Innermathematische Funktionsanalyse einer Funktionenschar mit Geogebra

Berechnen Sie die Nullstellen und die Extrempunkte in Abhängigkeit vom Scharparameter k

Gegeben ist die Funktionenschar: $f_k(x) = (k \cdot x^2 - 4) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$

Speichern Sie diese Schar ab, als f(x,k)

Nullstellen

Ansatz für die Nullstellen: $f_k(x) = 0$

$\Rightarrow$ Geogebra: Löse(f(x,k)=0) $\Rightarrow x_{N1} = -2\frac{\sqrt{k}}{k} = -\frac{2}{\sqrt{k}}$ und $x_{N2} = 2\frac{\sqrt{k}}{k} = \frac{2}{\sqrt{k}}$

Die letzte Vereinfachung macht Geogebra nicht! Sie macht aber das Weiterrechnen einfacher.

Extrempunkte

Notwendige Bedingung: $f_k'(x_E) = 0$

Berechne der ersten Ableitungsfunktion: f1(x)=Vereinfache(Ableitung(f(x,k),x,1))

$\Rightarrow f_k'(x) = -\frac{1}{2}\,(k\,x^2 - 4\,k\,x - 4)\,e^{-\frac{x}{2}}$

$\Rightarrow$ Geogebra: Löse(Ableitung(f(x,k),x,1)=0)

$\Rightarrow x_{E1} = \frac{-2\sqrt{k^2+k}+2\,k}{k}$ und $x_{E2} = \frac{2\sqrt{k^2+k}+2\,k}{k}$

Berechnen der Funktionswerte: $f_k(\frac{-2\sqrt{k^2+k}+2\,k}{k})$ und $f_k(\frac{2\sqrt{k^2+k}+2\,k}{k})$

Geogebra: f((-2*sqrt(k²+k)+2*k),k) $\Rightarrow f_k(\frac{-2\sqrt{k^2+k}+2\,k}{k}) = (8\,k - 8\,\sqrt{k^2+k}) \cdot e^{\frac{-k+\sqrt{k^2+k}}{k}}$

und $f_k(\frac{2\sqrt{k^2+k}+2\,k}{k}) = (8\,k + 8\,\sqrt{k^2+k}) \cdot e^{\frac{-k-\sqrt{k^2+k}}{k}}$

Hinreichende Bedingung $f_k''(x_E)$: Abspeichern der zweiten Ableitung als f2(x,k):

f2(x,k)=Ableitung(f(x,k),x,2) $\Rightarrow f_k''(x) = \frac{1}{4}\,(k\,x^2 - 8\,k\,x + 8\,k - 4) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$ und dann

$f2(\frac{-2\sqrt{k^2+k}+2\,k}{k}) = 2\sqrt{k^2+k} \cdot e^{\frac{-k+\sqrt{k^2+k}}{k}} = 2\sqrt{k^2+k} \cdot \frac{e^{\frac{\sqrt{k^2+k}}{k}}}{e} > 0$, also ist hier ein Tiefpunkt

$f2(\frac{2\sqrt{k^2+k}+2\,k}{k}) = -2\sqrt{k^2+k}\,e^{\frac{-k-\sqrt{k^2+k}}{k}} = -2\frac{\sqrt{k^2+k}}{e \cdot e^{\frac{\sqrt{k^2+k}}{k}}} < 0$, also ist hier ein Hochpunkt

Die Extrempunkte in Abhängigkeit von k sind also

$\mathbf{T}\Big(\frac{-2\sqrt{k^2+k}+2\,k}{k}\Big|(8\,k - 8\,\sqrt{k^2+k}) \cdot e^{\frac{-k+\sqrt{k^2+k}}{k}}\Big)$ und

$\mathbf{H}\Big(\frac{2\sqrt{k^2+k}+2\,k}{k}\Big|(8\,k + 8\,\sqrt{k^2+k}) \cdot e^{\frac{-k-\sqrt{k^2+k}}{k}}\Big)$

Wendepunkte

Notwendige Bedingung: $f_k''(x_W) = 0$ Ableitungsfunktion $f''(x,k)$ (s.o.) als f2(x,k) gespeichert

Geogebra: Löse(f2(x,k)=0,x) $\Rightarrow x_{W1} = \frac{-2\sqrt{2\,k^2+k}+4\,k}{k}$ und $x_{W2} = \frac{2\sqrt{2\,k^2+k}+4\,k}{k}$

Hinreichende Bedingung: $f_k'''(x_w)$ mit $f_k'''(x) = \frac{k\,x^2-12\,k\,x+24\,k-4}{8}\cdot e^{-\frac{x}{2}}$

Geogebra: f3(x,k)=Vereinfache(Ableitung(f(x,k),x,3))

Damit: f_k'''(x_{W1})=Vereinfache(f3((-2*sqrt(2*k²+k)+4*k)/k,k))

$\Rightarrow f_k'''(xW1) = \frac{-2k^3+24k^2-46k+(k^2-12k+24)\sqrt{2k^2+k}}{4\,k\,e^{\frac{k}{2}}})$

und $f_k'''(xW2) = \frac{-2k^3+24k^2-46k+(-k^2+12k-24)\sqrt{2k^2+k}}{4\,k\,e^{\frac{k}{2}}})$

Funktionswerte:

$f(x_{W1}) = (-16\sqrt{2\,k^2+k}+24\,k)\cdot\frac{e^{\frac{\sqrt{2\,k^2+k}}{k}}}{e^2}$

$f(x_{W1}) = \frac{16\sqrt{2\,k^2+k}+24\,k}{e^2 e^{\frac{\sqrt{2\,k^2+k}}{k}}}$

Wendepunkte

$\Rightarrow \mathbf{W}_1\left(\frac{-2\sqrt{2\,k^2+k}+4\,k}{k}\middle|(-16\sqrt{2\,k^2+k}+24\,k)\cdot\frac{e^{\frac{\sqrt{2\,k^2+k}}{k}}}{e^2}\right)$

$\mathbf{W}_2\left(\frac{2\sqrt{2\,k^2+k}+4\,k}{k}\middle|\frac{16\sqrt{2\,k^2+k}+24\,k}{e^2 e^{\frac{\sqrt{2\,k^2+k}}{k}}}\right)$