, hijo mayor 18 años e hijo menor 16 años.

5. La edad de un padre es doble de la suma de las edades de sus dos hijos, mientras que hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos), la edad del padre era triple que la suma de las edades, en aquel tiempo, de sus hijos. Cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos, la suma de edades de las tres personas será 150 años. ¿Qué edad tenía el padre en el momento de nacer sus hijos?

Edad del padre actual:x
Edad actual del hijo mayor:y
Edad actual del hijo menor:z

Transformamos las frases del enunciado a ecuaciones matemáticas.

$x=2(y+z) \rightarrow x=2y+2z \rightarrow x-2y-2z=0$

$x-(y-z)=3(y-(y-z)+z-(y-z)) \rightarrow x-(y-z)=3(z-y+2z) \rightarrow x+2y-8z=0$

$x+(y+z)+y+(y+z)+z+(y+z)=150 \rightarrow x+4y+4z=150$

Quedando el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} x-2y-2z=0 \\ x+2y-8z=0 \\ x+4y+4z=150 \end{array}\right.$$

Cuya matriz ampliada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -8 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 150 \end{array}\right) \rightarrow F'_2=F_2-F_1, F'_3=F_3-F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 150 \end{array}\right)$$

Intercambiamos orden de columnas:$C_2 \longleftrightarrow C_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 150 \end{array}\right) \rightarrow F'_3=F_3+F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 150 \end{array}\right)$$

Y despejamos incógnitas desde la última a la primera ecuación (recordando que hemos permutado el orden de la segunda y tercera columna).

$y=15 \rightarrow z=10 \rightarrow x=50$

Por lo tanto, el padre tenía 35 años cuando nació su hijo mayor, y 40 años cuando nació su hijo menor.

6. Se tienen tres lingotes compuestos del siguiente modo:

- **El primero de 20 g de oro, 30 g de plata y 40 g de cobre.**
- **El segundo de 30 g de oro, 40 g de plata y 50 g de cobre.**
- **El tercero de 40 g de oro, 50 g de plata y 90 g de cobre.**

Se pide qué peso habrá de tomarse de cada uno de los lingotes anteriores para formar un nuevo lingote de 34 g de oro, 46 g de plata y 67 g de cobre.

Primero establecemos las incógnitas:

- x es el % del primer lingote que usaremos para el nuevo lingote.
- y es el % del segundo lingote que usaremos para el nuevo lingote.
- z es el % del tercer lingote que usaremos para el nuevo lingote.

Planteamos la ecuación para el oro del nuevo lingote → $20x + 30y + 40z = 34$

Para la plata del nuevo lingote → $30x + 40y + 50z = 46$

Y para el cobre del nuevo lingote → $40x + 50y + 90z = 67$

Y planteamos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{pmatrix} 20x + 30y + 40z = 34 \\ 30x + 40y + 50z = 46 \\ 40x + 50y + 90z = 67 \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos la primera por $3/2$y le restamos la segunda → $F'_2 = \frac{3}{2}F_1 - F_2$

$$\begin{pmatrix} 20x + 30y + 40z = 34 \\ 5y + 10z = 5 \\ 40x + 50y + 90z = 67 \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos la primera por 2 y le restamos la tercera → $F'_3 = 2F_1 - F_3$

$$\begin{pmatrix} 20x + 30y + 40z = 34 \\ 5y + 10z = 5 \\ 10y - 10z = 1 \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos la segunda por 2 y le restamos la tercera → $F'_3 = 2F_2 - F_3$

$$\begin{pmatrix} 20x + 30y + 40z = 34 \\ 5y + 10z = 5 \\ 30z = 9 \end{pmatrix}$$

De la tercera fila → $z = \frac{9}{30} = 0.3$

Sustituyendo en la segunda fila → $5y + 3 = 5$→ $y = \frac{2}{5} = 0.4$

Sustituyendo en la primera fila → $20x + 12 + 12 = 34$→ $x = \frac{10}{20} = 0.5$

La masa total del primer lingote es 90g, por lo que su 50% es 45g.

La masa del segundo lingote es igual a 120g, por lo que su 40% es 48g.

La masa del tercer lingote es 180g, y su 30% será 54g.

Sumando 45g + 48g + 54g obtenemos los 147g del nuevo lingote.

7. Los gastos diarios de tres estudiantes, Marta, Raúl y Pedro suman 51.5 euros. Si a los que gasta Marta se le suma el triple de la diferencia entre los gastos de Raúl y Pedro, obtenemos lo que gasta Pedro. Ocho veces la diferencia entre el gasto de Raúl y el de Marta es igual al gasto de Marta. ¿Cuánto gasta cada uno?

El enunciado del problema permite plantear un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas:

x → gastos de Marta

y → gastos de Raúl

z → gastos de Pedro

$$\begin{Bmatrix} x+y+z=51{,}5 \\ x+3(y-z)=z \\ 8(y-x)=x \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x+y+z=51{,}5 \\ x+3y-4z=0 \\ -9x+8y=0 \end{Bmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 51{,}5 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \\ -9 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Aplicamos las siguientes transformaciones: $F'_2 = F_2 - F_1, F'_3 = F_3 + 9 \cdot F_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 51{,}5 \\ 0 & 2 & -5 & -51{,}5 \\ 0 & 17 & 9 & 463{,}5 \end{array}\right) \rightarrow \quad F'_3 = 2 \cdot F_3 - 17 \cdot F_2 \quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 51{,}5 \\ 0 & 2 & -5 & -51{,}5 \\ 0 & 0 & 103 & 1802{,}5 \end{array}\right)$$

Soluciones: $103z = 1802{,}5 \rightarrow z = 17{,}5€ \rightarrow y = 18€ \rightarrow x = 16€$

8. En una cafetería, tres cafés, una tostada y dos zumos de naranja cuestan 7,50€. Cuatro cafés, una tostada y un zumo de naranja cuestan 7,20€.

a) Calcula, de manera razonada, el precio total de dos cafés, una tostada y tres zumos de naranja.

b) ¿El precio de un zumo de naranja podría ser de 2€? Razona tu respuesta.

a) Planteamos las tres ecuaciones, siendo C el precio de un café, T el precio de una tostada y Z el precio de un zumo de naranja.

$$\begin{Bmatrix} 3C+T+2Z=7{,}50 \\ 4C+T+Z=7{,}20 \\ 2C+T+3Z=k \end{Bmatrix}$$

En la tercera ecuación no conocemos el precio total, por lo que incluimos un parámetro inicial. Según los posibles valores de ese parámetro podemos decidir si el sistema tiene solución. Por lo tanto, llegamos a un ejercicio de sistema de ecuaciones dependiente de un parámetro inicial, que resolvemos por Gauss.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 7{,}50 \\ 4 & 1 & 1\,|\,7{,}20 \\ 2 & 1 & 3 & k \end{pmatrix} \rightarrow C_1 \longleftrightarrow C_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 7{,}50 \\ 1 & 4 & 1\,|\,7{,}20 \\ 1 & 2 & 3 & k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} F'_2=F_2-F_1 \\ F'_3=F_3-F_1 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 7{,}50 \\ 0 & 1 & -1\,| & -0{,}30 \\ 0 & -1 & 1 & k-7{,}50 \end{pmatrix} \rightarrow F'_3=F_3+F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 7{,}50 \\ 0 & 1 & -1\,| & -0{,}30 \\ 0 & 0 & 0 & k-7{,}80 \end{pmatrix}$$

Tras terminar Gauss, comprobar la ausencia de absurdos matemáticos y la ausencia de filas proporcionales, el rango del sistema se define como el número de ecuaciones con al menos un coeficiente no nulo.

Si $k=7{,}80$ → Tendremos Rango 2 y 3 incógnitas → SCI con infinitas soluciones y un parámetro libre

Si $k\neq 7{,}80$ → Tendremos un absurdo matemático en la tercera fila → SI sin solución

El precio total de los dos cafés, la tostada y los tres zumos de naranja será igual a $7{,}80$€.

b) En el caso en que el sistema tiene solución, despejamos el valor de las variables.

$Z=\lambda\in\mathbb{R}$

$F_2 \rightarrow C-Z=-0{,}30 \rightarrow C=-0{,}30+\lambda$

$F_1 \rightarrow T+3C+2Z=7{,}50 \rightarrow T-0{,}90+3\lambda-0{,}60+2\lambda=7{,}50 \rightarrow T=9-5\lambda$

Si el precio de una tostada los fijamos en $\lambda=2$€, provocaría un precio negativo en la tostada:

$T=9-5\cdot 2=-1$

No habría solución, porque no tiene sentido precios negativos.

9. Tres lápices, un cuaderno y una agenda han costado 5€, lo mismo que dos cuadernos y una agenda. ¿Podemos saber el precio de cada artículo si ninguna es gratis y en céntimos todos son múltiplos de 50?

Planteamos el sistema de ecuaciones, siendo L, C y A los precios de un lápiz, de un cuaderno y de una agenda respectivamente. El precio en euros la expresamos en céntimos de euros.

$$\begin{Bmatrix} 3L + C + A = 500 \\ 2C + A = 500 \end{Bmatrix}$$

Con esta información tendríamos un sistema de rango 2 y 3 incógnitas → SCI con infinitas soluciones y un parámetro libre.

$A = \lambda \in \mathbb{R}$

$F_2 \rightarrow 2C + A = 500 \rightarrow C = 250 - \frac{\lambda}{2}$

$F_1 \rightarrow 3L + C + A = 500 \rightarrow 3L + 250 - \frac{\lambda}{2} + \lambda = 500 \rightarrow 3L = 250 - \frac{\lambda}{2} \rightarrow L = \frac{250}{3} - \frac{\lambda}{6}$

Las condiciones del enunciado afirman que ningún artículo es gratis. Por lo tanto: $\lambda > 0$.

Además de esta condición, el precio de los artículos no puede ser negativo: $A > 0, C > 0, L > 0$.

Por último, el precio de cada artículo debe ser múltiplo de 50 céntimos.

Para$A = \lambda \in \mathbb{R}$, se cumplen todas las condiciones anteriores si $\lambda = \{50,100,150,200, \dots\}$

Para $C = 250 - \frac{\lambda}{2} = \frac{500-2\lambda}{2}$, necesitamos que el numerador sea positivo. Por lo tanto:

$500 - 2\lambda > 0$

Esto acota los valores del parámetro libre a: $\lambda = \{50,100,150,200\}$, ya que desde 250 en adelante el precio de jun cuaderno sería cero o negativo.

Además, el cociente $C = \frac{500-2\lambda}{2}$debe ser múltiplo de 50, y esta condición se cumple también para los cuatro valores $\lambda = \{50,100,150,200\}$.

Finalmente, para $L = \frac{250}{3} - \frac{\lambda}{6} = \frac{500-\lambda}{6}$, necesitamos que el numerador sea positivo.

Los cuatro valores $\lambda = \{50,100,150,200\}$ cumplen esa condición.

El cociente $L = \frac{500-\lambda}{6}$, nuevamente, debe ser múltiplo de 50. Y esa condición solo se cumple para:

$$A = \lambda = 200$$

Ya que$L = \frac{500-200}{6} = 50$. Además, el cuaderno quedaría:

$$C = 250 - \frac{\lambda}{2} = 250 - \frac{200}{2} = 150$$

Conclusión: El precio de una agenda es de 200 céntimos, el precio de un cuaderno es de 150 céntimos, y el precio de un lápiz es de 50 céntimos.

10. a) Justifica que es posible hacer un pago de 34,50 euros cumpliendo las siguientes restricciones.

- **Utilizando únicamente monedas de 50 céntimos de euro, de 1 euro y de 2 euros.**
- **Se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas.**
- **Tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimos y 2 euros juntas.**

¿De cuántas maneras y con cuántas monedas de cada tipo se puede hacer el pago?

b) Si se redondea la cantidad a pagar a 35€, justifica si es posible o no seguir haciendo el pago bajo las mismas condiciones que en el apartado anterior.

a) El número de monedas de 50 céntimos será x, el número de monedas de 1 euro será y, el número de monedas de 2 euros será z. Con estas incógnitas montamos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, con cada una de las condiciones.

$$\left\{\begin{array}{c} 0{,}5x + y + 2z = 34{,}50 \\ x + y + z = 30 \\ y = x + z \end{array}\right\}$$

Llevamos el valor de y de la tercera ecuación a las otras dos.

$$\left\{\begin{array}{c} 0{,}5x + (x + z) + 2z = 34{,}50 \\ x + (x + z) + z = 30 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} 1{,}5x + 3z = 34{,}50 \\ 2x + 2z = 30 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} 1{,}5x + 3z = 34{,}50 \\ x + z = 15 \end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación despejamos el valor de $z = 15 - x$ y lo llevamos a la primera ecuación.

$1{,}5x + 3(15 - x) = 34{,}50 \rightarrow -1{,}5x = -10{,}50 \rightarrow x = 7$

Y resolviendo el resto de incógnitas $\rightarrow z = 8, y = 15$

Solución: Podemos pagar de forma única con 7 monedas de 50 céntimos, 15 monedas de 1 euro y 8 monedas de 2 euros.

b) Si el total a pagar es de 35 euros, de la primera ecuación del sistema del apartado anterior, llegaríamos a la condición $\rightarrow 1{,}5x + 3(15 - x) = 35 \rightarrow -1{,}5x = -10 \rightarrow x = \frac{20}{3} \rightarrow$ No podremos pagar, al necesitar siempre un número entero de monedas.

11. Sabemos que el coste de 3 lápices, 1 rotulador y 2 carpetas es de 15€, mientras que el de 2 lápices, 4 rotuladores y 1 carpeta es de 20€.

a) Sabiendo que 1 lápiz y 7 rotuladores cuestan 25€, ¿podemos deducir el precio de cada uno de los artículos? Razona tu respuesta.

b) Si por el precio de una carpeta se pueden comprar 10 lápices, ¿cuánto cuesta cada uno de los artículos?

a) Llamaremos al precio de un lápiz L, al precio de un rotulador R y al precio de una carpeta C. Por lo que las dos ecuaciones primeras del enunciado resultan:

$\begin{Bmatrix} 3L+R+2C=15 \\ 2L+4R+C=20 \end{Bmatrix} \rightarrow$ Si añadimos la tercera condición $\rightarrow \begin{Bmatrix} 3L+R+2C=15 \\ 2L+4R+C=20 \\ L+7R=25 \end{Bmatrix}$

O bien resolvemos por Gauss o bien nos damos cuenta que $F_3 = 2F_2 - F_1 \rightarrow$ Podemos obviar la tercera ecuación, por ser combinación lineal de las otras dos.

$\begin{Bmatrix} 3L+R+2C=15 \\ 2L+4R+C=20 \end{Bmatrix} \rightarrow$ Las dos ecuaciones no son proporcionales, por lo que tendremos un parámetro libre. Por ejemplo, $C=\lambda$. El sistema resulta:

$\begin{Bmatrix} 3L+R=15-2\lambda \\ 2L+4R=20-\lambda \end{Bmatrix} \rightarrow F_1{}' = -4F_1 \rightarrow \begin{Bmatrix} -12L-4R=-60+8\lambda \\ 2L+4R=20-\lambda \end{Bmatrix}$

Sumamos ambas ecuaciones $\rightarrow -10L = -40+7\lambda \rightarrow L = 4-\frac{7}{10}\lambda$

Y el precio del rotulador podremos escribirlo como $\rightarrow 3(4-\frac{7}{10}\lambda)+R = 15-2\lambda \rightarrow R = 3+\frac{1}{10}\lambda$

Es decir, tenemos un sistema compatible indeterminado, con infinitas soluciones dependientes del parámetro libre.

$\begin{Bmatrix} L=4-\frac{7}{10}\lambda \\ R=3+\frac{1}{10}\lambda \\ C=\lambda \end{Bmatrix} \rightarrow$ Los precios no están definidos de manera única. Dependen de un parámetro libre.

b) El nuevo sistema que tendremos es $\rightarrow \begin{Bmatrix} 3L+R+2C=15 \\ 2L+4R+C=20 \\ C=10L \end{Bmatrix}$

Llevamos el resultado $C=10L$ a las dos primeras ecuaciones $\rightarrow \begin{Bmatrix} 23L+R=15 \\ 12L+4R=20 \end{Bmatrix} \rightarrow F_1{}' = -4F_1 \rightarrow \begin{Bmatrix} -92L-4R=-60 \\ 12L+4R=20 \end{Bmatrix} \rightarrow$ Sumamos ambas ecuaciones $\rightarrow -80L=-40 \rightarrow$ El precio de un lápiz resulta $L=$ 0,5€.

El precio del rotulador es $\rightarrow R = 15-23L \rightarrow R = 3{,}5$€.

El precio del cuaderno es $\rightarrow C = 10L \rightarrow C = 5€$

En esta ocasión sí podemos determinar de manera única el precio de los tres artículos.

12. En un estudio de mercado, se eligen tres productos, A, B y C y cuatro tiendas. En la primera, por una unidad de cada producto cobran, en total, 4.25 euros. En la segunda, 2 unidades de A y 3 de C valen 8.25 euros más que una unidad de B. En la tercera, una unidad de A y 2 de C valen 4 euros más que 2 unidades de B y, en la cuarta, una unidad de B vale 1.25 euros menos que una de C. ¿Tienen A, B y C el mismo precio en las cuatro tiendas o no? Si la respuesta es no, justifique por qué y si la respuesta es sí, diga cuál es ese precio.

Tenemos tres productos A, B, y C, cada uno con su precio. Las incógnitas van a ser los precios de los productos.

Y tenemos cuatro tiendas donde se venden esos productos.

De la tienda 1 planteamos la ecuación $\rightarrow A+B+C=4{,}25$

De la tienda 2 $\rightarrow 2\mathrm{A}+3\mathrm{C}=8{,}25+B$

De la tienda 3 $\rightarrow A+2\mathrm{C}=4+2\mathrm{B}$

De la tienda 4 $\rightarrow B=C-1{,}25$

El sistema resultante de cuatro ecuaciones y tres incógnitas es:

$$\left\{\begin{matrix} A+B+C=4{,}25 \\ 2A-B+3C=8{,}25 \\ A-2B+2C=4 \\ B-C=-1{,}25 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4{,}25 \\ 2 & -1 & 3 & 8{,}25 \\ 1 & -2 & 2 \;|\; & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1{,}25 \end{pmatrix} \rightarrow F'_2=F_2-2\mathrm{F}_1, F'_3=F_3-F_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4{,}25 \\ 2 & -1 & 3 & 8{,}25 \\ 1 & -2 & 2 \;|\; & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1{,}25 \end{pmatrix} \rightarrow$$ F_3es combinación lineal deF_2, por lo que el sistema equivalente

resulta $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4{,}25 \\ 0 & -3 & 1 \;|\; & -0{,}25 \\ 0 & 1 & -1 & -1{,}25 \end{pmatrix} \rightarrow F'_3=3\mathrm{F}_3+F_2 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4{,}25 \\ 0 & -3 & 1 \;|\; & -0{,}25 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow -2\mathrm{C}=-4 \rightarrow C=2€ \rightarrow B=0{,}75€ \rightarrow A=1{,}5€$$

Es decir, al existir solución única podemos afirmar que los tres productos se venden al mismo precio en las cuatro tiendas.

13. a) Un boxeador ha disputado 20 combates en el año 2018. Por cada combate ganado cobraba 3 mil euros, 2 mil por combate nulo y mil por combate perdido. En total obtuvo 40 mil euros en 2018. Si las cantidades cobradas hubieran sido 6 mil euros por combate ganado, 4 mil euros por nulo y mil por perdido, habría obtenido 72 mil euros. Con estos datos, ¿es posible saber cuántos combates ganó, cuantos hizo nulo y cuantos perdió? En caso afirmativo, calcúlalos.

b) Estudia si hay alguna cantidad k que sustituya a los 6 mil euros por combate ganado del apartado anterior, y que hiciera imposible la solución del problema dentro del campo de los números reales.

a) Planteamos el siguiente sistema a partir del enunciado:

$$\begin{cases} g+n+p=20 \\ 3g+2n+p=40 \\ 6g+4n+p=72 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 3 & 2 & 1 | & 40 \\ 6 & 4 & 1 & 72 \end{pmatrix} \rightarrow F'_2 = F_2 - 3F_1, F'_3 = F_3 - 6F_1 \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & -1 & -2 | & -20 \\ 0 & -2 & -5 & -48 \end{pmatrix} \rightarrow F'_3 = F_3 - 2F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & -1 & -2 | & -20 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

Tras aplicar Gauss, llegamos a 3 ecuaciones con al menos un coeficiente no nulo y 3 incógnitas. Por lo tanto, SCD con solución única que podemos resolver:

$z = 8, y = 4, x = 8$

b) El nuevo sistema resulta:

$$\begin{cases} g+n+p=20 \\ 3g+2n+p=40 \\ kg+4n+p=72 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 3 & 2 & 1 | & 40 \\ k & 4 & 1 & 72 \end{pmatrix} \rightarrow C_1 \Leftrightarrow C_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 1 & 2 & 3 | & 40 \\ 1 & 4 & k & 72 \end{pmatrix} \rightarrow F'_2 = F_2 - F_1,$$

$$F'_3 = F_3 - F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 2 | & 20 \\ 0 & 3 & k-1 & 52 \end{pmatrix} \rightarrow F'_3 = F_3 - 3F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 2 | & 20 \\ 0 & 0 & k-7 & -8 \end{pmatrix}$$

El valor para realizar la discusión de casos sería: $k - 7 = 0$

- Si $k = 7 \rightarrow$ En la matriz final de Gauss $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 2 | & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow$ En la tercera fila aparece el siguiente absurdo matemático: $0 = -8 \rightarrow$ Sistema Incompatible, no habría solución.

Si $k \neq 7 \rightarrow$ SCD con solución única.

14) El gerente de una empresa de productos hospitalarios desea introducir un nuevo producto en el mercado nacional. Para ello contrata a 3 vendedores que se han encargado de las zonas A, B y C del país, respectivamente. El vendedor de la zona A ha trabajado 40 horas, ha realizado 10 demostraciones y 5 viajes para dicha promoción. El vendedor de la zona B ha trabajado el doble de horas que el de la zona A, realizando 15 demostraciones y 8 viajes. En cuanto al vendedor de la zona C, ha trabajado 100 horas, ha realizado 25 demostraciones y 10 viajes. El gerente debe abonarles 75€ por hora trabajada, 300€ por demostración y 250€ por viaje realizado. Teniendo en cuenta que, además, debe aplicárseles una retención en concepto del impuesto del IRPF del 15% si la cantidad a abonar al vendedor es menor de diez mil euros y del 18% en caso contrario, determine la cantidad final que cobrará cada vendedor.

DATOS

A: 40h + 10d +5v

B: 80h+ 15d + 8v

C: 100h+ 25d + 10v

Se pagan:

- 75€ por hora trabajada (h)
- 300€ por demostración (d)
- 250€ por viaje (v)

Sustituimos estos datos en cada ecuación para obtener cuánto dinero habría que pagarles en bruto (sin impuestos):

A: 40x 75 +10x300+ 5x250 = 7.250€

B: 80x75+ 15x300+ 8x250= 12.500€

C: 100x75 +25x300+10x250= 17.500€

Nos dan unas condiciones restricciones de impuestos según la cantidad que haya que pagar:

- Si el pago es menor a 10000€ se le aplica un impuesto del 15%
- Si el pago es mayor a 10000€ se le aplica un impuesto del 18%

Aplicamos estas condiciones a lo que hay que pagarles en bruto a los comerciantes de cada zona. Sabiendo que, si se aplica un 15% de impuestos, el vendedor recibe el 85% del total en bruto. Y si se aplica un 18% de impuestos, el vendedor recibe el 82%

A: 7250x0,85= 6.162,5€

B: 12500x 0,82= 10.250€

C: 17500x 0,82= 14.350€

15) Un fabricante de paneles fotovoltaicos está analizando la eficiencia de tres modelos de placas (A, B y C). En un día determinado se realizaron tres pruebas. En la primera, utilizando 2 placas del modelo A, 1 placa del modelo B y 3 placas del modelo C, se generó una potencia efectiva total de 2960W. En la segunda, al combinar 1 placa del modelo A, 3 placas del modelo B y 2 placas del modelo C, se obtuvo una potencia efectiva total de 2990W. En la tercera, una configuración con 3 placas del modelo A, 2 placas del modelo B y 1 placa del modelo C produjo una potencia efectiva total de 2870W. ¿Se puede obtener la potencia efectiva que generó individualmente cada modelo de placa fotovoltaica? En caso afirmativo, obtenga dichas potencias efectivas.

Interpretamos los datos del problema:

A: potencia (en W) de **una placa del modelo A**

B: potencia (en W) de **una placa del modelo B**

C: potencia (en W) de **una placa del modelo C**

$$\begin{gathered} 2A + B + 3C = 2960 \\ A + 3B + 2C = 2990 \\ 3A + 2B + C = 2870 \end{gathered}$$

Ahora buscamos las soluciones de cada incógnita aplicando el método de Gauss:

1. Nueva Fila 2: Fila 1 – 2·Fila 2
2. Nueva Fila 3: 3·Fila 2 original − Fila 3 original

$$\begin{gathered} 2A + B + 3C = 2960 \\ 0 - 5B - C = -3020 \\ 0 + 7B + 5C = 6100 \end{gathered}$$

3. Nueva Fila 3: 7·Fila 2 + 5·Fila 3

$$\begin{gathered} 2A + B + 3C = 2960 \\ 0 - 5B - C = -3020 \\ 0 + 0 + 18C = 9360 \end{gathered}$$

A continuación, sustituimos para encontrar el resultado de las incógnitas:

1. Despejamos C:

$$\begin{gathered} 18C = 9360 \\ C = \frac{9360}{18} \\ C = 520 \end{gathered}$$

2. Despejamos B, sustituyendo C = 520:

$$-5B - C = -3020$$

$$-5B - 520 = -3020$$

$$\begin{gathered} B = \frac{2500}{5} \\ B = 500 \end{gathered}$$

3. Despejamos A, sustituyendo B= 500 y C=520:

$$2A + B + 3C = 2960$$
$$2A + 500 + 3 \cdot 520 = 2960$$
$$2A = 900$$
$$A = \frac{900}{2}$$
$$A = 450$$

Por lo tanto, la solución del sistema es:

$$A = 450 \text{ W}$$
$$B = 500 \text{ W}$$
$$C = 520 \text{ W}$$

Es decir:

- Cada placa del modelo A produce 450 W
- Cada placa del modelo B produce 500 W
- Cada placa del modelo C produce 520 W

16) En un festival gastronómico gaditano se han vendido entradas para tres eventos culinarios. Concretamente, 120 entradas para un taller de repostería, 50 para una demostración de cocina gourmet y 150 para una cata de vinos de la tierra de Cádiz. El total recaudado por la venta de entradas ha sido de 6.460€. Se sabe que el precio de 10 entradas para el taller de repostería coincide con el coste de la suma de 2 entradas para la cata de vinos y 1 entrada para la demostración de cocina gourmet. Además, el coste de 2 entradas para el taller y 1 entrada para la cata de vinos supera en 6 euros al de 2 entradas para la demostración de cocina gourmet. ¿Cuánto cuesta la entrada de cada evento?

$$t: precio\ del\ taller\ de\ repostería$$

$$c: precio\ de\ la\ demostración\ de\ cocina$$

$$v: precio\ de\ la\ cata\ de\ vinos$$

$$\begin{cases} 120t + 50c + 150v = 6.460 \\ 10t = 2v + c \\ 2t + v = 2c + 6 \end{cases}$$

De la segunda ecuación, despejamos el valor del precio de la demostración de cocina.

$$10t - 2v = c$$

Ese valor de la incógnita c lo llevamos a las otras dos ecuaciones.

$$\begin{cases} 120t + 50(10t - 2v) + 150v = 6.460 \\ 2t + v = 2(10t - 2v) + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 120t + 500t - 100v + 150v = 6.460 \\ 2t + v = 20t - 4v + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 620t + 50v = 6.460 \\ -18t + 5v = 6 \end{cases}$$

En la primera ecuación, dividimos ambos miembros entre 10.

$$\begin{cases} 62t + 5v = 646 \\ -18t + 5v = 6 \end{cases}$$

Restamos ambas ecuaciones:

$$80t = 640 \rightarrow t = 8\ euros$$

Por lo tanto:

$$-18t + 5v = 6 \rightarrow -18(8) + 5v = 6 \rightarrow v = 30\ euros$$

Y de la condición de partida:

$$10t - 2v = c \rightarrow 10(8) - 2(30) = c \rightarrow 20 = c \rightarrow c = 20\ euros$$

17) Juan ha gastado 80 euros por la compra de un jersey, una camisa y un pantalón. Sabemos que el precio del jersey es un tercio del precio de la camisa y el pantalón juntos.

a) ¿Es posible determinar de forma única el precio del jersey? ¿Y el de la camisa? Razona la respuesta.

b) Si Juan hubiera esperado a las rebajas se habría gastado 57 euros, pues el jersey, la camisa y el pantalón tenían un descuento del 30%, del 40% y del 20%, respectivamente. Calcula el precio de cada prenda antes de las rebajas.

a) Llamamos:

j: precio de un jersey

c: precio de una camisa

p: precio de un pantalón

$$j + c + p = 80$$

$$j = \frac{1}{3}(c + p)$$

Tenemos un sistema de 2 ecuaciones y 3 incógnitas. El rango máximo del sistema será 2. Por lo tanto, es imposible que tengamos SCD con solución única. Pero alguna de las incógnitas puede no depender del parámetro libre.

Llevamos la segunda ecuación (valor del jersey) a la primera ecuación:

$$\left(\frac{1}{3}c + \frac{1}{3}p\right) + c + p = 80 \rightarrow \frac{4}{3}c + \frac{4}{3}p = 80 \rightarrow 4c + 4p = 240 \rightarrow c + p = 60$$

Obtenemos un sistema de una única ecuación y dos incógnitas. Una de las incógnitas será el parámetro libre. En efecto:

$$c = \alpha \in \mathbb{R}\ (parámetro\ libre) \rightarrow p = 60 - \alpha$$

Y el precio del jersey viene determinado por:

$$j = \frac{1}{3}(c + p) \rightarrow j = \frac{1}{3}(\alpha + 60 - \alpha) \rightarrow j = \frac{1}{3}(60) \rightarrow j = 20\ euros$$

El sistema es SCI con infinitas soluciones y un parámetro libre. El precio de la camisa y del pantalón dependen del parámetro libre. Pero el precio del jersey toma un valor único de 20 euros.

b) Este apartado añade una nueva ecuación a nuestro sistema. ¡Ojo! Un descuento del 30% significa que se paga el 70% del precio original. Un descuento del 40% indica que se paga el 60% del precio original. Y un descuento del 20% implica que se paga el 80% del precio origina. Por lo tanto:

$$0{,}7j + 0{,}6c + 0{,}8p = 57$$

Sabemos, del apartado a), que el precio del jersey es de 20 euros. Es decir:

$$0{,}7 \cdot (20) + 0{,}6c + 0{,}8p = 57 \rightarrow 0{,}6c + 0{,}8p = 57 - 14 \rightarrow 0{,}6c + 0{,}8p = 43$$

$$multiplicamos\ todo\ por\ 10 \rightarrow 6c + 8p = 430$$

De la primera ecuación del apartado a) sabemos que:

$$j + c + p = 80 \rightarrow 20 + c + p = 80 \rightarrow c + p = 60$$

Es decir, llegamos a un sistema 2x2:

$$\begin{cases} 6c + 8p = 430 \\ c + p = 60 \end{cases}$$

Aplicamos reducción. Para ello, multiplicamos la segunda ecuación por 6.

$$\begin{cases} 6c + 8p = 430 \\ 6c + 6p = 360 \end{cases}$$

Restamos ambas ecuaciones.

$$2p = 70 \rightarrow p = 35\ euros$$

Y con el precio del pantalón, sacamos el de la camisa:

$$c + p = 60 \rightarrow c + 35 = 60 \rightarrow c = 25\ euros$$

18) Se sabe que la suma de tres números naturales es 22 y que la suma de cuatro veces el primero más el triple del segundo más el doble del tercero es 61. ¿Puede ser 15 uno de los tres números? En caso afirmativo, calcula los restantes. ¿Existen otras opciones?

Sean a, b y c tres números naturales:

Planteamos el sistema:

a + b + c = 22

4a + 3b + 2c = 61

Despejamos c de la primera ecuación:

c = 22 − a − b

Sustituimos en la segunda:

4a + 3b + 2·(22 − a − b) = 61

4a + 3b + 44 − 2a − 2b = 61

2a + b = 17

Despejamos b:

b = 17 – 2a (como b tiene que ser un número natural, $17 - 2a \geq 0$, siendo a otro número natural)

Sustituimos en c:

c = 22 − a − (17 − 2a)

c = a + 5

Los valores de “b” y de “c” dependan de “a”. Por lo tanto, “a” es un parámetro libre. Sabiendo que tiene que ser un número natural. Por lo tanto, las posibles soluciones son:

a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (“a” no puede superar el valor 8, porque debe cumplirse $17 - 2a \geq 0$).

b = 17 − 2a

c = a + 5

Comprobamos si 15 puede ser uno de los números:

• a = 15 no es posible.

• b = 15 → a = 1 y c = 6 (sí es posible).

• c = 15 no es posible (porque c = a + 5; y sabemos que “a”, como máximo, puede ser 8).

Por tanto, 15 solo puede ser b.

Todas las soluciones posibles son (damos valores a “a” y sacamos en resto de incógnitas):

(1, 15, 6); (2, 13, 7); (3, 11, 8); (4, 9, 9); (5, 7, 10); (6, 5, 11); (7, 3, 12); (8, 1, 13)